一类Q过程的有势性

侯振挺　　陈木法

（长沙铁道学院）（北京师范大学）

Q过程构造论的研究已有几十年的历史，经过不少人的努力，已经取得丰富的成果[1]。然而，关于非保守Q过程，具体构造出来的依然很少。Reuter[2]曾构造了一族非保守Q过程。这类过程在Q过程的研究中曾起过重要作用。

最近，我们在[3]的第六章中提出了有势马尔可夫过程的重要概念，并具体探讨了一些Q过程的有势性，特别是解决了非保守生灭Q过程的有势性问题。

本文研究上述 Reuter 所构造的Q过程的有势性和可逆性问题。这类Q过程在可逆Q过程的研究中具有特殊的地位。我们的主要结果是：在这类Q过程中，要么不含有有势Q过程，要么只含有一个有势Q过程，它就是

$$P_{ij}(\lambda)=P_{ij}^{\min}(\lambda)+\frac{x_i(\lambda)x_j(\lambda)\pi_j}{\lambda\sum\limits_k \pi_k x_k(\lambda)}(\lambda>0,i,j\in E) \tag{1}$$

其中

$$E=(1,2,3,\cdots\cdots) \tag{2}$$

$$x_i(\lambda)=1-\lambda\sum_j P_{ij}^{\min}(\lambda) \tag{3}$$

(π_i) 是Q的配称列。

在本文之末，我们给出关于非保守可逆Q过程存在性的一个结果。

设 l 是由 $y=(y_1,y_2,\cdots)$：$\sum\limits_{i\in E}|y_i|<\infty$ 所构成的 Banach 空间，其范数定义为

$$\|y\|=\sum_{i\in E}|y_i| \tag{4}$$

记

$$P_{ij}(\lambda)=P_{ij}^{\min}(\lambda)+x_i(\lambda)m_\lambda y_j(\lambda)\quad(\lambda>0,i,j\in E) \tag{5}$$

其中

$$0\leqslant y(\lambda)\in l \tag{6}$$

$$y(\mu)=y(\lambda)[I+(\lambda-\mu)P_\mu^{\min}]\quad(\lambda,\mu>0) \tag{7}$$

$$m_\lambda=\|\lambda y(\lambda)\|^{-1}\quad(\lambda>0) \tag{8}$$

表

$$y(\lambda)=\bar{y}(\lambda)+bP_\lambda^{\min} \tag{9}$$

本文1979年10月20日收到

此处
$$0\leqslant\bar{y}(\lambda)\in l \tag{10}$$
$$\bar{y}(\lambda)(\lambda I-Q)=0 \tag{11}$$
并且 $\bar{y}(\lambda)$满足(6)；而$b\geqslant0$，$bP_\lambda^{\min}\in l$，或等价地
$$\sum_{k\in E}b_k(1-x_k(\lambda))<\infty \quad (\lambda>0) \tag{12}$$
再记
$$d_i=-\sum_{j\in E} q_{ij} \quad (i\in E) \tag{13}$$
$$Y=\lim_{\lambda\to\infty}\|\lambda\bar{y}(\lambda)\| \tag{14}$$
Reuter 在〔2〕中证明了（注意我们这里的记号略有不同）
$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda x_i(\lambda)=d_i \quad (\forall i\in E) \tag{15}$$
$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda y_j(\lambda)=b_j \quad (\forall j\in E) \tag{16}$$
$$\lim_{\lambda\to\infty}\|\lambda y(\lambda)\|=Y+\sum_{k\in E} d_k \tag{17}$$
$$\frac{d_i b_j}{\left(Y+\sum\limits_{k\in E}b_k\right)}<\infty \quad (\forall i,j\in E) \tag{18}$$
并且证明了下述的

定理1. 由(5)所定义的$(P_{ij}(\lambda))$是一个以$Q=(q_{ij})$为密度矩阵的Q过程的充要条件是
$$\frac{di\, b_j}{\left(Y+\sum\limits_{k\in E}b_k\right)}=0 \quad (\forall i,j\in E) \tag{19}$$
以后恒设Q是弱可配称的。任意选定Q的一个配称列(π_i)，今后凡论及有势性都是对于这个固定的(π_i)而言的。

取
$$y_i(\lambda)=\pi_i x_i(\lambda) \quad (\lambda>0, i\in E) \tag{20}$$
由于(6)，我们需要假定
$$\sum_{i\in E}\pi_i x_i(\lambda)<\infty \quad (\forall\lambda>0) \tag{21}$$
引理1. 如果 (21) 成立，则由 (20) 所定义的$y(\lambda)$满足 (7)。

证. 由 $P_\lambda^{\min}=(P_{ij}^{\min}(\lambda):i,j\in E)(\lambda>0)$满足预解式方程
$$P_\lambda-P_\mu=(\mu-\lambda)P_\lambda P_\mu=(\mu-\lambda)P_\mu P_\lambda \tag{22}$$
易见$x(\lambda)=(x_i(\lambda):i\in E)(\lambda>0)$ 满足
$$x(\lambda)-x(\mu)=(\mu-\lambda)P_\lambda^{\min}x(\mu)=(\mu-\lambda)P_\mu^{\min}x(\lambda) \tag{23}$$
于是
$$y_i(\lambda)+(\lambda-\mu)\sum_{k\in E}y_k(\lambda)P_{ki}^{\min}(\mu)$$

$$
\begin{aligned}
&=\pi_i x_i(\lambda)+(\lambda-\mu)\sum_{k\in E}\pi_k x_k(\lambda)P^{\min}_{ki}(\mu)\\
&=\pi_i\, x_i\,(\lambda)+(\lambda-\mu)\sum_{k\in E}x_k(\lambda)\pi_i P^{\min}_{ik}(\mu)\\
&=\pi_i[x_i(\lambda)+(\lambda-\mu)\sum_{k\in E}x_k(\lambda)P^{\min}_{ik}(\mu)]\\
&=\pi_i x_i(\mu)=y_i(\mu) \qquad (24)
\end{aligned}
$$

从而引理1成立。

引理2. 若（21）成立，则$\tilde{b}P^{\min}_{\lambda}\in l$. 此处$\tilde{b}=(\pi_i d_i)$。

证． 因为（$x_i(\lambda)$）是方程

$$
\left.\begin{aligned}
&u_i(\lambda)=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}u_k(\lambda)+\frac{d_i}{\lambda+q_i}\\
&0\leqslant u_i(\lambda)\leqslant 1 \quad (i\in E,\ \lambda>0)
\end{aligned}\right\}
$$

的最大解，而$\left(\sum_j d_j P^{\min}_{ij}(\lambda)\right)$是上述方程的最小非负解，故有

$$\sum_j d_j\, P^{\min}_{ij}(\lambda)\leqslant x_i(\lambda) \quad (\lambda>0,\ i\in E)$$

于是

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{b}P^{\min}_{\lambda}\| &=\sum_i\sum_j \pi_j\, d_j\, P^{\min}_{ji}(\lambda)\\
&=\sum_i \pi_i\sum_j d_j\, P^{\min}_{ij}(\lambda)\leqslant\sum_i \pi_i\, x_i(\lambda) \quad <+\infty。
\end{aligned}
$$
证毕

引理3. $$b_i=\pi_i\, d_i \qquad (i\in E)$$

证． 由（15），（16）和（20）立得。

引理4. 若条件（21）满足，则由（20）和（9）所定义的$\bar{y}(\lambda)$满足

$$\bar{y}_i(\lambda)=\pi_i\left[1-\sum_j(\lambda+d_j)\ P^{\min}_{ij}(\lambda)\right]$$

证． 由（9）和引理3得

$$
\begin{aligned}
\bar{y}_i(\lambda)&=y_i(\lambda)-\sum_j \pi_j\, d_j\, P^{\min}_{ji}(\lambda)\\
&=\pi_i\left[1-\sum_j \lambda\, P^{\min}_{ij}(\lambda)\right]-\sum_j \pi_i\, d_j\, P^{\min}_{ij}(\lambda)\\
&=\pi_i\left[1-\sum_j(\lambda+d_j)\ P^{\min}_{ij}(\lambda)\right]
\end{aligned}
$$
证毕

引理5. 若条件（21）成立，则由（20）和（9）所定义的$\bar{y}(\lambda)$满足（10）和（11）。

证． 由（21）和引理2立知$\bar{y}(\lambda)$满足（10），往证$\bar{y}(\lambda)$满足（11）. 我们知道，（$x_i(\lambda)$）和$\left(\sum_j d_j\, P^{\min}_{ij}(\lambda)\right)$分别是引理2中方程的最大解和最小解，于是$\left(x_i(\lambda)-\sum_j d_j P^{\min}_{ij}(\lambda)\right)$是齐次方程

$$\left.\begin{array}{l}\lambda u_i(\lambda)-\sum\limits_j q_{ij}u_j(\lambda)=0\\ 0\leqslant u_i(\lambda)\leqslant 1 \qquad (i\in E,\ \lambda>0)\end{array}\right\}$$

的解，因此

$$\lambda\pi_i\left(x_i(\lambda)-\sum_j d_j P_{ij}^{\min}(\lambda)\right)=\sum_k \pi_i q_{ik}\left(x_k(\lambda)-\sum_j d_j P_{kj}^{\min}(\lambda)\right)$$

$$=\sum_k \pi_k\left(x_k(\lambda)-\sum_j d_j P_{kj}^{\min}(\lambda)\right)q_{ki}$$

由引理4，此即 $\lambda\bar{y}_i(\lambda)=\sum\limits_k \bar{y}_k(\lambda)q_{ki}$ 证毕

由定理1、引理1、引理2和引理5立即得到

定理2. 命

$$\bar{P}_{ij}(\lambda)=P_{ij}^{\min}(\lambda)+\frac{x_i(\lambda)x_j(\lambda)\pi_j}{\lambda\sum\limits_{k\in E}\pi_k x_k(\lambda)} \quad (\lambda>0,\ i,\ j\in E) \tag{25}$$

$\left(此处约定\frac{0}{0}=0\right)$则$(\bar{P}_{ij}(\lambda))$是$Q$过程的充要条件是下述诸条件之一成立：

（i）Q保守零流出[3]；

（ii）Q保守非零流出且（21）成立；

（iii）Q非保守而（21）和

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{i\in E}\lambda\,\pi_i\,x_i(\lambda)=\infty \tag{26}$$

成立。

由（25）所定义的$(\bar{P}_{ij}(\lambda))$显然具有性质

$$\pi_i\bar{P}_{ij}(\lambda)=\pi_j\bar{P}_{ji}(\lambda).\ (\forall\lambda>0,\ \forall i,\ j\in E) \tag{27}$$

于是有

定理3. 由（25）所定义的$(\bar{P}_{ij}(\lambda))$是一个有势Q过程的充要条件是定理2中的（i）～(iii) 之一成立。

定理4. 如果Q保守零流出或非零流出但（21）成立，则有势Q过程存在；如果Q非保守但（21）和（26）成立，则有势Q过程也存在。

定理5. 由（5）所定义的$(P_{ij}(t))$若是有势Q过程，则它必定形如（1）。

证. $y(\lambda)=0$或$x(\lambda)=0$的情形是平凡的。以下设$y(\lambda)\neq 0$且$x(\lambda)\neq 0$。由（23）易见

$$x_i(\lambda)-x_i(\mu)+(\lambda-\mu)\sum_{j\in E}P_{ij}^{\min}(\lambda)x_j(\mu)=0 \tag{28}$$

若$(P_{ij}(\lambda))$有势，则它弱可配称，于是

$$\pi_i x_i(\lambda)y_j(\lambda)=\pi_j x_j(\lambda)y_i(\lambda) \quad (\lambda>0,\ i,\ j\in E) \tag{29}$$

记

$$D(\lambda)=(i:y_i(\lambda)>0) \tag{30}$$

由（7）知，若对于固定的$\lambda>0$，$y_i(\lambda)=0$（$\forall i\in E$），则对于一切$\mu>0$，$y_i(\mu)=0$。因

此，由$y(\lambda)\neq 0$知

$$D(\lambda)\neq\phi \qquad (\forall\lambda>0) \tag{31}$$

于是由（29）得到

$$\frac{\pi_i x_i(\lambda)}{y_i(\lambda)}=\frac{\pi_j x_j(\lambda)}{y_j(\lambda)} \quad (\forall i,\ j\in D(\lambda)) \tag{32}$$

从而存在$c(\lambda)$，使

$$\frac{\pi_i x_i(\lambda)}{y_i(\lambda)}=c(\lambda)<\infty \qquad (\forall i\in D(\lambda)) \tag{33}$$

即
$$y_i(\lambda)=c(\lambda)\pi_i x_i(\lambda) \quad (i\in D(\lambda)) \tag{34}$$

由（29）和（34）得到

$$\pi_i x_i(\lambda)y_j(\lambda)=\pi_j x_j(\lambda)y_i(\lambda)=c(\lambda)y_j(\lambda)y_i(\lambda) \quad (i\in E,\ j\in D(\lambda)) \tag{35}$$

由（31）及
$$y_j(\lambda)\neq 0 \qquad (\forall j\in D(\lambda)) \tag{36}$$

知
$$\pi_i x_i(\lambda)=c(\lambda)y_i(\lambda) \qquad (\forall i\in E) \tag{37}$$

但$x(\lambda)\neq 0$，故
$$c(\lambda)>0 \tag{38}$$

于是
$$y_i(\lambda)=\frac{\pi_i x_i(\lambda)}{c(\lambda)} \qquad (\forall i\in E) \tag{39}$$

但由假设，$y(\lambda)$满足（6），故（21）亦成立。定理证毕。

由定理5，往后我们只需研究形如（25）的$(P_{ij}(\lambda))$，以下恒设（21）成立并且

$$P_{ij}(\lambda)=P^{\min}_{ij}(\lambda)+\frac{x_i(\lambda)x_j(\lambda)\pi_j}{\lambda\sum\limits_{k\in E}\pi_k x_k(\lambda)} \quad (\lambda>0,\ i,\ j\in E) \tag{40}$$

我们将对条件（26）作进一步的分析。

先看看在什么条件下（9）中的$\bar{y}(\lambda)\equiv 0(\lambda>0)$。为讨论方便，不失一般性，直至定理7结束，我们总假定Q矩阵$Q=(q_{ij})$满足

$$q_i>0 \qquad (\forall i\in E) \tag{41}$$

记

$$v_i(\lambda)=\sum_{j\in E}(\lambda+d_j)P^{\min}_{ij}(\lambda) \quad (\lambda\geqslant 0,\ i\in E) \tag{42}$$

引理6. $(v_i(\lambda))$是方程

$$u_i(\lambda)=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}u_k(\lambda)+\frac{\lambda+d_i}{\lambda+q_i} \quad (\lambda\geqslant 0,\ i\in E) \tag{43}$$

的最小非负解。

证. 易证$(P_{ij}(\lambda))$是方程

$$u_i(\lambda)=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}u_k(\lambda)+\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_i} \quad (\lambda\geqslant 0,\ i\in E) \tag{44}$$

的最小非负解[1]。于是由〔1〕定理3.3.2知，$(v_i(\lambda))$是方程（43）的最小非负解。

引理7.
$$v_i(\lambda)\equiv 1 \qquad (\forall\lambda\geqslant 0,\ \forall i\in E) \tag{45}$$

的充要条件是方程

$$u_i=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{q_i}u_k+\frac{d_i}{q_i}\quad(i\in E)\tag{46}$$

的最小非负解（v_i）满足

$$v_i\equiv 1\qquad(\forall i\in E)\tag{47}$$

证． 由〔1〕定理5.6.3知规格方程（44）的最小非负解（$v_i(\lambda)$）满足

$$0\leqslant v_i(\lambda)\leqslant 1\quad(\forall\lambda\geqslant 0,\ \forall i\in E)\tag{48}$$

我们证明，当$\lambda\uparrow$时，方程（44）的非负解（$u_i(\lambda)$）不降。显见

$$\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}+\frac{\lambda+d_i}{\lambda+q_i}=1\quad(\forall\lambda\geqslant 0,\ \forall i\in E)\tag{49}$$

今设$\lambda\geqslant\mu$，并记

$$c_{ik}=\frac{q_{ik}}{\mu+q_i}-\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}\geqslant 0\quad(k\neq i,\ i\in E)\tag{50}$$

则由（49）知

$$\sum_{k\neq i}c_{ik}=\frac{\lambda+d_i}{\lambda+q_i}-\frac{\mu+d_i}{\mu+q_i}\cdot\quad(\forall i\in E)\tag{51}$$

命

$$u_i^{(0)}(\lambda)=\frac{\lambda+d_i}{\lambda+q_i}\quad(\lambda\geqslant 0,\ i\in E)\tag{52}$$

$$u_i^{(n+1)}(\lambda)=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}u_k^{(n)}(\lambda)+\frac{\lambda+d_i}{\lambda+q_i}\quad(\lambda\geqslant 0,\ i\in E)\tag{53}$$

则

$$u_i^{(0)}(\lambda)\geqslant u_i^{(0)}(\mu)\quad(\forall i\in E)\tag{54}$$

今设

$$u_i^{(n)}(\lambda)\geqslant u_i^{(n)}(\mu)\quad(\forall i\in E)\tag{55}$$

则由（55），（53）和（51）得

$$\begin{aligned}u_i^{(n+1)}(\lambda)&=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}u_k^{(n)}(\lambda)+\frac{\lambda+d_i}{\lambda+q_i}\\&=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\mu+q_i}u_k^{(n)}(\lambda)-\sum_{k\neq i}c_{ik}u_k^{(n)}(\lambda)+\frac{\lambda+d_i}{\lambda+q_i}\\&\geqslant\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\mu+q_i}u_k^{(n)}(\mu)-\sum_{k\neq i}c_{ik}+\frac{\lambda+d_i}{\lambda+q_i}\\&=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\mu+q_i}u_k^{(n)}(\mu)+\frac{\mu+d_i}{\mu+q_i}=u_i^{(n+1)}(\mu)\end{aligned}\tag{56}$$

命$n\to\infty$即得 $$u_i(\lambda)\geqslant u_i(\mu)\qquad(\forall i\in E)\tag{57}$$

进而有 $$\lim_{\lambda\to\infty}v_i(\lambda)\geqslant v_i\qquad(\forall i\in E)\tag{58}$$

由此立知引理7成立。

由引理3知

$$b_i = \pi_i d_i, \qquad (i \in E) \tag{59}$$

我们有

定理6. $\bar{y}(\lambda) \equiv 0 (\lambda > 0)$的充要条件是方程（46）的最小非负解（$v_i$）满足

$$v_i \equiv 1 \qquad (\forall i \in E) \tag{60}$$

此时，若Q非保守且（21）成立，则由（40）所定义的（$P_{ij}(\lambda)$）是有势Q过程的充要条件是

$$\sum_{i \in E} \pi_i d_i = \infty \tag{61}$$

特别，若$v_i \equiv 1$（$i \in E$）且Q有限非保守，则（$P_{ij}(\lambda)$）不是Q过程，更不是有势Q过程。

证. 由（9），（17），（20），引理6，引理7和定理3立得本定理。

下面给出条件（60）的概率意义，为此，命

$$\hat{P}_{ij} = \begin{cases} \dfrac{q_{ij}}{q_i} & i, j \in E \\ \dfrac{d_i}{q_i} & i \in E, j = 0 \\ 1 & i, j = 0 \\ 0 & i = 0, j \in E \end{cases} \tag{62}$$

由〔1〕系6.6.1得

定理7. $v_i \equiv 1$（$i \in E$）的充要条件是（$\hat{P}_{ij}$）是不可约常返链，即马氏链从$i(\in E)$出发，第一次到达0的时刻τ以概率1为跳跃点。或即

$$f_{i0}^{*} \equiv 1 \tag{63}$$

如果$\bar{y}(\lambda) \not\equiv 0 (\lambda > 0)$，如何计算相应的$Y = \lim\limits_{\lambda \to \infty} \| \lambda \bar{y}(\lambda) \|$？为此，先建立

引理8. 命

$$\hat{v}_i(\lambda) = 1 - v_i(\lambda) \quad (\lambda > 0, \ i \in E) \tag{64}$$

则（$\hat{v}_i(\lambda)$）是方程

$$\left.\begin{aligned} & u_i(\lambda) = \sum_{k \neq i} \frac{q_{ik}}{\lambda + q_i} u_k(\lambda) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad (\lambda > 0) \\ & 0 \leqslant u_i(\lambda) \leqslant 1 \qquad (i \in E) \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

的最大解。它可如下得到：若命

$$u_i^{(0)}(\lambda) \equiv 1 \tag{66}$$

$$u_i^{(n+1)}(\lambda) = \sum_{k \neq i} \frac{q_{ik}}{\lambda + q_i} u_k(\lambda) \tag{67}$$

则

$$u_i^{(n)}(\lambda) \quad \downarrow \quad \hat{v}_i(\lambda) \quad (n \uparrow \infty) \tag{68}$$

证. 由引理6和（48）易证本引理成立。

引理9.

$$Y = \lim_{\lambda \to \infty} \sum_{i \in E} \lambda \pi_i \hat{v}_i(\lambda) \tag{69}$$

证. 由（9），（14），（42）和（64）立得（69）。

定理8. 设Q非保守且（21）成立。如果

$$\sum_{i\in E} \pi_i d_i=\infty \tag{70}$$

或者

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \sum_{i\in E}\lambda\pi_i\hat{v}_i(\lambda)=\infty \tag{71}$$

则 $(P_{ij}(\lambda))$是一个有势Q过程，如果（70）不真，则$(P_{ij}(\lambda))$是有势Q过程的充要条件是（71）成立；反之，如果（71）不真，则$(P_{ij}(\lambda))$为有势Q过程的充要条件是（70）成立。特别，若Q有限非保守（如非保守生灭过程），则$(P_{ij}(\lambda))$是有势Q过程的充要条件是（70）成立。

注. 1）如果条件(21)和（70）成立，即$\sum_i \pi_i x_i(\lambda)<\infty$且$\sum_i \pi_i d_i=\infty$，则

$$\inf_i \lambda\sum_j P^{\min}_{ij}(\lambda)=0;$$

2）如果条件（21）和（71）成立，则方程

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{y}(\lambda)(\lambda I-Q)=0\\ \tilde{y}(\lambda)\in l\end{array}\right\}$$

有非零解。

证. 由引理2知

$$\sum_i \sum_j \pi_i d_i P^{\min}_{ij}(\lambda)<\infty$$

由此及（70）和〔1〕引理12.2.4知注1成立。另一方面，条件（71）表明

$$\bar{y}_i(\lambda)=\pi_i(1-\sum_j(\lambda+d_j)P^{\min}_{ij}(\lambda))\neq 0$$

但$(\bar{y}_i(\lambda))$是注2中方程的解，故注2成立。证毕

现在，让我们转到可逆性问题。

引理10. 设$Q=(q_{ij})$既约非保守，则

$$x_i(\lambda)>0\quad(\forall\lambda>0,\ \forall i\in E) \tag{72}$$

证. 易见$(x_i(\lambda))$是方程

$$\left.\begin{array}{l}u_i(\lambda)=\sum\limits_{k\neq i}\dfrac{q_{ik}}{\lambda+q_i}u_k(\lambda)+\dfrac{d_i}{\lambda+q_i}\quad(i\in E)\\ 0\leqslant u_i(\lambda)\leqslant 1\end{array}\right\} \tag{73}$$

的最大解。设$i\in E$是任一非保守点，则

$$x_i(\lambda)=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}x_k(\lambda)+\frac{d_i}{\lambda+q_i}\geqslant\frac{d_i}{\lambda+q_i}>0\quad(\forall\lambda>0) \tag{74}$$

于是，只要$i\to j$（直达！），就有

$$x_j(\lambda)=\sum_{k\neq j}\frac{q_{jk}}{\lambda+q_j}x_k(\lambda)+\frac{d_j}{\lambda+q_j}\geqslant\frac{q_{ji}}{\lambda+q_j}x_i(\lambda)>0\quad(j\neq i)$$

由于Q既约，故对于$\forall j\in E$，存在i_1，i_2，……，i_n，使$i\to i_1\to i_2\to\cdots\to i_n\to j$。重复上述论证，我们依次得到$x_i(\lambda)>0$，$x_{i_1}(\lambda)>0$，……，$x_{i_n}(\lambda)>0$，$x_j(\lambda)>0$。这便得到

$$x_i(\lambda)>0\quad(\forall\lambda>0,\ \forall i\in E) \tag{75}$$

引理得证。

由于Q弱可配称，从而可分块。Q的子块$Q_l(l\in D)$称为非保守的，如若它含有非保守状态，否则称为保守子块。

下述定理给出过程$(P_{ij}(\lambda))$不可约[4]的充要条件。

定理9. 设Q弱可配称，(π_i)是Q的一个配列，满足

$$\sum_{i\in E}\pi_i x_i(\lambda)<\infty \tag{76}$$

如果Q保守，则过程$(P_{ij}(\lambda))$：

$$P_{ij}(\lambda)=P_{ij}^{\min}(\lambda)+\frac{x_i(\lambda)x_j(\lambda)\pi_j}{\lambda\sum_{k\in E}\pi_k x_k(\lambda)}\quad(\lambda>0,\ i,j\in E) \tag{77}$$

为不可约有势Q过程的充要条件是Q既约零流出或Q的每一子块非零流出。如果Q非保守，则$(P_{ij}(\lambda))$为不可约有势Q过程的充要条件是

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{i\in E}\lambda\pi_i x_i(\lambda)=\infty \tag{78}$$

并且Q的每一个保守子块非零流出。

证． 我们只证明非保守情形，保守情形类似可证。对于非保守子块$Q_l(l\in D)$，由引理10，我们已有

$$x_i(\lambda)>0\quad(\forall\lambda>0,\ \forall i\in E_l) \tag{79}$$

而对于保守子块$Q_{l'}(l'\in D)$，只要它是非零流出的，就有

$$x_i(\lambda)>0\quad(\forall\lambda>0,\ \forall i\in E_{l'}) \tag{80}$$

从而

$$P_{ij}(\lambda)\geqslant\frac{x_i(\lambda)x_j(\lambda)\pi_j}{\lambda\sum_k\pi_k x_k(\lambda)}>0,\quad(\forall\lambda>0,\ \forall i,j\in E) \tag{81}$$

即$(P_{ij}(\lambda))$不可约。充分性得证。往证必要性。设$(P_{ij}(\lambda))$不可约但存在一个子块Q_{l_0}为保守零流出的，那么

$$P_{ij}(\lambda)=P_{ij}^{\min}(\lambda)\quad(\forall\lambda>0,\ \forall i\ j\in E_{l_0}) \tag{82}$$

于是

$$\lambda\sum_{j\in E_{l_0}}P_{ij}(\lambda)=\lambda\sum_{j\in E_{l_0}}P_{ij}^{\min}(\lambda)=1\quad(\forall\lambda>0,\ \forall i\in E_{l_0}) \tag{83}$$

从而

$$P_{ij}(\lambda)=0\quad(\forall\lambda>0,i\in E_{l_0},\ j\in E_{l_0}) \tag{84}$$

这与$(P_{ij}(\lambda))$不可约相悖。定理得证。

下述定理给出$(P_{ij}(\lambda))$可逆的充要条件。

定理10. 若Q保守，则过程$(P_{ij}(\lambda))$：

$$P_{ij}(\lambda)=P_{ij}^{\min}(\lambda)+\frac{x_i(\lambda)x_j(\lambda)\pi_j}{\lambda\sum_{k\in E}\pi_k x_k(\lambda)}\ (\lambda>0,\ i,\ j\in E) \tag{85}$$

可逆的充要条件是Q可配称并以(π_i)为配称分布，而且下述两条件之一成立：

（i）Q既约零流出；

（ii）Q的每一子块非零流出。

若Q非保守，则过程$(P_{ij}(\lambda))$可逆的充要条件是下述三条件同时成立：

（i）Q可配称并以(π_i)为配称分布；

（ii）$\lim\limits_{\lambda\to\infty}\sum\limits_{i\in E}\lambda\,\pi_i\,x_i(\lambda)=\infty$； (86)

（iii）Q的每一个保守子块非零流出。

证． 易由定理9导出。

与定理6和定理8一样，我们可对条件（86）作进一步的分析，从而得到关于可逆Q过程的若干推论。我们不再详述了。

在结束本文的时候，我们给出关于非保守可逆Q过程存在性的一个结果

定理11． 设$Q=(q_{ij})$非保守、弱可配称，(π_i)是Q的一个配称列，满足

$$\sum_{i\in E}\pi_i\,x_i(\lambda)<\infty$$

假定

$$\exists c_\lambda>0 \quad \text{使} \quad \lambda P_\lambda^{\min}1\geqslant c_\lambda 1 \tag{87}$$

则不存在不断的有势Q过程，从而也就不存在可逆Q过程。

证． 设$P_\lambda=(P_{ij}(\lambda))$是任一有势$Q$过程。固定$j$并命

$$P_{ij}(\lambda)-P_{ij}^{\min}(\lambda)=y_i \tag{88}$$

注意$(P_{ij}^{\min}(\lambda))$满足向后方程

$$\lambda P_{ij}^{\min}(\lambda)=\delta_{ij}+\sum_k q_{ik}P_{kj}^{\min}(\lambda) \tag{89}$$

以及$(P_{ij}(\lambda))$满足向后不等式

$$P_{ij}(\lambda)\geqslant\delta_{ij}+\sum_k q_{ik}P_{kj}(\lambda) \tag{90}$$

知(y_i)满足

$$\lambda y_i\geqslant\sum_k q_{ik}\,y_k \tag{91}$$

记$(\lambda I-Q)y=w\geqslant0$，则由[5]引理2和引理1的（a）知

$$y=P_\lambda^{\min}w \tag{92}$$

让j变动，将相应的列w合并成矩阵$W(\lambda)$，我们得到

$$P_\lambda=P_\lambda^{\min}+P_\lambda^{\min}W(\lambda) \tag{93}$$

今以Π表以$\pi_i(i\in E)$为元素的对角矩阵，则由P_λ的有势性得

$$\Pi P_\lambda=P'_\lambda\Pi \tag{94}$$

由此及

$$\Pi P_\lambda^{\min}=(P_\lambda^{\min})'\Pi \tag{95}$$

得

$$\Pi P_\lambda^{\min}W(\lambda)=W'(\lambda)(P_\lambda^{\min})'\Pi=W'(\lambda)\Pi P_\lambda^{\min} \tag{96}$$

或

$$P_\lambda^{\min}W(\lambda)=\Pi^{-1}W'(\lambda)\Pi P_\lambda^{\min} \tag{97}$$

于此，Π^{-1}是以$\pi_i^{-1}(i\in E)$为元素的对角矩阵，置

$$U(\lambda)=\Pi^{-1}W'(\lambda)\Pi \tag{98}$$

则由（93），（97）和（98）得

$$P_\lambda=P_\lambda^{\min}+U(\lambda)P_\lambda^{\min},\quad U(\lambda)\geqslant0 \tag{99}$$

这样，我们就得到〔4〕中的（1）式，然后逐字逐句地使用〔4〕中（1）式之后的证明，可见

$$P_\lambda=P_\lambda^{\min} \tag{100}$$

但Q非保守，$P_\lambda^{\min}$中断，故定理得证。

推论． 设$Q=(q_{ij})$非保守，它弱可配称并有满足条件（21）的配称列(π_i)，记

$$d_i=-\sum_j q_{ij} \quad (i\in E) \tag{101}$$

如果d_i有界（特别，如果Q是有限非保守的)，并且方程

$$\left.\begin{aligned} &\lambda u_i(\lambda)-\sum_j q_{ij}u_j(\lambda)=0 \\ &0\leqslant u_i(\lambda)\leqslant 1 \quad (i\in E,\ \lambda>0) \end{aligned}\right\} \tag{102}$$

只有零解，则不存在不断的有势Q过程，从而也不存在可逆Q过程。

证．由〔4〕命题2知条件（87）及方程（102）只有零解等价，于是由定理11立得本推论。

参考文献

〔1〕 侯振挺、郭青峰，齐次可列马尔可夫过程，科学出版社（1978）

〔2〕 G. E. H. Reuter, Denumerable Markov processes Ⅲ, J. London. Math. Soc. **37**,(1962) 64—73

〔3〕 钱敏、侯振挺等，可逆马尔可夫过程，湖南科学技术出版社(1979)

〔4〕 G. E. H. Reuter, Denumerable Markov processes(Ⅳ)On C. T. Hou's uniqueness theorem for Q-semigroups. Z. Wahrscheinlichkeitsheorie verw. Gebiete. **44**.(1976)309—315

WEAKLY SYMMETRIZABLE Q-PROCESSES

Hou Zhen-ting and Chen Mu-fa

Abstraet

Let E be a countable set, $Q=(q_{ij})$ be a Q—matrix on E, i. e,

$$0\leqslant q_{ij}<+\infty(i\neq j),\ 0\leqslant q_i\equiv -q_{ii}<+\infty$$

$$\sum_j q_{ij}\leqslant 0 \tag{1}$$

$P(t)=(P_{ij}(t))$ defined on E is called a Q—processes if

$$\begin{aligned} &P(t)\geqslant 0,\ P(t)1=1 \\ &P(s+t)=P(s)P(t),\ \lim_{t\to 0}P(t)=I \end{aligned} \tag{2}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{P(t)-I}{t}=Q$$

It is called weakly symmetrizable Q—process, if there is a positive measure $(\pi_i; i\in E)$ on E such that

$$\pi_i P_{ij}(t)=\pi_j P_{ji}(t) \quad (\forall i,\ j,\ t) \tag{3}$$

A Q—process $P(t)$ is said to be reversible, if

(i) (π_i) is a positive probability on E and (3) holds;

(ii) lin $P_{ij}(t)=\pi_j$, $\forall i,\ j\in E$

Clealy, if $P(t)$ is weakly symmetrizable, then

$$\pi_i q_{ij}=\pi_j q_{ji} \tag{4}$$

In this poper, necessary and sufficient conditions are given for weakly symmetrizability and reversibility of

$$\psi_{ij}(\lambda)=\varphi_{ij}(\lambda)+Z_i(\lambda)m_\lambda\eta_j(\lambda)$$

((1.2) in[2]), Finally, We have proved following theorem. Suppose

(i) $\pi_i q_{ij}=\pi_j q_{ji}(\pi_i>0,\ \forall i\in E)$

(ii) $\inf\limits_{i\in E}\lambda\sum_j\psi_{ij}(\lambda)=\eta_\lambda>0$

then there is only one weak symmetrizable Q-process. It is $\Phi_\lambda=(\varphi_{ij}(\lambda))$.