从华罗庚经济最优化模型谈起

陈木法

(江苏师范大学　北京师范大学)

运筹千里纵横论坛 第四十二期

2021 年 1 月 13 日 [redacted]

提纲

- 华罗庚经济模型 (理想化模型)

  基本定理, 证明提要

- 拓广模型

  市场经济, 带消费的一般模型, 随机模型

- 相关论题

  算法, 稳定性速度估计, 研究路线及文献, 量子力学

1 华罗庚经济模型: 稳定性

所关心的产品所构成的产综: [固定单位: 瓩, 吨...]

$$\boldsymbol{x} = \left(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(d)}\right).$$

考察当前经济的三种数据

- 去年的投入:
$$\boldsymbol{x}_0 = \left(\boldsymbol{x}_0^{(1)}, \boldsymbol{x}_0^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{x}_0^{(d)}\right).$$
- 今年的产出: $\boldsymbol{x}_1 = \left(\boldsymbol{x}_1^{(1)}, \boldsymbol{x}_1^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{x}_1^{(d)}\right)).$
- 结构方阵 (或消耗系数方阵): $\boldsymbol{A}_0 = (\boldsymbol{a}_{ij}^{(0)})$.

  每生产一个单位的 i 类产品, 需消耗 $\boldsymbol{a}_{ij}^{(0)}$ 个单位的 j 类产品.

投入产出法

$$x_0^{(j)} = \sum_{i=1}^{d} x_1^{(i)} a_{ij}^{(0)}, \qquad x_0 = x_1 A_0.$$

假定所生产的东西全部用于再生产 (理想化模型).

则有 $x_{n-1} = x_n A_{n-1}, \quad n \geqslant 1$. 从而

$$x_0 = x_1 A_0 = x_2 A_1 A_0 = x_n A_{n-1} \cdots A_0.$$

时齐情形 $A_n \equiv A$. $x_0 = x_n A^n$.

投入产出法： $x_n = x_0 A^{-n}, \qquad n \geqslant 1.$

联合国 1966 年. 据 2000 统计, $\geqslant$ 80 国家每 4～5 年编制一份表. 我国自 1987 年起每 5 年编制 1 份国家、省级表. 陈锡康教授: 名誉理事长.

华罗庚基本定理. 左正特征向量法

理想化模型:

- 最好的投入 $x_0 = A$ 的最大左特征向量.
  此时有最佳发展速度 $\rho(A)^{-1}$.
- 否则, 只要 $A^{-1} \not\geqslant 0$, 就必然走向失衡, 即失衡时

$$T := \inf\{n : x_n \text{ 的某个分量} \leqslant 0\} < \infty.$$

华的前所未有的贡献是第二条.

Perron-Frobenius 定理: 最大特征值为正的、单的,
　　最大左、右特征向量为正[且唯一].

例. [华 1984]

仅考虑工、农业两种产品. 设

$$A=\frac{1}{100}\begin{pmatrix}25 & 14\\ 40 & 12\end{pmatrix}\Longrightarrow$$

$$u=\left(\frac{5}{7}(\sqrt{2400}+13),\ 20\right),\ 44.34397483.$$

则有

x_0	T^{x_0}
$(44, 20)$	3
$(44.344, 20)$	8
$(44.34397483, 20)$	13

华罗庚基本定理的证明提要 [陈 1989/9]

$A = P$: $0 \leqslant P$, $P\mathbb{1} = \mathbb{1}$, $\boxed{\text{右 } (1, \mathbb{1})}$ $P^n = (p_{ij}^{(n)})$,
此处 $\mathbb{1}$ 为分量均为 1 的列向量. 由遍历定理:

$$p_{ij}^{(n)} \to \pi^{(j)} \ \forall i, \quad \pi = \left(\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \ldots, \pi^{(d)}\right)$$
$$P^n \to \mathbb{1}\pi \quad \text{as } n \to \infty. \quad 0 \leqslant \pi, \quad \pi\mathbb{1} = 1.$$

π 为 P 的平稳分布(唯一稳定解!): $\pi = \pi P$.
对于 A, 最大左、右特征向量对称, 为何选左?
对于 P, 最大左、右特征向量分别为 π 和 $\mathbb{1}$,自然选左!

华罗庚基本定理的证明提要 [陈 1989/9]

只需证 $x_n > 0\ \forall n \Rightarrow x_0 = \pi$. 设 $x_0 > 0$ 且 $x_0\mathbb{1} = 1$.

则 $$1 = x_0\mathbb{1} = x_n P^n \mathbb{1} = x_n \mathbb{1}, \quad n \geqslant 1.$$

$\exists \{x_{n_k}\}_{k\geqslant 1}$ & $\bar{x}$: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \bar{x}$, $\bar{x} \geqslant 0$, $\bar{x}\mathbb{1} = 1$.

$$x_0 = \left(x_0 P^{-n_k}\right) P^{n_k} = x_{n_k} P^{n_k} \to \bar{x}\mathbb{1}\pi = \pi. \quad \square$$

将 A 化为 P. 给定 A, 最大左、右特征向量 u 和 v. 命 $P = V^{-1}\dfrac{A}{\rho(A)}V$, $V = \mathrm{Diag}(v)$. 其平稳分布为 $\pi = uV \Rightarrow u = \pi V^{-1}$, 回到 A.

华先生给钟开莱的信，获悉于 2010 前后

钟开莱、吴荣：《随机过程新导引》

世界科技出版公司、茂昌图书有限公司联合出版.

台北 1997.　　同期，给侯振挺老师信(未曾见过)

第一章　马氏链必有其始

开来我兄教授：

来函已至，迟未作答，

向系[illegible]之

谨有一事请教：以下

的事实是否有人证明过。

"Markov 链必有其始。"

敬安　华罗庚

1984.2.29

华先生给钟开莱的信，获悉于 2010 前后

钟开莱、吴荣:《随机过程新导引》

世界科技出版公司、茂昌图书有限公司联合出版.

台北 1997.　　同期，给侯振挺老师信(未曾见过)

第一章　马氏链必有其始

开莱教授我兄:

　　来美已久还未作书问候，歉何似之.

　　兹有一事请教: 以下的事实是否有人证明过.

　　"Markov 链必有所始."

　　…………………

　　教安　　　　　　弟　罗庚　1984.2.29

可见当年华并不知 MC 遍历结果，如何猜出用左?

2 拓广模型. 市场经济

1983–1985 年间, 华先生共发表 11 篇序列短文, 加上 1983 年发表的简介, 这些文章的总标题都是"计划经济大范围最优化数学理论". 当年我国实行的是"计划经济". 然而, 他的文 (VII) 专论市场经济. 指出前面的模型仅需稍作修改即可: 将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 换成 $\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}$, 其中

社科院金融所

王增武 & 程炼

- $\boldsymbol{V}$ 是元素为 v_i/p_i 的对角阵,
- (p_i) 是市场价格所构成的向量,
- (v_i) 是 $\boldsymbol{A}$ 的最大右特征向量.

此时, $\rho(\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}) = \rho(\boldsymbol{A})$; 相应地 $\boldsymbol{u} \to \boldsymbol{u}\boldsymbol{V}$.

2 拓广模型. 带消费的一般情形

消耗系数方阵: $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})_{i,j=1}^{d}$, 非负、不可约、可逆. $\boldsymbol{x}$: 所关心的产品构成的产综

- 无消费理想模型. 第 $\boldsymbol{n}$ 步产出

$$\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}_0 \boldsymbol{A}^{-n}, \quad \boldsymbol{n} \geqslant 1. \quad \boldsymbol{x}_0\text{: 投入.}$$

- 带消费实用模型. 消费比例 $\boldsymbol{\alpha} \in (\mathbf{0}, \mathbf{1})$.

$$\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}_0 \boldsymbol{B}^{n}, \quad \boldsymbol{n} \geqslant \mathbf{1},$$

$$\boldsymbol{B} = (\mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{I}.$$

$\boxed{\text{如 } \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{A}) < \mathbf{1}}$

$\boxed{\text{投资、输出等并入消费}}$. 速度 $\frac{1}{\rho(A)} + \alpha\left(1 - \frac{1}{\rho(A)}\right) \leqslant \frac{1}{\rho(A)}$.

当 $\alpha\uparrow$ 时, x_0 的自由度=可取值空间的维数 $\uparrow$.

定理 ($\boldsymbol{x_0}$ 的自由度 (华罗庚 & 华苏, 1985))

$\{\boldsymbol{\lambda}_j\}$: $\boldsymbol{A}$ 的特征值(可重), $\boldsymbol{\lambda}_1=\rho(\boldsymbol{A})>\mathbf{0}$ 单$^+$. 命

$$\Phi(z)=\left[1+\frac{2\boldsymbol{\lambda}_1\varphi(z)}{\boldsymbol{\lambda}_1^2-|z|^2}\right]^{-1},\ \varphi(z)=|z|^2-\boldsymbol{\lambda}_1\mathrm{Re}\, z$$

此处 $z\in\mathbb{C}$ 满足 $|z|<\boldsymbol{\lambda}_1$. 那么

自由度 $=\#\{\boldsymbol{\lambda}_j\in\mathbb{C}:\ \boldsymbol{\lambda}_j\not\geqslant\mathbf{0}$ 且 $\varphi(\boldsymbol{\lambda}_j)>\mathbf{0}$, 包括 $\boldsymbol{\lambda}_j$ 的重数$\}$.

留意 $\Phi(z)=\Phi(\bar{z})$, $\Phi(z)\in(\mathbf{0},\mathbf{1})\Leftrightarrow\varphi(z)>\mathbf{0}$.

如 $\alpha>\Phi(\boldsymbol{\lambda}_\#)$, 则 x_0 的自由度增加一个(如 $\boldsymbol{\lambda}_\#<\mathbf{0}$)或两个(如 $\boldsymbol{\lambda}_\#$ 复共轭)+重根重数.

1997 年山东省 6 部门投入产出表

$\boldsymbol{A}$ = 下面方阵的转置

$$\begin{bmatrix} .106525 & .10464 & 0 & .002742 & .013753 & .004744 \\ .140497 & .531081 & .606984 & .277311 & .219445 & .219056 \\ 10^{-6} & .001836 & .000324 & .015089 & .035205 & .0454 \\ .001946 & .02247 & .04405 & .082288 & .06774 & .040897 \\ .166163 & .060775 & .029865 & .034568 & .049044 & .018104 \\ .004297 & .027266 & .040428 & .061835 & .176096 & .091463 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\lambda_1 = \rho(A) = 0.651093,}$

$\boldsymbol{g_1 = (9.39469,\ 47.5425,\ 1,\ 3.29471,\ 7.7896,\ 5.27587).}$

无消费情形 ($\alpha = 0$): 经济系统极敏感

x_0	T
取 g_1 的整数部分	2
取 g_1 全部 6 位数	6

带消费情形

x_0 取 g_1 的整数部分

α	0	0.4	0.6	0.84	0.94	0.99
T	2	2	2	2	4	14

x_0 取全 g_1 的 6 位输出

α	0	0.4	0.6	0.84	0.94	0.99
T	6	6	7	9	13	70

精度比消费敏感. 为何最后两个显著增加? 自由度 $0 \to 2$.

山东模型

特征值 $\mathbb{C}\ni z\not\ni 0$ 且 $\varphi(z)=|z|^2-\boldsymbol{\lambda}_1\mathrm{Re}\, z>\mathbf{0}$.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\lambda}_1 &= \mathbf{0.651093},\\
\boldsymbol{\lambda}_{2,\pm} &= \mathbf{0.114716 \pm 0.121987}\, \boldsymbol{i},\\
\boldsymbol{\lambda}_{3,\pm} &= \mathbf{-0.0307444 \pm 0.0361649}\, \boldsymbol{i},\\
\boldsymbol{\lambda}_4 &= \mathbf{0.0416897}.
\end{aligned}
$$

$\varphi(\boldsymbol{\lambda}_{2,\pm})=\mathbf{-0.0466502}$, $\varphi(\boldsymbol{\lambda}_{3,\pm})=\mathbf{0.0222706}$.

$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\lambda}_{3,\pm})=\mathbf{0.93565}$.

当 $\alpha>\mathbf{0.93565}$ 时自由度为 2. 需调整结构!

2 拓广模型. 随机、无消费 [华 1984 (Ⅱ)]

对效率方阵, 以 $1/6$ 的概率作 %1 的摄动:

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{ij} &= a_{ij} \quad \text{概率 } 2/3, \\ &= a_{ij}(1 \pm 0.01) \quad \text{概率 } 1/6.\end{aligned}$$

以 $(\tilde{a}_{ij})$ 代替 (a_{ij}), 得出一随机方阵. 其次, 设 $\{A_n;\ n \geqslant 1\}$ 为如上的独立同分布随机序列, 则得出随机情形的无消费经济模型:

$$x_n = x_0 \prod_{k=1}^{n} A_k^{-1} = x_0 M_n^{-1},$$

$$M_n = A_n A_{n-1} \cdots A_1.$$

2 拓广模型. 随机、无消费

依然取 $x_0 = (\mathbf{44.344},\ \mathbf{20})$, 在非随机情形 $T^{x_0} = 8$.
在目前的随机情形, 我们有

$$\mathbb{P}[T^{x_0} = n] = \begin{cases} 0, & n = 1, \\ 0.09, & n = 2, \\ 0.65, & n = 3. \end{cases}$$

$$\mathbb{P}[T^{x_0} \leqslant 3] \approx 0.74.$$

随机因素不可勿略!

2 拓广模型. 随机、无消费

随机情形华结果为何?

定理 (陈, 1992)

在轻微条件下, 我们有

$$\mathbb{P}[T^{x_0} < \infty] = 1, \qquad \forall x_0 > 0.$$

证明不易. 决定性情形, $M_n = A_n A_{n-1} \cdots A_1$ 的主阶为 $\prod_{j=1}^{d} \rho(A_j)$. 随机情形为何?

2 拓广模型. 随机、带消费

定理 (V.I. Oseledec, 1968)

设 $\mathbb{E}\log^+\|A_1\| < \infty$. 则

$$\frac{1}{n}\log\|M_n\| \xrightarrow{\text{a.s.}} \gamma \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R},$$

其中 $\gamma = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mathbb{E}\log\|M_n\|$.

定理 (陈 & 李勇, 1994)

假定 $\{B_n\}$ 独立同分布. 在合理条件下, 我们有

$$\mathbb{P}[T^x < \infty] = 1, \qquad 0 < \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

问题: 如何调控经济? 结构调整.

1990 年前后的工作及后续书

- 经济最优化的随机模型 (I)、(II)[1989/9], 1992
- 经济最优化的数学理论 (讲义) [1990/3].
  韩东、胡锡健 (2003),《经济和金融数学模型的理论与实践》. 新疆自治区计委
- 陈 & 李勇, 1994.
- 《随机过程导论》(陈 & 毛永华), 开篇 [初稿 1999], 2007. 英文版 2021.
- 小书《Eigenvalues, Inequalities and ...》第 10 章. 未解问题: 10.9, 10.10.
- 主页上的视频

1) 数学: 特征值→特征向量;

2) 计算: 特征对

1) 华 ('84-II): $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{lim}_{\ell\to\infty}\left(\boldsymbol{d}^{-1}\mathbf{Tr}(\boldsymbol{A}^{\ell})\right)^{1/\ell}$.

华 ('84-VI, '10): $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{lim}_{k\to\infty}\left(\mathbf{Tr}(\boldsymbol{A}^{2^k})\right)^{1/2^k}$.

计算 $\boldsymbol{A}^{2^k}$ 只需 $\boldsymbol{k}$ 次迭代 [$\boldsymbol{O}(\boldsymbol{k})$ 次矩阵乘法]:

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^2,\ \boldsymbol{A}^2\times\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}^{2^2},\ \boldsymbol{A}^{2^2}\times\boldsymbol{A}^{2^2}=\boldsymbol{A}^{2^3},\cdots$$

但矩阵元素乘法的总量为 $\boldsymbol{O}(\boldsymbol{k}\boldsymbol{d}^3)$.

对于大型矩阵, 线性方程来必可解!

特征值 → 特征向量未必可行.

2) 计算: 最大特征对. 无成熟算法

例 (陈 & 李月爽, 2019b, 例 9)

设 $A=(a_{kj})_{k,j=1}^{d}$, $a_{kj}=2^{-j}(2^{k\wedge j}-1)$. 则

- Mathematica 中的 'Eigensystem' 只能算到 d=11; 当 d=12 时, 分量变号与 PF定理相悖.
- MatLab 中的 'eig' 只能算到 $d=188$; 而 'eigs' 只能算到 $d=104$. 两例均可配称!

例 (陈 & 李月爽, 2019a, 例 4)

设 A 为三对角阵: 对角、下、上次对角线元素分别为常数 $-3, 1, 2$. 则 'Eigensystem' 只能算到 $d=81$; 'eig' 和 'eigs'可分别算到 $d=107, 90$.

从 2015 年开始做计算, 但只到文 [陈 & 李月爽, 2019b] 的末节才给出经济模型的算法. 该文算法的有效性可由下述随机测试看出.

使用普通笔记本电脑, 由 MatLab 的‘rand’生成元素在 $(0, 10)$ 内的方阵, 测试该文关于最大特征对的主要算法. 所得结果如次:

- 取 $d = 5000$. 运行 7 小时, 算出 $2,326$ 例. 平均每例用时 11 秒.
- 取 $d = 1000$. 运行 2 小时, 算出 $36,448$ 例. 平均每例用时 0.2 秒.

近 $2 \cdot 10^6$ 阶稀疏对称方阵, 台式机, 特征向量分量 $\geqslant 10^{-317}$, 略去 1.9%. 用时 309 秒. 前 6 个特征对.

华 (XI), 1985, 仙逝前 50 多天所写

“在六十年代我们研究数学为国民经济服务的问题时，我们得到‘一论双法’，一论就是本系列摘要中所谈到的内容，双法就是统筹方法、优选法. 我们有一个打算就是建立一整套为社会主义经济服务的，有纵深的方法.” “全部手稿在‘文化大革命’中遭到了‘一拿，二抄，三盗窃’的命运，已经荡然无存了, 当然培养人材的计划也完全落空了. 虽然‘一论’落空，但和我共同搞‘双法’的同志们(工人、农民、科学技术人员)，却已遍布全国了.” “‘一论’手稿的遗失，始终是我大伤脑筋的事. 十二大的召开，发出了信号，我六十年代所写的手稿可能要用得上了. 失稿追不回来怎么办？

华 (XI), 1985, 仙逝前 50 多天所写

原以为旧地重游，手到拿来，但焉知苦思力索就是想不出来了，证不出来了．火从心发，一病几殆，幸亏医务人员的帮助，谢绝探视者三个月，才使我思路重通，理出个头绪来，写出了这系列摘要的前七篇来．这是我七十岁以后的三年呀！这是由于颈锥病卧床仰写的三年呀！”

—取自陈:“交叉研究的感悟”的引文, 2020.

华文集 (2010). 王元先生提及: 当年在国外出版华的科普文集时曾想收入“一论”. 但华先生没有同意, 说这项工作还缺少实践, 不成熟. 衷心希望

$$\text{最大特征对} \longrightarrow \begin{cases} \text{经济最优化模型 (1983-85)} \\ \text{搜索引擎: PageRank (1998)} \\ \text{主成分分析} \begin{cases} \text{统计: SVD} \\ \text{大数据} \\ \text{量子力学} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{最大特征值} \longrightarrow \begin{cases} \text{主特征值} = \text{非} \\ \text{平凡第一特征值} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \text{稳定性的} \\ \text{速度估计} \end{cases}$$

三对角阵/二阶椭园: 各类稳定性 10/11 显式判准

3 相关论题. 研究路线及参考文献

- 1972-1978: 优选法.

谢颖超研讨班

- 1978-1992: 随机数学+统计物理.

马志明→生物

"From Markov Chains to Nonequilibrium..." ('92, '04).

可用特征值刻画相变现象.

2008 文: φ^4 模型

- 1988-2015: 随机数学+数学其它分支.

"Eigenvalues, Inequality, and Ergodic Theory" (2005)

主页上的 4 卷本论文集, 1993–

严士健、王梓坤 90 华诞 (2019, 2020).

- 1915-至今: 随机数学+计算数学与量子力学.

"交叉研究的感悟", "量子力学的数学新视角".

定理 (陈, 2018)

每一个可厄米方阵等谱于一个生灭矩阵.

这里“可厄米”是“厄米”的拓广, 相当于把均匀介质换成非均匀介质;

生灭矩阵是一类很特殊的三对角矩阵, 是一种最基本的随机过程—生灭过程的生成元.

由此看出两学科之间的远距离交叉. 属于量子力学根子上的进步.

进一步引导出 量子力学的新架构、新谱论、新算法.

三对角阵 $T \sim (a_k, -c_k, b_k), 0 \leqslant k < d+1$

$$\begin{matrix} T \\ Q \end{matrix} = \begin{pmatrix} -c_0 & b_0 & & & & 0 \\ a_1 & -c_1 & b_1 & & & \\ & a_2 & -c_2 & b_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & b_{N-1} & \\ 0 & & & a_d & -c_d & \end{pmatrix},$$

T : $(a_k), (b_k), (c_k)$: 三列复数.

T 可厄米$\Leftrightarrow(c_k)$ 为实且 $a_k b_{k-1} > (=) 0$.

生灭 Q: $a_k > 0$, $b_k > 0$, $c_k = a_k + b_k$, $c_d > a_d (=)$.

可厄米 T 等谱于生灭 $\tilde{Q} \sim (\tilde{a}_k, -\tilde{c}_k, \tilde{b}_k)$:

$$\boxed{u_k := a_k b_{k-1} = |a_k b_{k-1}| \ \& \ c_k \geqslant |a_k| + |b_k| \quad \text{显式}}$$

$$\tilde{b}_k = c_k - \cfrac{u_k}{c_{k-1} - \cfrac{u_{k-1}}{c_{k-2} - \cfrac{u_{k-2}}{\ddots\, c_2 - \cfrac{u_2}{c_1 - \cfrac{u_1}{c_0}}}}}, \quad \tilde{b}_0 = c_0$$

$$\tilde{c}_k = c_k,$$

$$\tilde{a}_k = c_k - \tilde{b}_k, \ k < d; \quad \tilde{a}_d = u_d / \tilde{b}_{d-1} \text{ if } d < \infty.$$

Schrödinger 算子: $L = L_0 + V$, $V \to b^h \nabla$, $Lh = 0$.

http://math0.bnu.edu.cn/~chenmf

谢谢大家！

32