学数学与做数学

陈木法

(北京师范大学)

北京师范大学 2009 年
全国优秀数学大学生夏令营
2009 年 8 月 3 日至 6 日

提纲

1. 残数算术
2. 优选法
3. 经济最优化的数学模型
4. **The first (nontrivial) eigenvalue**
   - Criterion and estimates
   - Lifting to the product space

计算公式: 年残数+ 月残数+ 日期 $\equiv ?\ (\mathrm{mod}\ 7)$

2009 年残数: 3

月残数:

0 3 3, 6 1 4; 6 2 5, 0 3 5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
31	28	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31
3	0	3	2	3	2	3	3	2	3	2	3
0	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?

计算公式: 年残数+ 月残数+ 日期 $\equiv ?\ (\mathrm{mod}\ 7)$

2009 年残数: 3

月残数:

0 3 3, 6 1 4; 6 2 5, 0 3 5

1	**2**	3	4	5	6	**7**	**8**	9	10	11	12
31	**28**	31	30	31	30	**31**	**31**	30	31	30	31
3	0	3	2	3	2	3	3	2	3	2	3
0	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?

1. 残数算术: 如何计算星期几(1962–63)?

计算公式: 年残数+ 月残数+ 日期 $\equiv ? \pmod 7$

2009 年残数: 3

月残数:

0 3 3, 6 1 4; 6 2 5, 0 3 5

1	**2**	3	4	5	6	**7**	**8**	9	10	11	12
31	**28**	31	30	31	30	**31**	**31**	30	31	30	31
3↓	0	3	2	3	2	3	3	2	3	2	3
0	→3	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?

1. 残数算术: 如何计算星期几(1962–63)?

计算公式: 年残数+ 月残数+ 日期 $\equiv ?\ (\mathrm{mod}\ 7)$

2009 年残数: 3

月残数:

0 3 3, 6 1 4; 6 2 5, 0 3 5

1	**2**	3	4	5	6	**7**	**8**	9	10	11	12
31	**28**	31	30	31	30	**31**	**31**	30	31	30	31
3	0↓	3	2	3	2	3	3	2	3	2	3
0	3	→3	?	?	?	?	?	?	?	?	?

1. 残数算术: 如何计算星期几(1962–63)?

计算公式: 年残数+ 月残数+ 日期 $\equiv ?\ (\mathrm{mod}\ 7)$

2009 年残数: 3

月残数:

0 3 3, 6 1 4; 6 2 5, 0 3 5

1	**2**	3	4	5	6	**7**	**8**	9	10	11	12
31	**28**	31	30	31	30	**31**	**31**	30	31	30	31
3	0	3↓	2	3	2	3	3	2	3	2	3
0	3	3	→6	?	?	?	?	?	?	?	?

1. 残数算术: 如何计算星期几?

闰年规则: 4年1闰, 100年少1闰, 400年多1闰.

残数算术: 和(积)的残数等于残数的和(积).

$$\begin{aligned} 2009\text{年的年残数} &\equiv 2009-1+502-20+5 \\ &\equiv -91+10 \\ &\equiv 3 \pmod 7. \end{aligned}$$

闰年的年残数: 前 2 个月少 1

9 余数验算法: 三位数 xyz 的残数

$$\equiv x+y+z \pmod 9$$

数论一章: 同余理论. 学, 用, 信心

1. 残数算术: 如何计算星期几?

闰年规则: 4年1闰, 100年少1闰, 400年多1闰.
残数算术: 和(积)的残数等于残数的和(积).

$$\begin{aligned} 2009\text{年的年残数} &\equiv 2009-1+502-20+5 \\ &\equiv -91+10 \\ &\equiv 3 \pmod 7. \end{aligned}$$

闰年的年残数: 前 2 个月少 1

9 余数验算法: 三位数 xyz 的残数

$$\equiv x+y+z \pmod 9)$$

数论一章: 同余理论. 学, 用, 信心

1. 残数算术: 如何计算星期几?

闰年规则: 4年1闰, 100年少1闰, 400年多1闰.
残数算术: 和(积)的残数等于残数的和(积).

$$\begin{aligned}2009\text{年的年残数} &\equiv 2009-1+502-20+5\\ &\equiv -91+10\\ &\equiv 3 \pmod 7.\end{aligned}$$

闰年的年残数: 前 2 个月少 1
9 余数验算法: 三位数 xyz 的残数

$$\equiv x+y+z \pmod 9$$

数论一章: 同余理论. 学, 用, 信心

1. 残数算术: 如何计算星期几?

闰年规则: 4年1闰, 100年少1闰, 400年多1闰.
残数算术: 和(积)的残数等于残数的和(积).

$$\begin{aligned} 2009\text{年的年残数} &\equiv 2009-1+502-20+5 \\ &\equiv -91+10 \\ &\equiv 3 \pmod 7. \end{aligned}$$

闰年的年残数: 前 2 个月少 1
9 余数验算法: 三位数 xyz 的残数

$$\equiv x+y+z \pmod 9$$

数论一章: 同余理论.

学, 用, 信心

1. 残数算术: 如何计算星期几?

闰年规则: 4年1闰, 100年少1闰, 400年多1闰.
残数算术: 和(积)的残数等于残数的和(积).

$$\begin{aligned}
\text{2009年的年残数} &\equiv 2009-1+502-20+5 \\
&\equiv -91+10 \\
&\equiv 3 \pmod 7.
\end{aligned}$$

闰年的年残数: 前 2 个月少 1
9 余数验算法: 三位数 xyz 的残数

$$\equiv x+y+z \pmod 9$$

数论一章: 同余理论. 学, 用, 信心

2. 优选法[Optimization] (1977, 79, 95)

以最好的方法选优.

$$\text{黄金分割常数}: \omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$$

- 定次数: Kiefer, J. (1953, 4+ε 页)
- 无穷远: 华罗庚(1970, 1981).
  洪加威(1973, 74)
- 不定次数: 陈(1977)

2. 优选法[Optimization] (1977, 79, 95)

以最好的方法选优.

$$\text{黄金分割常数}: \omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$$

- 定次数: Kiefer, J. (1953, 4+ε 页)
- 无穷远: 华罗庚(1970, 1981).
  洪加威(1973, 74)
- 不定次数: 陈(1977)

2. 优选法[Optimization] (1977, 79, 95)

以最好的方法选优.

$$\text{黄金分割常数}: \omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$$

- 定次数: Kiefer, J. (1953, 4+ε 页)
- 无穷远: 华罗庚(1970, 1981).
  洪加威(1973, 74)
- 不定次数: 陈(1977)

2. 优选法[Optimization] (1977, 79, 95)

$\mathscr{F}$={f有唯一最大值点 c_f, 在其两边严格单调}

对称策略$\mathscr{P}$: 第 1 试点 $x_1(\mathscr{P})$. $x_1(\mathscr{W}) = \omega$

$\mathscr{P}$的 n 步精度: $\delta(\mathscr{P}, n) = \sup_{f\in\mathscr{F}} |c_f(\mathscr{P}, n) - c_f|$

$c_f(\mathscr{P}, n)$: $\mathscr{P}$ 作用于 f 在第 n 步所得最大值点

$\mathscr{P}$的精度: $\delta(\mathscr{P}) = \sup_{n\geqslant 1} F_{n+1}\delta(\mathscr{P}, n)$,

Fibonacci 数列: $F_0 = F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

定理 (陈, 1977)

$\delta(\mathscr{W}) = \inf_{\mathscr{P}} \delta(\mathscr{P})$.

新概念, 新结果. 贡献

《数学通报》, 1991 年第8期

2. 优选法[Optimization] (1977, 79, 95)

$\mathscr{F}$={f有唯一最大值点 c_f, 在其两边严格单调}

对称策略$\mathscr{P}$: 第 1 试点 $x_1(\mathscr{P})$. $x_1(\mathscr{W}) = \omega$

$\mathscr{P}$的 n 步精度: $\delta(\mathscr{P}, n) = \sup_{f\in\mathscr{F}} |c_f(\mathscr{P}, n) - c_f|$

$c_f(\mathscr{P}, n)$: $\mathscr{P}$ 作用于 f 在第 n 步所得最大值点

$\mathscr{P}$的精度: $\delta(\mathscr{P}) = \sup_{n\geqslant 1} F_{n+1}\delta(\mathscr{P}, n)$,

Fibonacci 数列: $F_0 = F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

定理 (陈, 1977)

$\delta(\mathscr{W}) = \inf_{\mathscr{P}} \delta(\mathscr{P})$.   新概念, 新结果. 贡献

《数学通报》, 1991 年第8期

2. 优选法[Optimization] (1977, 79, 95)

$\mathscr{F}$={f有唯一最大值点 c_f, 在其两边严格单调}

对称策略$\mathscr{P}$: 第 1 试点 $x_1(\mathscr{P})$. $x_1(\mathscr{W}) = \omega$

$\mathscr{P}$的 n 步精度: $\delta(\mathscr{P}, n) = \sup_{f\in\mathscr{F}} |c_f(\mathscr{P}, n) - c_f|$

$c_f(\mathscr{P}, n)$: $\mathscr{P}$ 作用于 f 在第 n 步所得最大值点

$\mathscr{P}$的精度: $\delta(\mathscr{P}) = \sup_{n\geqslant 1} F_{n+1}\delta(\mathscr{P}, n)$,

Fibonacci 数列: $F_0 = F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

定理 (陈, 1977)

$\delta(\mathscr{W}) = \inf_{\mathscr{P}} \delta(\mathscr{P})$. 新概念, 新结果. 贡献

《数学通报》, 1991 年第8期

投入产出法：　$x_n = x_0 A^{-n}, \quad n \geqslant 1,$

$x_n = \left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(d)}\right)$：第$n$年的产综(所关心的产品所构成的行向量)

$A = (a_{ij})$: 结构方阵或消耗系数方阵，表示每生产出一个单位的第 i 类产品需要消耗 a_{ij} 个单位的第 j 类产品.

早在 1968 年, 联合国统计司便将它列为国民经济核算的工具.
我国从 1974 年便开始编制国民经济投入产出表.

3. 经济最优化的数学模型

投入产出法： $x_n = x_0 A^{-n}, \quad n \geqslant 1,$

$x_n = \left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(d)}\right)$：第$n$年的产综(所关心的产品所构成的行向量)

$A = (a_{ij})$: 结构方阵或消耗系数方阵,
表示每生产出一个单位的第 i 类产品需要消耗 a_{ij} 个单位的第 j 类产品.
早在 1968 年, 联合国统计司便将它列为国民经济核算的工具.
我国从 1974 年便开始编制国民经济投入产出表.

定理 (华罗庚, 1984–85)

以u表其最大特征根λ^* 所对应的左特征向量 (必定可取为正的): $uA = \lambda^* u$.

- 如取 $x_0 = u$, 则$x_n = x_0 {\lambda^*}^{-n}$, $n \geqslant 1$. 此时有最快增长速度${\lambda^*}^{-1}$. 称为正特征向量法.
- 如取 $0 < x_0 \neq u$, 则必定存在 n_0 和 j_0 使得 $x_{n_0}^{(j_0)} \leqslant 0$. 此时称经济走向崩溃.

正特征向量法已成为互联网搜索引擎的主要数学工具.

经济稳定性的最优解和崩溃定理

定理 (华罗庚, 1984–85)

以u表其最大特征根λ^* 所对应的左特征向量(必定可取为正的): $uA = \lambda^* u$.

- 如取 $x_0 = u$, 则$x_n = x_0 \lambda^{*-n}$, $n \geq 1$. 此时有最快增长速度λ^{*-1}. 称为正特征向量法.
- 如取 $0 < x_0 \neq u$, 则必定存在 n_0 和 j_0 使得 $x_{n_0}^{(j_0)} \leqslant 0$. 此时称经济走向崩溃.

正特征向量法已成为互联网搜索引擎的主要数学工具.

经济稳定性的最优解和崩溃定理

定理 (华罗庚, 1984–85)

以u表其最大特征根λ^*所对应的左特征向量(必定可取为正的): $uA = \lambda^* u$.

- 如取 $x_0 = u$, 则$x_n = x_0 {\lambda^*}^{-n}$, $n \geqslant 1$. 此时有最快增长速度${\lambda^*}^{-1}$. 称为正特征向量法.
- 如取 $0 < x_0 \neq u$, 则必定存在 n_0 和 j_0 使得 $x_{n_0}^{(j_0)} \leqslant 0$. 此时称经济走向崩溃.

正特征向量法已成为互联网搜索引擎的主要数学工具.

例 [华罗庚]

考虑工、农业两种产品. 取

$$A = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 20 & 14 \\ 40 & 12 \end{pmatrix}.$$

则 $u = (5(\sqrt{2400} + 13)/7, 20)$. 44.34397483. 相应于的不同近似值, 有

x_0	T^{x_0}
$(44, 20)$	?
$(44.344, 20)$	?
$(44.34397483, 20)$	?

例 [华罗庚]

考虑工、农业两种产品. 取

$$A = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 20 & 14 \\ 40 & 12 \end{pmatrix}.$$

则$u = (5(\sqrt{2400}+13)/7, 20)$. 44.34397483. 相应于的不同近似值, 有

x_0	T^{x_0}
$(44, 20)$	3
$(44.344, 20)$	?
$(44.34397483, 20)$	?

例 [华罗庚]

考虑工、农业两种产品. 取

$$A = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 20 & 14 \\ 40 & 12 \end{pmatrix}.$$

则$u = (5(\sqrt{2400}+13)/7, 20)$. 44.34397483. 相应于的不同近似值, 有

x_0	T^{x_0}
$(44, 20)$	3
$(44.344, 20)$	8
$(44.34397483, 20)$	?

例 [华罗庚]

考虑工、农业两种产品. 取

$$A = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 20 & 14 \\ 40 & 12 \end{pmatrix}.$$

则 $u = (5(\sqrt{2400} + 13)/7, 20)$. 44.34397483. 相应于的不同近似值, 有

x_0	T^{x_0}
$(44, 20)$	3
$(44.344, 20)$	8
$(44.34397483, 20)$	13

a_{ij} 以 1/3 的小概率作 1% 的小摄动. 假定诸 $a_{ij}^{(n)}$ $(i, j = 1, 2,\ n \geqslant 1)$ 相互独立. 还是从 $x_0 = (44.344,\ 20)$ 出发,

$$\mathbb{P}[T^{x_0} = n] = \begin{cases} 0, & \text{若 } n = 1, \\ ?, & \text{若 } n = 2, \\ ?, & \text{若 } n = 3. \end{cases}$$

a_{ij} 以 1/3 的小概率作 1% 的小摄动. 假定诸 $a_{ij}^{(n)}$ $(i, j = 1, 2,\ n \geqslant 1)$ 相互独立. 还是从 $x_0 = (44.344,\ 20)$ 出发,

$$\mathbb{P}[T^{x_0} = n] = \begin{cases} 0, & \text{若 } n = 1, \\ ?, & \text{若 } n = 2, \\ ?, & \text{若 } n = 3. \end{cases}$$

3. 经济最优化的数学模型: 随机模型

a_{ij} 以 1/3 的小概率作 1% 的小摄动. 假定诸 $a_{ij}^{(n)}$ $(i, j = 1, 2,\ n \geqslant 1)$ 相互独立. 还是从 $x_0 = (44.344,\ 20)$ 出发,

$$\mathbb{P}[T^{x_0} = n] = \begin{cases} 0, & \text{若 } n = 1, \\ 0.09, & \text{若 } n = 2, \\ ?, & \text{若 } n = 3. \end{cases}$$

3. 经济最优化的数学模型: 随机模型

a_{ij} 以 1/3 的小概率作 1% 的小摄动. 假定诸 $a_{ij}^{(n)}$ $(i, j = 1, 2,\ n \geqslant 1)$ 相互独立. 还是从 $x_0 = (44.344,\ 20)$ 出发,

$$\mathbb{P}[T^{x_0} = n] = \begin{cases} 0, & 若\ n = 1, \\ 0.09, & 若\ n = 2, \\ 0.65, & 若\ n = 3. \end{cases}$$

$$\mathbb{P}[T \leqslant 3] \approx 0.74.$$

3. 经济最优化的数学模型: 随机模型

定理 (陈, 1992; 陈、李勇, 1994)

在适当的条件下, $\mathbb{P}[T^{x_0} < \infty] = 1, \ \forall x_0 > 0.$

经济的敏感性. 依据所具备的客观条件, 有它自身的合理的发展速度. 太快、慢都不好.

如不考虑随机因素, 就会造成很大的失真. 随机数学的运用, 会使问题的解答比决定性的处理更精密而不是更粗糙. 随机矩阵理论待开垦的数学领域

陈、毛永华: 《随机过程导论》, 高教, 2007

3. 经济最优化的数学模型: 随机模型

定理 (陈, 1992; 陈、李勇, 1994)

在适当的条件下, $\mathbb{P}[T^{x_0} < \infty] = 1, \ \forall x_0 > 0.$

经济的敏感性. 依据所具备的客观条件, 有它自身的合理的发展速度. 太快、慢都不好. 如不考虑随机因素, 就会造成很大的失真. 随机数学的运用, 会使问题的解答比决定性的处理更精密而不是更粗糙. 随机矩阵理论

待开垦的数学领域

陈、毛永华:《随机过程导论》, 高教, 2007

3. 经济最优化的数学模型: 随机模型

定理 (陈, 1992; 陈、李勇, 1994)

在适当的条件下, $\mathbb{P}[T^{x_0} < \infty] = 1, \ \forall x_0 > 0.$

经济的敏感性. 依据所具备的客观条件, 有它自身的合理的发展速度. 太快、慢都不好.

如不考虑随机因素, 就会造成很大的失真. 随机数学的运用, 会使问题的解答比决定性的处理更精密而不是更粗糙. 随机矩阵理论

待开垦的数学领域

陈、毛永华: 《随机过程导论》, 高教, 2007

4. The first (nontrivial) eigenvalue

Consider the tridiagonal (birth-death) matrix Q:

$$Q = \begin{pmatrix} -b_0 & b_0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_1 & -(a_1+b_1) & b_1 & 0 & \cdots \\ 0 & a_2 & -(a_2+b_2) & b_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$a_i > 0, \quad b_i > 0.$$

$Q\mathbb{1} = 0 \cdot \mathbb{1}$. Trivial eigenvalue: $\lambda_0 = 0$.
Next eigenvalue of $-Q$: $\lambda_1 =?$

The simplest case: two points

$$Q = \begin{pmatrix} -b_0 & b_0 \\ a_1 & -a_1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = a_1 + b_0, \quad P_t := e^{tQ}$$

$$P_t = \frac{1}{a_1 + b_0} \begin{pmatrix} a_1 + b_0 e^{-\lambda_1 t} & b_0 \left[1 - e^{-\lambda_1 t}\right] \\ a_1 \left[1 - e^{-\lambda_1 t}\right] & b_0 + a_1 e^{-\lambda_1 t} \end{pmatrix},$$

$$\pi_0 = \frac{a_1}{a_1 + b_0}, \quad \pi_1 = \frac{b_0}{a_1 + b_0} \qquad \boxed{\pi P_t = \pi}$$

$$|p_{ij}(t) - \pi_j| \leqslant \text{Constant} \times e^{-\varepsilon_{\max} t}, \qquad i, j = 0, 1.$$

$$\mu_0 = 1, \quad \mu_i = \frac{b_0 b_1 \cdots b_{i-1}}{a_1 a_2 \cdots a_i}, \quad i \geqslant 1.$$

$$Z = \sum_i \mu_i < \infty, \qquad \pi_i = \mu_i / Z.$$

The simplest case: two points

$$Q = \begin{pmatrix} -b_0 & b_0 \\ a_1 & -a_1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = a_1 + b_0, \quad P_t := e^{tQ}$$

$$P_t = \frac{1}{a_1 + b_0} \begin{pmatrix} a_1 + b_0 e^{-\lambda_1 t} & b_0 \left[1 - e^{-\lambda_1 t}\right] \\ a_1 \left[1 - e^{-\lambda_1 t}\right] & b_0 + a_1 e^{-\lambda_1 t} \end{pmatrix},$$

$$\pi_0 = \frac{a_1}{a_1 + b_0}, \quad \pi_1 = \frac{b_0}{a_1 + b_0} \qquad \boxed{\pi P_t = \pi}$$

$$|p_{ij}(t) - \pi_j| \leqslant \text{Constant} \times e^{-\varepsilon_{\max} t}, \qquad i, j = 0, 1.$$

$$\mu_0 = 1, \quad \mu_i = \frac{b_0 b_1 \cdots b_{i-1}}{a_1 a_2 \cdots a_i}, \quad i \geqslant 1.$$

$$Z = \sum\nolimits_i \mu_i < \infty, \qquad \pi_i = \mu_i / Z.$$

L^2-exponential convergence

Semigroup $P_t = e^{tQ}$. $\quad L^2(\pi), \|\cdot\|, (\cdot,\cdot)$.

Q self-adjoint: $(f, Qg) = (Qf, g)$.

$$\mathrm{Var}(P_t f) \leqslant \mathrm{Var}(f) e^{-2\lambda_1 t}, \quad \boxed{\varepsilon_{\max} \overset{\text{Chen, 1991}}{=} \lambda_1}$$

i.e. $\|P_t f - \pi(f)\| \leqslant \|f - \pi(f)\| e^{-\lambda_1 t}$

or $\|P_t - \pi\|_{2\to 2} \leqslant e^{-\lambda_1 t}, \quad \pi(f) := \int f \mathrm{d}\pi$

$$\lambda_1 = \inf\{(f, -Qf) : \pi(f) = 0, \|f\| = 1\}.$$

λ_1: the first non-trivial eigenvalue of $-Q$.

Example (The difficulty of the problem)

Four points. Six parameters: $b_0, b_1, b_2, a_1, a_2, a_3$.

$$\lambda_1 = \frac{D}{3} - \frac{C}{3 \cdot 2^{1/3}} + \frac{2^{1/3}\ \left(3\,B - D^2\right)}{3\,C},$$

where

$$D = a_1 + a_2 + a_3 + b_0 + b_1 + b_2,$$

$$B = a_3\,b_0 + a_2\ \left(a_3 + b_0\right) + a_3\,b_1 + b_0\,b_1 + b_0\,b_2 + b_1\,b_2 + a_1\ \left(a_2 + a_3 + b_2\right),$$

$$C = \left(A + \sqrt{4\left(3\,B - D^2\right)^3 + A^2}\right)^{1/3},$$

Example (The difficulty of the problem)

$$A = -2a_1^3 - 2a_2^3 - 2a_3^3 + 3a_3^2b_0 + 3a_3b_0^2 - 2b_0^3 + 3a_3^2b_1 - 12a_3b_0b_1 + 3b_0^2b_1 + 3a_3b_1^2 + 3b_0b_1^2 - 2b_1^3 - 6a_3^2b_2 + 6a_3b_0b_2 + 3b_0^2b_2 + 6a_3b_1b_2 - 12b_0b_1b_2 + 3b_1^2b_2 - 6a_3b_2^2 + 3b_0b_2^2 + 3b_1b_2^2 - 2b_2^3 + 3a_1^2(a_2 + a_3 - 2b_0 - 2b_1 + b_2) + 3a_2^2[a_3 + b_0 - 2(b_1 + b_2)] + 3a_2\left[a_3^2 + b_0^2 - 2b_1^2 - b_1b_2 - 2b_2^2 - a_3(4b_0 - 2b_1 + b_2) + 2b_0(b_1 + b_2)\right] + 3a_1\left[a_2^2 + a_3^2 - 2b_0^2 - b_0b_1 - 2b_1^2 - a_2(4a_3 - 2b_0 + b_1 - 2b_2) + 2b_0b_2 + 2b_1b_2 + b_2^2 + 2a_3(b_0 + b_1 + b_2)\right].$$

Perturbation of eigenvalues and eigenfunctions

How about the estimation of λ_1?

$b_i\ (i \geqslant 0)$	$a_i\ (i \geqslant 1)$	λ_1	degree of g
$i+\beta$ $(\beta > 0)$	$2i$	1	1
$i+1$	$2i+3$	2	2
$i+1$	$2i+(4+\sqrt{2})$	3	3

g: eigenfunction of λ_1.

Outline

1. 残数算术
2. 优选法
3. 经济最优化的数学模型
4. **The first (nontrivial) eigenvalue**
   - Criterion and estimates
   - Lifting to the product space

Theorem (Criterion and estimates)

- Criterion: $(4\delta)^{-1} \leqslant \lambda_1 \leqslant Z\delta^{-1}$,
- Estimates: $\eta_n^{-1} \leqslant \lambda_1 \leqslant \bar{\eta}_n^{-1}$, $\quad 1 \leqslant \eta_1/\bar{\eta}_1 \leqslant 2$

$$\delta = \sup_{n\in E} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\mu_j a_j} \sum_{j=n}^{N} \mu_j, \quad E := \{i : 1 \leqslant i < N+1\}$$

$$\eta_1 = \sup_{i\in E} \left(\sqrt{\varphi_i} + \sqrt{\varphi_{i-1}}\right) \left[\psi_i - \psi_1 \frac{\mu[i,N]}{\mu[0,N]}\right]$$

$$\bar{\eta}_1 = \sup_{m\in E} \frac{1}{\varphi_m} \left[\sum_{k\in E} \mu_k \varphi_{k\wedge m}^2 - \frac{1}{Z}\left[\sum_{k\in E} \mu_k \varphi_{k\wedge m}\right]^2\right]$$

Theorem (Criterion and estimates)

- Criterion: $(4\delta)^{-1} \leqslant \lambda_1 \leqslant Z\delta^{-1}$,
- Estimates: $\eta_n^{-1} \leqslant \lambda_1 \leqslant \bar{\eta}_n^{-1}$, $1 \leqslant \eta_1/\bar{\eta}_1 \leqslant 2$

$$\delta = \sup_{n\in E} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\mu_j a_j} \sum_{j=n}^{N} \mu_j, \quad E := \{i : 1 \leqslant i < N+1\}$$

$$\mu[n,m] = \sum\nolimits_{j=n}^{m} \mu_j, \qquad Z = \mu[0,N]$$

$$\varphi_i = \sum\nolimits_{j=1}^{i} (\mu_j a_j)^{-1}, \qquad \psi_i = \sum\nolimits_{j=i}^{N} \mu_j \sqrt{\varphi_j}.$$

《数学通报》, 2002年第8期. 美, 迷人

Outline

1. 残数算术
2. 优选法
3. 经济最优化的数学模型
4. The first (nontrivial) eigenvalue
   - Criterion and estimates
   - Lifting to the product space

Lifting to the product space

Example (Normal distribution)

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}.$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)/2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

use the polar coordinate system,

due to Simón-Denis Poisson (1781–1840).

$$\text{Lifting}: \quad \mathrm{d}x \longrightarrow \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Lifting to the product space

Example (Normal distribution)

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}.$$

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

use the polar coordinate system,

due to Simón-Denis Poisson (1781–1840).

$$\text{Lifting}: \quad \mathrm{d}x \longrightarrow \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Lifting to the product space $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L^p(\mu)}$

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p\|g\|_q, \quad p>1,\ p^{-1}+q^{-1}\geqslant 1,$$
$$\|fg\|_1 \geqslant \|f\|_p\|g\|_q, \quad p<1,\ p^{-1}+q^{-1}\leqslant 1.$$

Example [FKG-inequality, 1971] 正相关

$$f, g \uparrow \ +? \implies \int_{\mathbb{R}} fg\,\mathrm{d}\mu \geqslant \int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}\mu \int_{\mathbb{R}} g\,\mathrm{d}\mu.$$

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} [f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]\mu(\mathrm{d}x)\mu(\mathrm{d}y) \geqslant 0.$$

$\mu \longrightarrow \mu\times\mu.$ (Independent coupling)

Lifting to the product space $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L^p(\mu)}$

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p\|g\|_q, \quad p > 1,\ p^{-1} + q^{-1} \geqslant 1,$$
$$\|fg\|_1 \geqslant \|f\|_p\|g\|_q, \quad p < 1,\ p^{-1} + q^{-1} \leqslant 1.$$

Example [FKG-inequality, 1971] 正相关

$$f, g \uparrow \ +? \implies \int_{\mathbb{R}} fg\mathrm{d}\mu \geqslant \int_{\mathbb{R}} f\mathrm{d}\mu \int_{\mathbb{R}} g\mathrm{d}\mu.$$

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} [f(x) - f(y)][g(x) - g(y)]\mu(\mathrm{d}x)\mu(\mathrm{d}y) \geqslant 0.$$

$\mu \longrightarrow \mu \times \mu.$ (Independent coupling)

Lifting to the product space $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L^p(\mu)}$

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p\|g\|_q, \quad p>1,\ p^{-1}+q^{-1}\geqslant 1,$$
$$\|fg\|_1 \geqslant \|f\|_p\|g\|_q, \quad p<1,\ p^{-1}+q^{-1}\leqslant 1.$$

Example [FKG-inequality, 1971] 正相关

$$f, g\uparrow \ +? \implies \int_{\mathbb{R}} fg\,\mathrm{d}\mu \geqslant \int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}\mu \int_{\mathbb{R}} g\,\mathrm{d}\mu.$$

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} [f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]\mu(\mathrm{d}x)\mu(\mathrm{d}y) \geqslant 0.$$

$\mu \longrightarrow \mu\times\mu.$ (Independent coupling)

For Further Reading I

- 华罗庚.
  华罗庚科普著作选集.
  上海教育出版社, 1984.
- 华罗庚.
  优选学.
  科学出版社, 1981.

For Further Reading II

- M.F. Chen.
  Eigenvalues, Inequalities, and Ergodic Theory.
  Springer, 2005.

- M.F. Chen.
  Ergodic Convergence Rates of Markov Processes — Eigenvalues, Inequalities and Ergodic Theory. Book[4]
  http://math.bnu.edu.cn/~chenmf, 2001–.

The end!

谢谢大家！

53