Acta Mathematica Scientia 数学物理学报

2010,**30A**(1): http://actams.wipm.ac.cn

随机环境中有界跳幅随机游动常返性暂留性的另一证明 *

王士东　洪文明

(北京师范大学数学科学学院数学与复杂系统实验室　北京 100875)

摘要：假定环境是平稳遍历的，对具有有限跳幅的随机环境中的随机游动，我们给出了其常返性暂留性的另一证明． Brémont (2002) 的文章中，通过计算逃逸概率的方法给出了证明，而我们的证明采用了鞅收敛定理的方法．

关键词：随机环境中随机游动；鞅收敛定理；常返性；暂留性．

MR(2000) 主题分类: 60J10; 60J15　**中图分类号**: O211.6　**文献标识码**: A

文章编号: 1003-3998(2010)01–

1　引言

近年来，随机环境中的随机游动 (简记为 RWRE) 受到了人们广泛的关注，作为一般性的介绍可参见 Zeitouni ([9], 2004) 或 Sznitman ([8], 2004) 的讲稿．在一维的情形，已经得到很多结果，特别是常返性，暂留性的判别法则．对于环境是独立同分布，且跳幅为一步的情形， Solomon ([7], 1975) 给出了常返性暂留性的判定标准．而这一结果被 Alili([1], 1999) 和 Zeitouni [9] 推广到环境是平稳遍历的情形．对于环境独立同分布情形，且有界跳幅，向右跳幅最大为 R, 向左最大为 L, Key ([6], 1975) 利用 $(R+L)\times(R+L)$ 的随机矩阵 M(依赖于随机环境) 的第 R 个和第 $(R+1)$ 个 Lyapunov 指数给出了判定法则．对于上述 $R=1$ 的情形， Brémont (2002) 给出了与 $L\times L$ 矩阵 M 的最大 Lyapunov 指数相关的常返性暂留性判别法则，这其中涉及到逃逸概率的计算．在本文中，受 Sznitman([8], 2002) 在考虑跳幅为一步时所用手法的启发，我们利用鞅收敛定理的方法给出了 Brémont (2002) 判别法则一个全新的证明．而此证明方法的关键一步是构造一个合适的鞅，这种直觉来自于电网络中电压与概率的联系．

我们先简要的介绍一下模型，本文采用的 Brémont ([3]) 中的记号．给定可逆的动力系统 $(\Omega,\mathcal{F},\mu,T)$, 即概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 和可逆变换 T, 且 T 及其逆都是可测的，且保持测度 μ, 假定 T 关于 μ 是遍历的．这里的 Ω 可看为随机环境的空间．

给出两个取定的整数 $L\geq 1$ 和 $R\geq 1$, 引入整数集合 $\Lambda=\{-L,\cdots,R\}$, 它们代表游动可能的跳幅，给出 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的一列随机变量 $(p_z)_{z\in\Lambda}$, 且满足 $\sum\limits_{z\in\Lambda}p_z(\omega)=1$, μ-a.e., 及椭圆条

收稿日期：2008-05-15; 修订日期：2008-12-29

E-mail: wmhong@bnu.edu.cn; shidong_wang@yahoo.com.cn

* 基金项目：国家自然科学基金 (10721091) 、教育部新世纪优秀人才支持计划 NCET(No. 05-0143)

件：

$$\exists\varepsilon>0,\forall z\in\Lambda \text{ and } z\neq 0,\qquad (p_z/p_R)\geq\varepsilon,\ \mu\text{-a.e.} \tag{1}$$

对于给定的环境 ω, 可定义 $\mathbb{Z}$ 上的马氏链 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 如下， $X_0=0$ 及转移概率

$$\forall x\in\mathbb{Z}, P_\omega(X_{n+1}=x+z|X_n=x):=p_z(T^x\omega).$$

规定跳空间上 $\Lambda^{\mathbb{N}}$ 由 $X_n(\omega)_{n\geq 0}$ 及 $X_0=x$ 诱导出来的测度为 P_ω^x, 称为 “quenched” 概率，与其对应的 $\int_\Omega P_\omega d\mu(\omega)$ 称为 “annealed” 概率． E_ω^x 代表 P_ω^x 对应的数学期望． $x=0$ 时分别记为 P_ω 和 E_ω.

约定：在本文中，我们隐含随机变量对于 ω 的依赖，例如 $f(T^k\omega)$ 总是简记为 T^kf 或者 $f(k)$.

下文中，我们取定 $R=1$, 引入随机变量

$$a_i=(p_{-i}+\cdots+p_{-L})/p_1,\ 1\leq i\leq L. \tag{2}$$

定义下列非负可逆 $L\times L$ 矩阵，它将在后面的证明中起到关键作用：

$$M:=\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_{L-1} & a_L \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

记 $M(k,l)=M(k)\cdots M(l)$, $k\geq l\in\mathbb{Z}$. 设 $(e_i)_{1\leq i\leq L}$ 为 $\mathbb{R}^L$ 的基底．引入记号：

$$\delta(0,k):=\begin{cases}\langle e_1, M(k,0)e_1\rangle, & \text{if}\quad k\geq 0,\\ 1, & \text{if}\quad k=-1\end{cases} \tag{3}$$

让 $\gamma(M,T)$ 是 M 关于 $(\Omega,\mathcal{F},\mu,T)$ 的最大的 Liapounov 指数．在 $\mathbb{R}^L$ 中考虑 1-norm, 即 $\|x\|=\sum\limits_{i=1}^{L}|x_i|$, 其中 $x=(x_i)_{1\leq i\leq n}$. 引入锥形 $C=\{x\in\mathbb{R}^L, x_i>0\}$ 和它与球面的交集：$B=C\cap\{x\in\mathbb{R}^L,\|x\|=1\}$.

注意到 L 个形如 M 的矩阵的乘积的所有位置上的元素都是严格正的这个事实．包括 Brémont ([3]) 所给出的有关随机矩阵的性质我们归纳如下：

命题 1.1 (Brémont ([3])) 给定随机矩阵 M,

(i) $\forall x\in B$, μ-a.e.

$$\gamma(M,T)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log||M(n-1,0)x||.$$

(ii) 存在唯一的随机向量 $V\in B$ 和唯一的随机变数 λ 使得 $MV=\lambda TV$ 成立．更进一步的， $M(n-1,0)V=(T^{n-1}\lambda\cdots\lambda)T^nV$, 且

$$\gamma(M,T)=\int\log(\lambda)d\mu.$$

(iii) 存在常数 $C>0$ 使得 (“$\preceq$” 是 R^L 上偏序集)

$$\frac{1}{C}M(L-1,0)e_1\preceq M(L-1,0)V\preceq CM(L-1,0)e_1$$

(iv) 向量 V 一致的 (不依赖 ω) 在 $\mathbb{R}^L$ 的正椎体内：即存在常数 $\delta > 0$ 使得 $\langle e_i, V\rangle \geq \delta$, $1 \leq i \leq L$. 从而，存在常数 $C > 0$ 使得， $\forall k \geq 0$,

$$\frac{1}{C}(T^k\lambda \cdots T^0\lambda) \leq \delta(0,k) \leq C(T^k\lambda \cdots T^0\lambda).$$

对于有界跳的 RWRE 的常返性暂留性判定， Brémont ([3]) 通过计算逃逸概率已经给出如下定理.

定理 1.1 随机环境中随机游动具备如下渐近行为：

(i) 若 $E\log\lambda < 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) = +\infty$, P_ω-a.e., μ-a.e.

(ii) 若 $E\log\lambda > 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) = -\infty$, P_ω-a.e., μ-a.e.

(iii) 若 $E\log\lambda = 0$, 则 $-\infty = \liminf\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) < \limsup\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) = +\infty$, P_ω-a.e., μ-a.e.

2 定理 1.1 的另一证明

对 $k \geq -1$ 的情形， Brémont ([3]) 在 (3) 中引入了 $\delta(0,k)$ 的定义. 为了采用鞅方法，我们需要延拓 $\delta(0,k)$ 的定义，从 $k \geq -1$ 延拓到整个整数轴，这是我们证明中的关键一步. 直观上，可以看出 $\delta(0,k)$, $k \geq -1$, 实际上是电网中 k 和 k+1 两点之间的电阻. 从这个观点出发，很自然的，我们可把 $\delta(0,k)$ 的定义从 $k \geq -1$ 延拓到整个整数轴如下：

$$\delta(0,k) := \begin{cases} \langle e_1,\ M(k,0)e_1\rangle, & \text{if} \quad k \geq\ 0, \\ \quad 1, & \text{if} \quad k = -1 \\ \langle e_1,\ M(-1,k+1)^{-1}e_1\rangle, & \text{if} \quad k \leq -2, \end{cases} \tag{4}$$

注意到 L 个形如 M^{-1} 的矩阵的乘积具有严格正的元素. 并且我们可以得到当 $k \leq -2$ 时 $\delta(0,k)$ 的一些性质.

命题 2.1 (i) 当 $-L \leq k \leq -2$ 时,

$$\delta(0,k) = 0.$$

(ii) 当 $k < -L$ 时,

$$\frac{1}{C}(T^k\lambda^{-1} \cdots T^{-1}\lambda^{-1}) \leq \delta(0,k) \leq C(T^k\lambda^{-1} \cdots T^{-1}\lambda^{-1}).$$

证 (i) 通过简单计算我们可以得到 M^{-1} 的形式：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ & * & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$ 其中 * 是大于 0 的数.

因此，两个形如 M^{-1} 的矩阵的乘积有以下形式：

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ & * & * & \cdots & * \\ & * & * & \cdots & * \end{pmatrix} \quad \text{其中 } * \text{ 是大于 } 0 \text{ 的数.}$$

因此，当 $-L \le k \le -2$ 时， $|k|$ 个形如 M^{-1} 的矩阵的乘积的左上角的元素总等于 0, 即 $\delta(0,k) = 0$.

(ii) 注意到当 $k < -L$ 时， $\delta(0,k) > 0$. 因为 $MV = \lambda TV$, 定义 $V' := TV$, 则 $M^{-1}V' = \lambda^{-1}T^{-1}V'$. 不妨用 V 来替换 V', 即 $M^{-1}V = \lambda^{-1}T^{-1}V$. 类似于命题 1.1 中刻画 (M,T) 的性质一样，我们也可以得到关于 (M^{-1},T^{-1}) 的一些性质．从而

$$\frac{1}{C}(T^k\lambda^{-1}\cdots T^{-1}\lambda^{-1}) \le \delta(0,k) \le C(T^k\lambda^{-1}\cdots T^{-1}\lambda^{-1}).$$

下面这个引理可参照 Atkinson [2], 将用来证明常返性情形.

引理 2.1 若 $(\Omega,\mathcal{F},\mu,T)$ 是个遍历的动力系统， $\phi \in L^1(\mu)$. 如果 $\int \phi d\mu = 0$, 则 μ-a.e. 存在 $n_i(\omega) \to +\infty$, 使得

$$\sum_{k=0}^{n_i(\omega)-1} \phi(T^k\omega) \to 0,\ i \to +\infty.$$

2.1 构造合适的鞅

对于 $\forall$ 环境 $\omega \in \Omega$, 我们定义

$$f(x,\omega) := \begin{cases} -\sum\limits_{z=-1}^{x-1} \delta(0,z), & x \ge -1, \\ \sum\limits_{z=x}^{-2} \delta(0,z), & x \le -2, \end{cases}$$

约定：当 $s < r$ 时， $\sum\limits_{r}^{s} = 0$. 然后我们有下列重要结论，将在常返性暂留性证明中起着关键作用.

命题 2.2 对任意给定的环境 $\omega \in \Omega$, $f(X_n,\omega)$ 关于测度 P_ω 是一个鞅，其中 X_n 是由 ω 决定的随机游动.

证 为证明 $f(X_n,\omega)$ 是个鞅，即要证明

$$E_\omega[f(X_{n+1},\omega)|\mathcal{F}_n] = f(X_n,\omega).$$

由于马氏性和时齐性，仅需要证明

$$E_\omega^{f(x,\omega)}[f(X_1,\omega)] = f(x,\omega).$$

即，

$$p_1(x)f(x+1,\omega) + \sum_{j=1}^{L} p_{-j}(x)f(x-j,\omega) = f(x,\omega), \tag{5}$$

也即

$$p_1(x)[f(x+1,\omega)-f(x,\omega)]+\sum_{j=1}^{L}p_{-j}(x)[f(x-j,\omega)-f(x,\omega)]=0, \tag{6}$$

通过代入 f 的定义和简单的计算，(6) 等价于

$$\begin{aligned}p_1(x)\delta(0,x)=&(p_{-1}(x)+\cdots+p_{-L}(x))\delta(0,x-1)+\cdots\\&+(p_{-L+1}(n)+p_{-L}(x))\delta(0,x-L+1)+p_{-L}(x)\delta(0,x-L).\end{aligned}$$

由于 (2) 中的定义，只需要证明

$$\delta(0,x)=a_1(x)\delta(0,x-1)+\cdots+a_L(x)\delta(0,x-L). \tag{7}$$

下面我们来证明 (7):

a) 当 $x>-1$ 时,

(a1) 首先考虑 $x=n\geq L$ 时,

$$\begin{aligned}\delta(0,n)&=\langle e_1,M(n,0)e_1\rangle\\
&=\langle e_1,M(n)M(n-1,0)e_1\rangle\\
&=\langle e_1,\left[\begin{pmatrix}a_1(n)&0\cdots0\\1&0\cdots0\\\cdots&\cdots\\0&0\cdots0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&a_2(n)&\cdots0\\0&0&\cdots0\\0&1&\cdots0\\\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots0\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}0\,0\cdots&a_L(n)\\0\,0\cdots&0\\\cdots&\cdots\\0\,0\cdots&0\end{pmatrix}\right]\\
&\quad\cdot M(n-1,0)e_1\rangle\\
&=a_1(n)\delta(0,n-1)+\langle e_1,\begin{pmatrix}0&a_2(n)&\cdots0\\0&0&\cdots0\\0&1&\cdots0\\\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots0\end{pmatrix}M(n-1)\cdot M(n-2,0)e_1\rangle \qquad (8)\\
&\quad+\cdots+\langle e_1,\begin{pmatrix}0\,0\cdots&a_L(n)\\0\,0\cdots&0\\\cdots&\cdots\\0\,0\cdots&0\end{pmatrix}\cdot M(n-1,0)e_1\rangle\\
&=a_1(n)\delta(0,n-1)+\langle e_1,\begin{pmatrix}a_2(n)&0\cdots0\\0&0\cdots0\\1&0\cdots0\\\cdots&\cdots\\0&0\cdots0\end{pmatrix}M(n-2,0)e_1\rangle \qquad (9)\end{aligned}$$

$$+\cdots+\langle e_1,\begin{pmatrix}0\ 0\cdots a_L(n)\\ 0\ 0\cdots\quad 0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ 0\ 0\cdots\quad 0\end{pmatrix}\cdot M(n-1,0)e_1\rangle \tag{10}$$

$$=\cdots\cdots$$

$$=a_1(n)\delta(0,n-1)+a_2(n)\delta(0,n-2)+\cdots+a_L(n)\delta(0,n-L). \tag{11}$$

式子 (11) 是由于对 (8) 中的矩阵连续进行右乘矩阵 M 运算后得到的，这种连续的操作能把 a_i 拖到所属矩阵左上角的位置.

(a2) 当 $-1<x=n<L$ 时，由于命题 2.1.(i), 也可以用类似于上面的方法证明 (7).

b) 当 $x\leq -2$ 时， $x\in\mathbb{Z}$.

整理可得 $\delta(0,x)$ 的形式,

$$\begin{aligned}\delta(0,x)&=\langle e_1,(M_{-1}\cdots M_{x+1})^{-1}e_1\rangle\\&=\langle e_1,M_xM_{x-1}\cdots M_{x-L}(M_{-1}\cdots M_{x-L})^{-1}e_1\rangle\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\delta(0,x-1)&=\langle e_1,(M_{-1}\cdots M_x)^{-1}e_1\rangle\\&=\langle e_1,M_{x-1}\cdots M_{x-L}(M_{-1}\cdots M_{x-L})^{-1}e_1\rangle\end{aligned} \tag{13}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}\delta(0,x-L)&=\langle e_1,(M_{-1}\cdots M_{x-L+1})^{-1}e_1\rangle\\&=\langle e_1,M_{x-L}(M_{-1}\cdots M_{x-L})^{-1}e_1\rangle.\end{aligned} \tag{14}$$

这时我们也可像 (a) 中所采用的方法一样分解 $\delta(0,x)$ 进而得到 (7), 例如

$$\begin{aligned}\delta(0,x)&=\langle e_1,M_x\cdot M_{x-1}\cdots M_{x-L}(M_{-1}\cdots M_{x-L})^{-1}e_1\rangle\\
&=\langle e_1,\left[\begin{pmatrix}a_1(x)\ 0\cdots 0\\ 1\quad 0\cdots 0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ 0\quad 0\cdots 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\ a_2(x)\cdots 0\\ 0\quad 0\quad\cdots 0\\ 0\quad 1\quad\cdots 0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ 0\quad 0\quad\cdots 0\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}0\ 0\cdots a_L(x)\\ 0\ 0\cdots\quad 0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ 0\ 0\cdots\quad 0\end{pmatrix}\right]\right.\\
&\quad\cdot M_{x-1}\cdots M_{x-L}(M_{-1}\cdots M_{x-L})^{-1}e_1\rangle\\
&\vdots\\
&=a_1(x)\delta(0,x-1)+a_2(x)\delta(0,x-2)+\cdots+a_L(x)\delta(0,x-L).\end{aligned}$$

c) 当 $x=-1$ 时，只需要注意到 $\delta(0,-1-L)=\langle e_1,M(-1,-L)^{-1}e_1\rangle=\frac{1}{a_L(-1)}$. 即可证明 (7).

2.2 定理 1.1 的证明

(i) 当 $E\log\lambda<0$ 时. 对足够大的 $x>0$, $f(x,\omega)$ 关于 x 是非增的,

$$\begin{aligned}f(x,\omega)&=-\sum_{z=-1}^{x-1}\delta(0,z)\geq -C\Big(\sum_{z=0}^{x-1}T^z\lambda\cdots T^0\lambda+1\Big)\\&=-C\Big(\sum_{z=0}^{x-1}e^{\sum\limits_{i=0}^{z}\log T^i\lambda}+1\Big)=-C\Big(\sum_{z=0}^{x-1}e^{z(E\log\lambda+o(1))}+1\Big),\end{aligned} \tag{15}$$

μ-a.s. ω, 其中 "$\geq$" 由于命题 1.1, 式子 (15) 是由于 Birkhoff's 遍历定理.

当 $E\log\lambda<0$, $x\to+\infty$ 时，因为 (15) 中的序列是收敛的，则 f 是有下界的．那么，$\exists$ 有限的 $K(\omega)>0$, 使得 μ-a.s. ω,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,\omega)=-K(\omega).$$

同样地，μ-a.s. ω,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x,\omega) &= \lim_{x\to-\infty}\sum_{z=x}^{-2}\delta(0,z)\\
&\geq \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{C}\Big(\sum_{z=x}^{-2}T^{z}\lambda^{-1}\cdots T^{-1}\lambda^{-1}\Big)\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{C}\Big(\sum_{z=x}^{-2}e^{\sum_{i=1}^{z}\log T^{-i}\lambda^{-1}}\Big)\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{C}\sum_{z=x}^{-2}e^{-|z|(E\log\lambda+o(1))} \qquad (16)\\
&= +\infty. \qquad (17)
\end{aligned}$$

由命题 2.2 可知，$f(X_n,\omega)$ 关于测度 P_ω 是个鞅．据鞅收敛定理，$f(X_n,\omega)$, P_ω-a.e. 收敛到一个有限极限，又由于 $f(x,\omega)$ 的显式表达，则 X_n 必定存在一个极限 (也可能是 ∞), $n\to+\infty$, P_ω-a.e., μ-a.e. 我们可断定 $X_n\to+\infty$, P_ω-a.e., μ-a.e. (否则，若 $X_n\to-\infty$, P_ω-a.e., μ-a.e., 这与 (17) 矛盾；若 $X_n\to$ 有限极限，P_ω-a.e., μ-a.e., 这与 (1) 矛盾).

(ii) 当 $E\log\lambda>0$ 时，类似于 (i) 中讨论可证明结论.

(iii) 当 $E\log\lambda=0$ 时，

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x,\omega) &= -\lim_{x\to+\infty}\sum_{z=-1}^{x-1}\delta(0,z)\\
&\leq -\frac{1}{C}\lim_{x\to+\infty}\sum_{z=0}^{x-1}T^{z}\lambda\cdots T^{\lambda}T^{0}\lambda\\
&= -\frac{1}{C}\lim_{x\to+\infty}\sum_{z=0}^{x-1}e^{\sum_{i=0}^{z}\log T^{i}\lambda},
\end{aligned}$$

其中 "$\leq$" 是由于命题 1.1. 由 $E\log\lambda=0$, 据引理 2.1, μ a.e. $\exists\, z(i)\to+\infty$, 使得

$$\sum_{i=1}^{z(i)}\log T^{i}\lambda\to 0,\ \text{as } i\to+\infty.$$

从而，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,\omega)=-\infty$, μ-a.e.. 同样地，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x,\omega)=\infty$, μ-a.e..

对 $\forall A\geq 0$, 定义

$$T:=\inf\{k\geq 0, X_k\geq A\}\ \text{and}\ S:=\inf\{k\geq 0, X_k\leq -A\}.$$

因 $f(X_{n\wedge T},\omega)$ 是鞅，据鞅收敛定理，P_ω-a.e.,

$$f(X_{n\wedge T},\omega)\to \text{ 有限极限},\ n\to\infty.$$

如 (i) 中的讨论，可得， P_ω-a.e., $X_{n\wedge T} \to$ 有限极限， $n \to \infty$. 若 $T = +\infty$, 则， $X_n \to$ 有限极限. 则存在足够大的 n, 使得 $p_j(n)|_{j\in\Lambda} = o$, 这与 (1) 矛盾. 因此 $T < +\infty$. 同样地，$S < +\infty$. 于是， $P_\omega(T < +\infty \text{ and } S < +\infty) = 1$, μ-a.e. 让 $A \to +\infty$, 可得

$$-\infty = \liminf_{n\to\infty} X_n(\omega) < \limsup_{n\to\infty} X_n(\omega) = +\infty,\ P_\omega\text{-a.e.},\ \mu\text{-a.e.}$$

参 考 文 献

[1] Alili S. Asymptotic behavior for random walks in random environments. J Appl Prob, 1999, **36**: 334–349

[2] Atkinson G. Recurrence of co-cycles and random walks. J London Math Soc, 1976, **13**(2): 486–488

[3] Brémont J. On some random walks on $\mathbb{Z}$ in random medium. Ann Probab, 2002, **30**(3): 1266–1312

[4] Durrett R. Probability: Theory and Examples. Thomson, 1991

[5] Hennion H. Limit theorems for products of positive random matrces. Ann Probab, 1997, **25**: 1545–1587

[6] Key E S. Recurrence and transience criteria for random walks in random environments. Ann Probab, 1984, **12**: 529–560

[7] Solomon F. Random walks in random environment. Ann Probab, 1975, **3**: 1–31

[8] Sznitman A. S. Topics in random walks in random environments. School and Conference on Probability Theory, 203–266 (electronic), ICTP Lect Notes, XVII, Abdus Salam Int Cent Theoret Phys, Trieste, 2004

[9] Zeitouni O. Random walks in random environment. LNM 1837, J Picard (Ed.), Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004: 189–312

Alternative Proof for the Recurrence and Transience of Random Walks in Random Environment with Bounded Jumps

Wang Shidong Hong Wenming

(*School of Mathematical Sciences & Laboratory of Mathematics and Complex Systems, Beijing Normal University, Beijing 100875*)

Abstract: We derive a new proof of a recurrence and transience criteria for a class of random walks in random environment with bounded jumps, where the environment is assumed to be stationary and ergodic. Martingale convergence method is used in this paper, comparing the original one (Brémont (2002)) by the method of computing the exit probability.

Key words: Random walks in random environment; Martingale convergence theorem; Recurrence; Transience.

MR(2000) Subject Classification: 60J10; 60J15