

从三对角矩阵谈起

陈木法

2021年江苏省研究生暑期学校
— 科学计算与大数据分析

2021年8月2日

提纲

- 生灭 Q 矩阵与复三对角矩阵
可配称, 可厄米, 量子力学新架构
- 生灭 Q 矩阵. 四边界的主特征值
基本估计, 一维椭圆算子, 新谱论
- 四边界的 Hardy 型不等式
Poincaré 不等式, Hardy 型不等式.
- 大矩阵特征对算例.

三对角矩阵 $E = \{k \in \mathbb{Z}_+ : 0 \leq k < N + 1\}$

$$\begin{array}{l}
 \text{血} \\
 T \\
 Q \\
 \text{缘}
 \end{array}
 = \begin{pmatrix}
 -c_0 & b_0 & & & 0 \\
 a_1 & -c_1 & b_1 & & \\
 & a_2 & -c_2 & b_2 & \\
 & & \ddots & \ddots & b_{N-1} \\
 0 & & & a_N & -c_N
 \end{pmatrix},$$

T : $(a_k), (b_k), (c_k)$: 三个复序列. 生灭

Q : $a_k > 0, b_k > 0, c_k = a_k + b_k, c_N \geq a_N$.

$$\mu_0 = 1, \mu_n = \mu_{n-1} \frac{b_{n-1}}{a_n} \Leftrightarrow \mu_n a_n = \mu_{n-1} b_{n-1}$$

$N \leq \infty$.

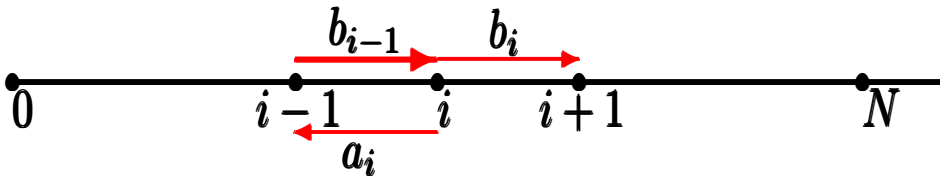
算法

特征

生灭 Q 矩阵

$$Q \sim (a_k, -c_k, b_k) \rightarrow A = (a_{ij})$$

$$b_i \rightarrow a_{i,i+1} \text{ (生)}, \quad a_i \rightarrow a_{i,i-1} \text{ (灭)}.$$



定义

生灭的推广

称**实**矩阵 $A = (a_{ij})$ **可配称**, 如存在正序列[测度] $\mu = (\mu_i)$ 使 $\mu_i a_{ij} = \mu_j a_{ji}$

$\forall i, j$. (a_{ij}) 非对称但配上 μ 后的 $(\mu_i a_{ij})$ 对称. a_{ii}

可配称与可厄米

如 A 几乎非负: 侯振挺 & 陈 1979.
[书见陈主页]. 设 $N = \infty$, 如 $\mu_k \equiv 1$,
则无平衡态统计物理: Gibbs. 系统灭绝,
概率论大多无用. 北师大群体**进入统计物理**、走向世界的敲门砖.

定义

可配称的推广. 在 $L^2(\mu)$ 上自伴

称**复**矩阵 $A = (a_{ij})$ **可厄米**, 如存在正
序列[测度] $\mu = (\mu_i)$ 使得

a_{ii} 为实数

$$\mu_i a_{ij} = \mu_j \bar{a}_{ji} \quad \forall i, j.$$

零同性, 比值正

可厄米判准

定理 (陈 2018. 进入量子力学)

复 T 可厄米当且仅当 (1) (c_k) 为实;
(2) 或者 $a_{k+1} & b_k = 0$ 或者 $a_{k+1} b_k > 0$;
两条件同时成立. 此时,

$$\mu_0 = 1, \quad \mu_n = \mu_{n-1} \frac{b_{n-1}}{\bar{a}_n}$$

C.G.J. Jacobi
1846. 175 年

$$= \mu_0 \prod_{k=1}^n \frac{b_{k-1}}{\bar{a}_k}.$$

定理 (陈 2018. 进入量子力学)

复 A 可厄米 \iff 下述两条件同时成立

- (1) 对于每一对 i, j , 或者 $a_{ij} \& a_{ji} = 0$
或者 $a_{ij} a_{ji} > 0 \left(\iff \frac{\bar{a}_{ij}}{a_{ji}} = \frac{a_{ij}}{\bar{a}_{ji}} > 0 \right)$.

$$\left[\text{注: } \frac{\alpha}{\bar{\beta}} = \frac{\alpha\beta}{|\beta|^2}. \quad (1) \Rightarrow a_{ii} \text{ 为实} \right]$$

- (2) 圈形条件.

解释条件 (2). 核心问题: 求 $\mu = ?$

固定路: $i_0 \rightarrow \cdots \rightarrow i_{n-1} \rightarrow i_n$, $a_{i_k i_{k+1}} \neq 0$.

沿此路把 $\{\mu_{i_k}\}_{k=1}^n$ 算出来. 暂设 $\{i_k\}$

互不相同. 类似于生灭情形

$k-1 \rightarrow k$: b_{k-1} , $i_{k-1} \rightarrow i_k$: $a_{i_{k-1} i_k}$

$k \rightarrow k-1$: \bar{a}_k , $i_k \rightarrow i_{k-1}$: $\bar{a}_{i_k i_{k-1}}$

$$\mu_n = \mu_{n-1} \frac{b_{n-1}}{\bar{a}_n} \implies \mu_{i_n} = \mu_{i_{n-1}} \frac{a_{i_{n-1} i_n}}{\bar{a}_{i_n i_{n-1}}}$$

$$\prod_{k=1}^n \frac{a_{i_{k-1} i_k}}{\bar{a}_{i_k i_{k-1}}} = \frac{\mu_{i_n}}{\mu_{i_0}}$$

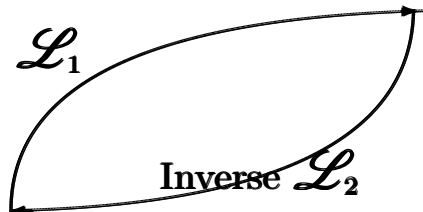
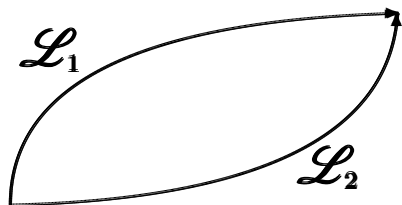
算法只需 $i_k \neq i_{k-1}$

圈形条件: $i_n = i_0 \implies$ 右方 = 1.

顺时积 = 反时积

路经无关性 = 圈形条件. μ 的算法

有限马链: Kolmogorov 1936, 源于 Schrödinger 1931. 幸运. 无知者无畏.
为使 μ 的定义无歧义, 需路经无关性.



左图: 从 i_0 到 $i_{\#}$ 的两条路 \mathcal{L}_1 和 \mathcal{L}_2 .

右图: 将 \mathcal{L}_1 与反向的 \mathcal{L}_2 合并得出闭路.
由此导出圈形条件.

路经无关性与保守场论[侯、陈 1979]

$$\prod_{k=1}^n \frac{a_{i_{k-1}i_k}}{\bar{a}_{i_k i_{k-1}}} = \frac{a_{i_0 i_1}}{\bar{a}_{i_1 i_0}} \frac{a_{i_1 i_2}}{\bar{a}_{i_2 i_1}} \cdots \frac{a_{i_{n-1} i_n}}{\bar{a}_{i_n i_{n-1}}} = \frac{\mu_{i_n}}{\mu_{i_0}}.$$

$$\sum_{k=1}^n \log \frac{a_{i_{k-1}i_k}}{\bar{a}_{i_k i_{k-1}}} = \log \mu_{i_n} - \log \mu_{i_0}.$$

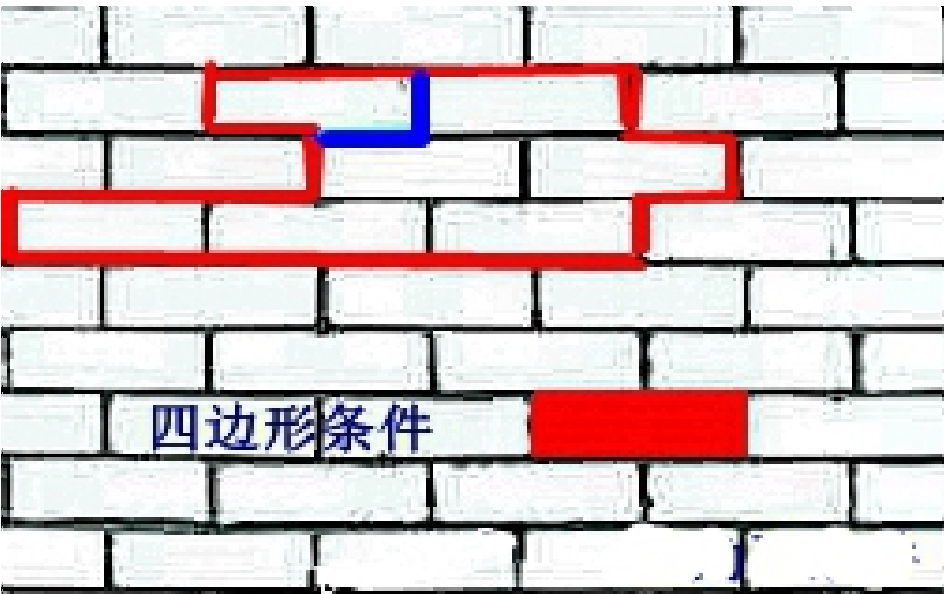
左边: 沿路 $i_0 \rightarrow \cdots \rightarrow i_n$ 所做功;

右边: 起点 i_0 和终点 i_n 的势差.

保守场: 沿任何闭路所做的功为零.

可能有无穷多闭路!

只需验证: 无往返的最小闭路



定理 (陈 2018. 等谱定理)

Jacobi 矩阵 T 等谱于某生灭矩阵. 后者可用 (c_k) 和 $(a_{k+1}b_k)$ 显式表出.

定理 (陈 2018. 等谱定理)

有限可厄米矩阵 A 的谱等于 m 个生灭矩阵的谱之并, 其中 m 为 A 的特征值的最大重数.

量子力学的新架构、新谱论、新算法

可厄米 $T \sim (a_k, -c_k, b_k)$ 等谱于生灭 \tilde{Q}

$$c_k \geq |a_k| + |b_k|, u_k = a_k b_{k-1} > 0.$$

$$\begin{cases} \tilde{c}_k \equiv c_k; \\ \tilde{b}_k = c_k - u_k / \tilde{b}_{k-1}, \tilde{b}_0 = c_0; \\ \tilde{a}_k = c_k - \tilde{b}_k, k < N; \quad \tilde{a}_N = u_N / \tilde{b}_{N-1}. \end{cases}$$

推移. $N \leq \infty$

\tilde{Q} 的主特征向量. DD: 凹, 余者严单调
复可厄米 T , 若非实, 则因 T 有实谱

$$Tg = \lambda g \Rightarrow g \text{ 为复.}$$

T 和 \tilde{Q} 的主特征向量本质不同. 新谱论

$$\text{显式 } u_k := a_k b_{k-1} = |a_k b_{k-1}| \ \& \ c_k$$

$$\tilde{b}_k = c_k - \frac{u_k}{c_{k-1} - \frac{u_{k-1}}{c_{k-2} - \frac{u_{k-2}}{\ddots - \frac{u_2}{c_2 - \frac{u_1}{c_1 - \frac{u_1}{c_0}}}}}}$$

$$1 \leq k < N, \quad \tilde{b}_0 = c_0.$$

两列. 三证明: 原证 2018, 两新证 2020.

生灭 Q 矩阵. 主特征值估计. 例子

状态空间 $E = \{0, 1, \dots, N\}$, $N \leq \infty$.

$c_k \equiv a_k + b_k$. $a_0 = 0$, $b_N = 0$ 如 $N < \infty$

特征方程: $Qg = -\lambda g$, $g \neq 0$.

因 $Q\mathbf{1} = 0 \cdot \mathbf{1}$. 有平凡特征值: $\lambda_0 = 0$.

下一个(第一非平凡)特征值: $\lambda_1 = ?$

例 (两点、两参数)

$$\begin{pmatrix} -b & b \\ a & -a \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = a + b.$$

生灭 Q 矩阵. 例子

例 (四点、六参数 $b_0, b_1, b_2, a_1, a_2, a_3$)

$$\lambda_1 = \frac{D}{3} - \frac{C}{3 \cdot 2^{1/3}} + \frac{2^{1/3} (3B - D^2)}{3C},$$

$$D = a_1 + a_2 + a_3 + b_0 + b_1 + b_2,$$

$$B = a_3 b_0 + a_2 (a_3 + b_0) + a_3 b_1 + b_0 b_1, \\ + b_0 b_2 + b_1 b_2 + a_1 (a_2 + a_3 + b_2),$$

$$C = \left(A + \sqrt{4(3B - D^2)^3 + A^2} \right)^{1/3},$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} = & -2a_1^3 - 2a_2^3 - 2a_3^3 + 3a_3^2b_0 + 3a_3b_0^2 - 2b_0^3 \\
& + 3a_3^2b_1 - 12a_3b_0b_1 + 3b_0^2b_1 + 3a_3b_1^2 + 3b_0b_1^2 \\
& - 2b_1^3 - 6a_3^2b_2 + 6a_3b_0b_2 + 3b_0^2b_2 + 6a_3b_1b_2 \\
& - 12b_0b_1b_2 + 3b_1^2b_2 - 6a_3b_2^2 + 3b_0b_2^2 + 3b_1b_2^2 \\
& - 2b_2^3 + 3a_1^2(a_2 + a_3 - 2b_0 - 2b_1 + b_2) \\
& + 3a_2^2[a_3 + b_0 - 2(b_1 + b_2)] + 3a_2[a_3^2 + b_0^2 \\
& - 2b_1^2 - b_1b_2 - 2b_2^2 - a_3(4b_0 - 2b_1 + b_2) \\
& + 2b_0(b_1 + b_2)] + 3a_1[a_2^2 + a_3^2 - 2b_0^2 - b_0b_1 \\
& - 2b_1^2 - a_2(4a_3 - 2b_0 + b_1 - 2b_2) + 2b_0b_2 \\
& + 2b_1b_2 + b_2^2 + 2a_3(b_0 + b_1 + b_2)].
\end{aligned}$$

五点输出 17 页. 看不出诸参数对于 λ_1 的贡献. 完全糊涂掉! ≥ 6 点不可解!

特征值与特征函数的摄动. $N = \infty$

λ_1 及其特征函数 g : $-Qg = \lambda_1 g$, $g \neq 0$.

| b_i ($i \geq 0$) | a_i ($i \geq 1$) | λ_1 | g 次数 |
|--------------------------------|-----------------------|-------------|--------|
| $i + \beta$ ($\beta > 0$) | $2i$ | 1 | 1 |
| $i + 1$ | $2i + 3$ | 2 | 2 |
| $i + 1$ | $2i + (4 + \sqrt{2})$ | 3 | 3 |

特征对**极敏感**! 估计 λ_1 乃**高难度**.

生灭 Q 矩阵. 四边界情形的主特征值

空间 $\{0, 1, \dots, N\}$, $N \leq \infty$. 第一非平凡

特征方程: $Qg = -\lambda g$, $g \neq 0$.

四种边界. 使用代码 'D' 和 'N'. $\lambda^\#$

D: (吸收) Dirichlet 边界 $g_0 = 0$ ($g_{N+1} = 0$).

N: (反射) Neumann 边界 $g_0 = g_{-1}$ ($g_N = g_{N+1}$).

- **NN:** 两 endpoint $0, N$ 上 Neumann 边界.
- **DD:** 两 endpoint $0, N$ 上 Dirichlet 边界.
- **DN:** 0 : Dirichlet; N : Neumann.
- **ND:** 0 : Neumann; $N + 1$: Dirichlet.

基本估计 $(4\kappa^\#)^{-1} \leq \lambda^\# \leq (\kappa^\#)^{-1}$, 其中

$$\kappa^{\text{NN}} = \sup_{m < n} \frac{\hat{\nu}[m, n-1]}{\mu[0, m]^{-1} + \mu[n, N]^{-1}}$$

$$\kappa^{\text{DD}} = \sup_{m \leq n} \frac{\mu[m, n]}{\hat{\nu}[1, m]^{-1} + \hat{\nu}[n, N]^{-1}}$$

$$\kappa^{\text{DN}} = \sup_{1 \leq n \leq N} \hat{\nu}[1, n] \mu[n, N]$$

$$\kappa^{\text{ND}} = \sup_{0 \leq n \leq N} \mu[0, n] \hat{\nu}[n, N]$$

1999, $\hat{\nu}_k = (\mu_k a_k)^{-1}$, $\mu_{k+1} a_{k+1} = \mu_k b_k$

仅用两测度 μ 和 $\hat{\nu}$ 表出. 普通常数因子 4

ND 情形. 对偶变分公式逼近程序

$$\Pi_i(f) = \frac{1}{f_i} \sum_{j=i}^N \frac{1}{\mu_j b_j} \sum_{k \leq j} \mu_k f_k, \quad \mathcal{F}_\Pi = \{f : f > 0\}.$$

定理 (陈, 2010. 进入特征值数值计算)

- 对偶变分公式 [三个之一]

$$\begin{aligned} \inf_{f \in \tilde{\mathcal{F}}_\Pi} \sup_{i \in \text{supp}(f)} \Pi_i(f)^{-1} \\ = \lambda_0 = \sup_{f \in \mathcal{F}_\Pi} \inf_{i \in E} \Pi_i(f)^{-1}. \end{aligned}$$

- 逼近程序、序列 $\exists \{\delta_n\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{\delta'_n\}_{n=1}^\infty$ 使得

$$\lambda_0 \uparrow \delta_n^{-1} \geq (4\kappa^{\text{ND}})^{-1}, \quad (\kappa^{\text{ND}})^{-1} \geq \delta'_n^{-1} \downarrow \lambda_0.$$

关键点：主特征向量简单

主特征向量特性

- **DD**: 凹(上凸), 顶点两边严格单调;
- **NN**: 从负到正, 严格单调上升;
- **DN**: 从零开始, 严格单调上升;
- **ND**: 从正开始, 严格单调下降至零.

随后将讨论的一维连续情形同样有这四类边界, 所述结果适用于离散情形.

从生灭到反应扩散(非平衡物理)

Q 矩阵 $Q = (q_{ij})$: 非对角元素非负, 行和为零.

算子 Q: $Qf(i) = \sum_j q_{ij}(f_j - f_i)$, $i \in E$ (可数集).

定理 (Feller, Reuter 1957) Q 半群 $\{e^{tQ}\}_{t \geq 0}$ 唯一
 \iff 方程 $Qu = 0$, $0 \leq u \leq 1$ 仅有零解.

给定两个生灭矩阵: Q_x 和 Q_y . 定义 $\Omega_r = Q_x + Q_y$.

再定义 Ω_d : x 与 y 之间的扩散(移民). 得出

反应扩散 $\Omega = \Omega_r + \Omega_d$ (反应+扩散). **人口模型**.

将 Ω 与生灭 Q 比较: Yan&C. ('83); C. ('85) (1986).

陈专著(1992, 2004), 定理 2.25; 第 4 部分; **无穷维**

陈专著(2005), 第 9 章.

C.(2015) Applied Probab & Statis 31(2)

一维椭圆算子. $E := (-M, N)$, $M, N \leq \infty$

$$L = a(x) \frac{d^2}{dx^2} + b(x) \frac{d}{dx}, \quad C(x) = \int_{\theta}^x \frac{b}{a}$$

$$\mu(dx) = \frac{e^{C(x)}}{a(x)} dx, \quad \hat{\nu}(dx) = e^{-C(x)} dx$$

$$L = \frac{d}{d\mu} \frac{d}{d\hat{\nu}} [f = a e^{-C} (f' e^C)'], \quad L^* = \frac{d}{d\hat{\nu}} \frac{d}{d\mu}$$

$$D: f(N) = 0, \quad N: f'(N) = 0.$$

$$\mu(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \mu(dx), \quad \hat{\nu}(\alpha, \beta).$$

定理 (陈, 2012)

基本估计 $(4\kappa^\#)^{-1} \leq \lambda^\# \leq (\kappa^\#)^{-1}$, 其中

$$\kappa^{\text{NN}} = \sup_{x < y} \frac{\hat{\nu}(x, y)}{\mu(-M, x)^{-1} + \mu(y, N)^{-1}}$$

$$\kappa^{\text{DD}} = \sup_{x < y} \frac{\mu(x, y)}{\hat{\nu}(-M, x)^{-1} + \hat{\nu}(y, N)^{-1}}$$

$$\kappa^{\text{DN}} = \sup_{x \in (-M, N)} \hat{\nu}(-M, x) \mu(x, N)$$

$$\kappa^{\text{ND}} = \sup_{x \in (-M, N)} \mu(-M, x) \hat{\nu}(x, N).$$

仅用两测度 μ 和 $\hat{\nu}$ 表出. 普适常数 4.

三大武器

- **耦合** (coupling) **三步曲**:
 - 统计: Copula
 - a) 马氏耦合; 动力系统: Joining
 - b) 最优马氏耦合; Wasserstein distance
 - c) 距离关于耦合的优化.
“Chen's coupling and distance argument”
- **对偶**(duality)技术. 例: L 与 L^* .
- **容度** (capacity) 方法.

$P_t = e^{tL}$ 的指数式稳定性速度

$$\|P_t f - \pi(f)\| \leq \|f - \pi(f)\| e^{-\lambda^{\text{NN}} t},$$

$$\pi = \mu / \mu(E),$$

$$\|P_t f\| \leq \|f\| e^{-\lambda^{\#} t}, \quad \boxed{\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2(\mu)}}$$

$$t \geq 0, f \in L^2(\mu).$$

- λ^{NN} : L^2 指数式遍历速度.
- 其它 $\lambda^{\#}$: L^2 指数式衰减速率.

从一维到高维

耦合方法: 欧氏空间椭圆算子谱隙

耦合方法: 紧黎曼流形第一特征值下界

重积分化为累次积分. φ^4 模型精确解.

- C. & F.Y. Wang (1997). Trans. AMS 349:3, 1239–1267.
- C. & F.Y. Wang (1997). Sci. Sin. 27:1 (Chin. Ed.), 40:4 (Eng. Ed.)
- C. (2008). Acta Math. Sin. New Ser. 24:5, 705–736. (3.3) 式.

Poincaré & Hardy 型不等式

$$E = [-M, N], \quad M, N \leq \infty$$

$$\pi = \frac{\mu}{\mu[-M, N]}$$

$$L = a(x) \frac{d^2}{dx^2} + b(x) \frac{d}{dx}, \quad C(x) = \int_{\theta}^x \frac{b}{a},$$

$$\mu(dx) = \frac{e^{C(x)}}{a(x)} dx, \quad \nu(dx) = e^{C(x)} dx.$$

Poincaré 不等式: $\lambda^{NN} \|f - \pi(f)\|_{L^2(\mu)} \leq \|f'\|_{L^2(\nu)}$.

Hardy 型不等式: $\|f - \pi(f)\|_{L^q(\mu)} \leq A \|f'\|_{L^p(\nu)}$,

$$p, q \in (1, \infty).$$

非线性, 三大武器用不上!

主要结果. DD 情形

Hardy 型不等式

μ, ν : Borel 测度

$$\|f\|_{L^q(\mu)} \leq A \|f'\|_{L^p(\nu)}, \quad f(-M) = 0 = f(N).$$

$$\hat{\nu}(dx) = \hat{\nu}_p(dx) = \left(\frac{d\nu^\#}{dx} \right)^{-1/(p-1)} dx.$$

$\nu^\#$: ν 的绝对连续部分.

$$p^{-1} + p^{*-1} = 1$$

$$k_{q,p} = \left[\frac{q-p}{p B\left(\frac{p}{q-p}, \frac{p(q-1)}{q-p}\right)} \right]^{1/p-1/q} \leq 2 \text{ if } q \geq p;$$

$$k_{p,p} = p^{\frac{1}{p}} p^{*\frac{1}{p^*}} \quad B(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y).$$

Hardy 型不等式的最佳常数 A 满足

(1) $A \leq k_{q,p} B^*$, $1 < p \leq q < \infty$, 倘若 $\mu_{pp} = 0$;

(2) $A \geq B_*$, $1 < p, q < \infty$, 其中

$$B^* = \sup_{x \leq y} \frac{\mu[x, y]^{1/q}}{\left\{ \hat{\nu}[-M, x)^{-q/p^*} + \hat{\nu}[y, N]^{-q/p^*} \right\}^{1/q}},$$

$$B_* = \sup_{x \leq y} \frac{\mu[x, y]^{1/q}}{\left\{ \hat{\nu}[-M, x)^{1-p} + \hat{\nu}[y, N]^{1-p} \right\}^{1/p}}.$$

当 $q \geq p$ 时, $B_* \leq B^* \leq 2^{1/p-1/q} B_*$. 因此,

$A < \infty$ 当且仅当 $B_* < \infty$.

注. 仅使用 μ & $\hat{\nu}$ 显式解.

- 上、下界中 $-M, N$ 对称. $k_{q,p} 2^{1/p-1/q} \leq 2$.
- 当 $q = p$ 时, $B^* = B_* =$

$$\sup_{x \leq y} \frac{\mu[x, y]^{1/p}}{\{\hat{\nu}[-M, x)^{1-p} + \hat{\nu}[y, N]^{1-p}\}^{1/p}}$$

- 删去 $\hat{\nu}[y, N]$, 得出 DN 情形 $f(-M) = 0$

$$B^- = \sup_x \hat{\nu}[-M, x)^{1/p^*} \mu[x, N]^{1/q}.$$

- 删去 $\hat{\nu}[-M, x)$, 得出 ND 情形 $f(N) = 0$

$$B^+ = \sup_y \mu[-M, y]^{1/q} \hat{\nu}[y, N]^{1/p^*}.$$

已知结果 (8 本书, 1990–2011)

$(-M, N)$ 上的 Hardy 型不等式 μ, ν : Borel 测度

$$\|f\|_{L^q(\mu)} \leq A \|f'\|_{L^p(\nu)}, \quad \text{DN \& ND 情形}$$

$$A^- : f(-M) = 0; \quad A^+ : f(N) = 0.$$

定理 (1920–1992. $k_{q,p}$ 最佳常数)

设 $q \geq p$. 则 $B^\pm \leq A^\pm \leq k_{q,p} B^\pm$, 其中

$$B^- = \sup_x \hat{\nu}[-M, x]^{1/p^*} \mu[x, N]^{1/q},$$

$$B^+ = \sup_y \mu[-M, y]^{1/q} \hat{\nu}[y, N]^{1/p^*}.$$

B^\pm 中的对偶: $\mu \leftrightarrow \hat{\nu}$. 四边界仅余下 NN 情形.

设 $\mu[-M, N] < \infty$. 则 Hardy 型不等式的最佳常数 A 满足

(1) $A \leq k_{2,p} B^*$, $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$, 倘若 $\mu_{pp} = 0$

(2) $A \geq B_*$, $1 < p, q < \infty$, 其中

$$\hat{\nu}[x, y]^{1/p^*}$$

$$B^* = \sup_{x \leq y} \frac{\hat{\nu}[x, y]^{1/p^*}}{\left\{ \mu[-M, x)^{-p^*/q} + \mu[y, N]^{-p^*/q} \right\}^{1/p^*}},$$

$$B_* = \sup_{x \leq y} \frac{\hat{\nu}[x, y]^{1/p^*}}{\left\{ \mu[-M, x)^{\frac{1}{1-q}} + \mu[y, N]^{\frac{1}{1-q}} \right\}^{1/q^*}}.$$

进一步, $B_* \leq B^* \leq 2^{1/p-1/q} B_*$, 倘若 $q \geq p$.

$L^q \rightarrow \mathbb{B}$. Nash, 对数 Sobolev, Sobolev 型不等式.

后续发展(部分)

头两文处理离散情形, 解决一未解难题. 第3文统一处理 DN 情形的连续及离散. 该文及陈的最佳常数被第4文用于流形上的 Sobolev 不等式.

- Liao, Z.W. (2015) *Advanced Nonlinear Studies* 15, 805–834.
- Liao, Z.W. (2016) *Acta Math. Sin., Eng. Ser.* 32(9): 993–1013.
- Li, Y. & Mao, Y.H. (2020). *Math. Inequal. Appl.* 23(1): 257–266.
- Andreucci, D. & Tedeev, A.F. (2021). *Sobolev ineq. Riem. mfd.* Preprint, arXiv.

例. 三种方法计算最大特征对

6 万阶方阵, 非零元个数 30 万, 密度 $.093 \times 10^{-3}$,
非负对称, 元素 $\in (0, 154.8089]$

台式机: AMD Ryzen 5 2600, 6 核单 CPU 速度为
3.85 GHz, 内存 32 GB. Matlab v. R2015b,
Windows 10.


| 算法 | 留分量个数 | 删分量的阶 | 迭代数 | 用时 |
|------|--------------|------------------------|-------------------|-----|
| 新 | 56515, 94.2% | 8.1×10^{-316} | 288 | 5.1 |
| eigs | 3311, 5.5% | 3.1×10^{-8} | | 5 秒 |
| PI | 56460, 94.1% | 1.9×10^{-315} | 1.5×10^6 | 894 |

例. 三种方法计算前 6 个特征对




| | New algorithm | | | | MatLab-eigs | | |
|-----|---------------|---------------------|--------------|------|-------------|---------------------|------|
| | ℓ | $ \tilde{x}(\ell) $ | # iteration | time | ℓ | $ \tilde{x}(\ell) $ | time |
| 1st | 56515 | 8.1e-316 | (288, 40, 5) | 5.1 | 3311 | 3.7e-08 | 30 |
| 2nd | 57294 | 8.7e-316 | (319, 45, 6) | 5.8 | 3883 | 3.2e-08 | |
| 3rd | 57936 | 9.2e-316 | (244, 40, 5) | 4.6 | 4306 | 4.1e-08 | |
| 4th | 58515 | 8.7e-316 | (274, 45, 7) | 5.2 | 4599 | 8.6e-08 | |
| 5th | 59020 | 1.2e-315 | (276, 45, 5) | 5.4 | 5138 | 2.9e-08 | |
| 6th | 59536 | 9.1e-316 | (312, 45, 6) | 6.3 | 5401 | 5.2e-08 | |

| Modified Power Iteration (PI) | | | | |
|-------------------------------|--------|---------------------|------|---------|
| | ℓ | $ \tilde{x}(\ell) $ | time | # PI |
| 1st | 56460 | 1.9e-315 | 894 | 1.5e+06 |
| 2nd | 57246 | 1.8e-315 | 1173 | 1.5e+06 |
| 3rd | 57896 | 1.7e-315 | 1442 | 1.5e+06 |
| 4th | 58472 | 1.7e-315 | 1718 | 1.5e+06 |
| 5th | 58988 | 2.0e-315 | 1998 | 1.5e+06 |
| 6th | 59480 | 2.0e-315 | 2292 | 1.5e+06 |

For Further Reading I

-  陈. (2004). *From Markov Chains to Non-equilibrium Particle Systems*. World Scientific 2nd ed. (1st ed., 1992).
-  陈. (2005). *Eigenvalues, Inequalities and Ergodic Theory*. Springer.
-  陈. (2010). *Speed of stability for birth–death processes*. *Front. Math. China* 5(3): 379–515.
-  陈. (2013). *Bilateral Hardy-type inequalities*. *Acta Math. Sin. Eng. Ser.* 29(1): 1–32.

For Further Reading II

-  陈. (2015). The optimal constant in Hardy-type inequalities.
Acta Math. Sin., Eng. Ser. 31(5): 731–754.
-  陈. (2018). Hermitizable, isospectral complex matrices or differential operators.
Front. Math. China 13(6): 1267 – 1311.
-  陈. (2020). 交叉研究的感悟.
应用概率统计 36 (1): 86–110.
-  陈. (2021). 量子力学的数学新视角.
数学进展 50(3): 321–334.

<http://math0.bnu.edu.cn/~chenmf>
科普文章 & 论文集: vol 1 – vol 4

The end!

Thank you, everybody!

谢谢大家!

41