第28卷第5期 数学进展 Vol.28, No.5
1999年10月 ADVANCES IN MATHEMATICS Oct., 1999

主特征值估计的新故事

陈木法

(北京师范大学数学系，北京， 100875，中国)

摘要 本文介绍主特征值估计的两种通用方法，着重于两个侧面：来自黎曼几何的第一种方法如何应用于概率论；来自概率论的第二种方法如何应用于黎曼几何．此外，还将概述若干基本结果．

关键词 主特征值；谱隙；对称型； Cheeger 不等式

MR(1991)主题分类： 05C15

1 谱隙存在性判准与 Cheeger 不等式

1.1 主特征值的定义

设 $(E,\mathcal{E},\pi)$ 是一概率空间．任意给定 $\mathcal{E}\times\mathcal{E}$ 上的非负对称测度 J (它在对角线上无负荷) 及 $\mathcal{E}$ 上的非负测度 K, 定义实 L^2 空间 $L^2(\pi)$ 上的 **对称型** $(D,\mathcal{D}(D))$ 如下：

$$D(f,f)=\frac{1}{2}\int_{E\times E}J(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)(f(x)-f(y))^2+\int_E K(\mathrm{d}x)f(x)^2,\quad f\in\mathcal{D}(D)$$
$$\mathcal{D}(D)=\{f\in L^2(\pi):D(f,f)<\infty\}.$$

那么，对称型 $(D,\mathcal{D}(D))$ 的 **主特征值** 定义为

$$\lambda_0=\inf\{D(f,f):\pi(f^2)=1\},\quad 如\ K\neq 0,$$
$$\lambda_1=\inf\{D(f,f):\pi(f)=0,\ \pi(f^2)=1\},\quad 如\ K=0.$$

当然，$\pi(f)=\int f\,\mathrm{d}\pi$. 在后一情况下，因为 $D(1,1)=0$, 故有 $\lambda_0=0$. 此时 $\lambda_1=\lambda_1-\lambda_0$ 也称为 **谱隙**. 自此以后，凡讨论 λ_1 时，总假定 $K=0$. 标准例子是有限矩阵 $Q=(q_{ij})$ ，它的非对角线元素非负；不失一般性，可设 Q 的每一行和 ≤ 0. 假定 Q 关于 $\pi=(\pi_i)$ 可逆： $\pi_i q_{ij}=\pi_j q_{ji}$. 则可取 $J_{ij}=\pi_i q_{ij}\,(i\neq j)$, $J_{ii}=0$, $K_i=-\sum_j q_{ij}$. 那么， λ_0 就是在通常意义下 Q 的最大特征值；而当 Q 的每一行和为零时， λ_1 就是 Q 的常义非零最大特征值．换言之，此时的主特征值就是常义的第一 (非零) 特征值；而这里所定义的表达式称为 **古典变分公式**. 然而，对于无限矩阵，常义的特征值可能不存在，故改用上述定义．另一标准例子是泛函分析中常见的有界 Fredholm 算子．

我们主要关心的是 λ_1. 首先是何时有 $\lambda_1>0$?

1.2 谱隙存在性判准

我们先给出一种便于记忆的非正式描述．

收稿日期： 1998-10-17.
国家自然科学基金及 Qiushi Sci. & Tech. Found., DPFIHE., MCSEC. 和 MCMCAS. 的资助．

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

判准略述(陈木法、王凤雨， 1998[15]) $\lambda_1 > 0 \Longleftrightarrow$ 存在紧集 A 使得 $\lambda_0(A^c) > 0$, 此处

$$\lambda_0(A^c) = \inf\{D(f,f):\ f|_A = 0,\ \pi(f^2) = 1\}.$$

这之所以可称为判准，是因为关于 λ_0 是否为正我们有很好的切实可行的判准．粗略地说， λ_0 为正当且仅当极大值原理成立．因为有极大值原理这一数学工具，所以历史上出现了大量 (>2000 篇) 关于估计 λ_0 的文章．相反地，由于缺乏数学工具，关于估计 λ_1 的文章却极少．上述判准实际上适用于相当一般的马氏过程．其想法来自黎曼几何，更准确地讲，来自

定理 1(Cheeger 不等式， 1970) 对于紧黎曼流形 M 上的拉氏算子，我们有

$$\lambda_1 \geq \frac{1}{4}k^2, \quad k := \inf_{M_1, M_2:\, H = M_1 \cap M_2} \frac{\mathrm{Area}\,(H)}{\mathrm{Vol}\,(M_1) \wedge \mathrm{Vol}\,(M_2)}\ (\text{称为 Cheeger 常数}).$$

Cheeger 定理的关键想法有两点：

(1) 使用空间分裂技术： $\lambda_1 \geq \inf_B[\lambda_0(B) \vee \lambda_0(B^c)]$.

(2) 利用等周不等式的想法引进 Cheeger 常数来估计 $\lambda_0(B)$.

定理 1 中的常数 k 来自另一常数 $h = \inf_{M_1 \subset M,\, \partial M_1 \cap \partial M = \emptyset} \frac{\mathrm{Area}\,(\partial M_1)}{\mathrm{Vol}\,(M_1)}$, 它即是等周常数 (回想古典的等周不等式), 用于估计 λ_0, 这解释了 (2). 前一个想法揭示了以 λ_0 来估计 λ_1 的一种基本途径．我们知道，如限于局部紧有限维空间，对于紧集 A, 常有 $\lambda_0(A) > 0$, 这样，若把 (1) 中的 $\inf_B$ 理解为 $\inf_{\text{紧集}\,A}$, 留意当 A 增大时， $\lambda_0(A^c)\uparrow$, 由此看出： λ_1 是否为正，关键在于是否有 $\lambda_0(A^c) > 0$. 后者表示过程以指数式速度命中 A, 从而可把问题归结为紧空间情形．从直观上，这一想法是清楚的．然而，我们不能直接使用上述的 (1), 因为那里的 $\inf_B$ 无法处理；对于我们的定性目标，不能预先假定 $\lambda_0(A)$ 和 $\lambda_0(A^c)$ 的显式估计．再则，我们发现，直接使用空间的分裂技术可能损失太大 (注意 (1) 中所给出的是 “$\geq$”, 而非 “$=$”), 因而我们以 $\lambda_1(A)$ (它表示把对称型 D 限于集合 A 上所导出的 λ_1, 通常大于原来的 λ_1) 代替 $\lambda_0(A)$ 并且允许两区域重叠．最终的解答详述如次：

定理 2(陈木法、王凤雨， 1998[15]) 设 $K = 0$, $A \subset B$, $0 < \pi(A)$, $\pi(B) < 1$. 则

$$\frac{\lambda_0(A^c)}{\pi(A)} \geq \lambda_1 \geq \frac{\lambda_1(B)[\lambda_0(A^c)\pi(B) - 2M_A\pi(B^c)]}{2\lambda_1(B) + \pi(B)^2[\lambda_0(A^c) + 2M_A]},$$

此处 $M_A = \operatorname*{ess\,sup}_A{}_\pi J(\mathrm{d}x, A^c)/\pi(\mathrm{d}x)$ $\big(\operatorname*{ess\,sup}_A{}_\pi f$ 表示函数 f 关于 π 在集合 A 上的本征上确界$\big)$.

为看出 $\lambda_1 > 0 \Longleftrightarrow \lambda_0(A^c) > 0$, 留意若 $\lambda_0(A^c) > 0$, 则可选充分大紧集 B 使得分子大于零，因而 $\lambda_1 > 0$. 反之显然．

1.3 有界跳过程的 Cheeger 不等式

Cheeger 不等式是概率学家在此方向的研究中向几何学家学来的最主要的数学工具．具体地说，考虑可逆跳过程：转移速率为 $q(x, \mathrm{d}y)$. 可逆性意指 $J(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) := \pi(\mathrm{d}x)q(x, \mathrm{d}y)$ 对称．取 $K(\mathrm{d}x) = 0$. 典型结果如次：

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

定理 3(Lawler & Sokal, 1988) 设 $M := \sup_x q(x, E\setminus\{x\}) < \infty$. 则 $2k' \geq \lambda_1 \geq \dfrac{k'^2}{2M}$, 其中 k' 是 Cheeger 常数，稍后再定义.

我们认为这是国外研究 λ_1 的最重要的结果. 事实上，此定理已写入下面六部著作.

1. Chen Mufa(1992). From Markov Chains to Non-Equilibrium Particle Systems. World Scientific, Singapore.

2. Sinclair A(1993). Algorithms for Random Generation and Counting: A Markov Chain Approach. Birkhäuser.

3. Colin de Verdière Y(1993–1994). Spectres de Graphes. U. de Grenoble I, Inst. Fourier.

4. Chung F R K(1997). Spectral Graph Theory. CBMS, 92, AMS, Providence, Rhode Island.

5. Saloff-Coste L(1997). Lectures on finite Markov chains. LNM **1665**, 301–413, Springer-Verlag.

6. Aldous D G & Fill J A(1994–). Reversible Markov Chains and Random Walks on Graphs. URL www.stat.Berkeley.edu/users/aldous/book.html.

从这些书籍的标题已经可以看出特征值估计的广泛应用. [2] 把此定理应用于随机算法. 大家知道，随机算法的引入乃是计算机科学近年来的重大进步. 其中一部分算法用的是马氏链，此时算法的效率主要取决于 λ_1 (见下段). 这里的 [3-6] 也都与随机算法有关，但侧重于图论. 利用特征值估计来刻画图不变量是图论近些年来的重大成就. 除了 Cheeger 不等式之外，还有 Li-Yau 方法也被引入图论，以上这些工作大多集中于有限马氏链. 即使在这种最“简单 ”的情形，也是以往从未认真研究过的. 因而有人把近些年来的研究新潮流称为“马氏链的复兴”.

我们对特征值估计 [1] 的兴趣主要是为研究相变现象. 关于此专题已有众多优美成果，详见综述报告 [12] (此报告中搜集了大约 120 种文献，其多数不在这里列出以节省篇幅).

1.4 三种收敛性

为什么主特征值这么有用？因为谱理论是每一数学分支的核心组成部分，而主特征值乃谱的主项. 例如说目前研究较多的 λ_1, 它刻画了 L^2 指数式收敛速度. 假设 $(P_t)_{t\geq 0}$ 为过程所决定的半群. 那么，使不等式

$$\|P_t f - \pi(f)\| \leq \|f - \pi(f)\| e^{-\varepsilon t}, \quad t \geq 0, \quad f \in L^2(\pi)$$

成立的最大的 ε 就是 λ_1. 与它紧密联系的有对数 Sobolev 常数

$$\alpha = \inf\{D(f,f)/\pi(f^2 \log|f|) : \pi(f^2) = 1\}.$$

与 λ_0 的定义相比，这里分母多了对数因子 $\log|f|$. 此常数 α 刻画了过程依相对熵的指数式收敛：

$$\text{Ent}\,(\mu P_t, \pi) \leq \text{Ent}\,(\mu, \pi) e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0.$$

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

熟知 $\lambda_1 \geq \alpha$. 早期研究 α 的原因之一是它比 λ_1 更容易估计 (特别是对于扩散). 现在看来, 还是 λ_1 好处理一些, 因为后者有谱理论的帮助. 关于对数 Sobolev 不等式, 新近王凤雨取得了优美的成果 (包括连续和离散两情形)[18-20].

应当指出, 在马氏过程的发展史中, 曾长期研究了指数遍历性:

$$\|P_t(x,\cdot)-\pi\|_{\text{Var}} \leq C(x)e^{-\beta t}, \qquad x\in E,\ t\geq 0,$$

其中 $C(x)$ 为只依赖于 x 的常数. 当然, 此收敛性与 L^2 指数式收敛相差甚远, 所用的拓扑远非等价. 然而, 我们却有

定理 4(陈木法, 1998[13,14]) 对于马氏链, L^2 指数式收敛 $\Longleftrightarrow$ 指数遍历性. 此外, 最大遍历指数 $\beta \geq L^2$, 收敛指数 $\lambda_1 \geq$ 对数 Sobolev 常数 α.

在适当条件下, 此结论对于更一般的跳过程和扩散过程也是对的. 它的好处是不言而喻的, 两方面的研究相得益彰.

1.5 新型 Cheeger 不等式

以上这些工作, 或多或少得益于我们关于 Cheeger 不等式的研究. 让我们重新考察一下定理 3, 当 M 有限时, 从定性的角度看, $\lambda_1>0$ 当且仅当 $k'>0$, 因而该定理已十分完美. 然而, 尽管我们早就知道 [1] 无界情形总可以通过有界逼近来处理; 但问题在于: 由于出现了 M, 取极限时, 定理 3 的下界估计总趋于零而失效. 这样, 如何取消 M 便是十年来的一个挑战性问题, 直至最近才获解决.

定理 5(陈木法、王凤雨, 1998[15]) 对于一般的对称型, 我们有

$$\lambda_1 \geq \frac{{k^{(1/2)'}}^2}{1+\sqrt{1-{k^{(1)'}}^2}},$$

其中 $k^{(\alpha)'}$ 为常数.

留意我们的对称型可以非常无界, 但此处并不出现上界 “M”. 更加出乎意料的是, 此估计可达精确, 这是先前所没有的. 因而此结果似乎是 Cheeger 不等式的最终形式, 尽管它依然有可能失效.

这里只介绍如何克服无界的困难. 自然地, 想办法把 (J,K) 有界化. 为此, 选对称函数 $r(x,y)\geq 0$ 和 $s(x)\geq 0$, 使得作为 $L^1_+(\pi)\to\mathbb{R}_+$ 的算子, 算子范数 $\|J^{(1)}(\cdot,E)+K^{(1)}\|_{\text{op}} \leq 1$, 此处

$$J^{(\alpha)}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)=I_{\{r(x,y)>0\}}\frac{J(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)}{r(x,y)^\alpha}, \quad K^{(\alpha)}(\mathrm{d}x)=I_{\{s(x)>0\}}\frac{K(\mathrm{d}x)}{s(x)^\alpha}, \quad \alpha\geq 0.$$

当 $\alpha=0$ 时, 即是原来的 (J,K). 当 $\alpha=1$ 时, 我们使用了由 $(J^{(1)},K^{(1)})$ 产生的有界对称型. 但我们还需要使用另外一个 $(J^{(1/2)},K^{(1/2)})$. 最后, 我们终于可以定义新的 Cheeger 常数:

$$k^{(\alpha)'}=\inf_{\pi(A)\in(0,1)}\frac{J^{(\alpha)}(A\times A^c)}{\pi(A)\wedge\pi(A^c)}, \quad \alpha\geq 0.$$

与几何情形相比, 分母是一样的, 但分子不同.

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

2 谱隙下界的新变分公式

前一部分我们处理了积分算子的主特征值问题，其实那些想法同样适用于微分算子．反之，在这一部分里，我们只处理微分算子，但方法完全适用于积分算子．

2.1 几何上估计 λ_1 的故事

前面的介绍还不易看出特征值估计问题的艰深．下面我们介绍几何的故事，从中不难体会出这类硬数学问题的难度．

考虑紧黎曼流形上的拉氏算子 Δ, 它的谱是离散的： $\cdots \le -\lambda_2 \le -\lambda_1 < -\lambda_0 = 0$ (可能重复)．我们也有变分公式 $\lambda_1 = \inf\{D(f,f):\ f \in C^1(M),\ \pi(f)=0,\ \pi(f^2)=1\}$, 只是把对称型 $D(f,f)$ 换成 $\int_M \|\nabla f\|^2$．就我们所知，关于这一论题，已出版五本著作 (限于几何部分而不包括一般的谱理论论著)：

7. Chavel I.(1984) Eigenvalues in Riemannian Geometry. Academic Press.

8. Bérard P H(1986). Spectral Geometry: Direct and Inverse Problem. LNM. 1207:, Springer-Verlag.

9. Yau S T, Schoen R(1988). Differential Geometry. Science Press (In Chinese), Beijing, China.

10. Li P(1993). Lecture Notes on Geometric Analysis. Seoul National Univ., Korea.

11. 马传渔 (1993). 黎曼流形的谱．南京：南京大学出版社．

想法是使用流形的维数 d, 直径 D 和 Ricci 曲率的下界 $K \in R$： $\text{Ricci}_M \ge Kg$ (g 为黎曼度量) 来估计第一 (非平凡) 特征值 λ_1．下表中列出八个最精彩的下界估计．

Lichnerowicz (1958). $$\underline{\underline{\frac{d}{d-1}K}}, \quad K \ge 0. \tag{1}$$

Bérard, Besson & Gallot (1985). $$\underline{\underline{d\left\{\frac{\int_0^{\pi/2}\cos^{d-1}t\,\mathrm{d}t}{\int_0^{D/2}\cos^{d-1}t\,\mathrm{d}t}\right\}^{2/d}}}, \quad K = d-1 > 0. \tag{2}$$

Li and Yau (1980). $$\frac{\pi^2}{2D^2}, \quad K \ge 0. \tag{3}$$

Zhong and Yang (1984). $$\underline{\underline{\frac{\pi^2}{D^2}}}, \quad K \ge 0. \tag{4}$$

Li and Yau (1980). $$\frac{1}{D^2(d-1)\exp\left[1+\sqrt{1-4D^2K(d-1)}\right]}, \quad K \le 0. \tag{5}$$

Cai (1991). $$\underline{\underline{\frac{\pi^2}{D^2}+K}}, \quad K \le 0. \tag{6}$$

Yang (1989) and Jia (1991). $$\underline{\underline{\frac{\pi^2}{D^2}e^{-\alpha}}}, \quad \text{若 } d \ge 5, \quad K \le 0. \tag{7}$$

Yang (1989) and Jia (1991). $$\frac{\pi^2}{2D^2}e^{-\alpha'}, \quad \text{若 } 2 \le d \le 4, \quad K \le 0. \tag{8}$$

这里， $\alpha = D\sqrt{|K|(d-1)}/2$ 而 $\alpha' = D\sqrt{|K|((d-1)\vee 2)}/2$. 其中有五个是最优估计 (下划双线者)．第一个估计对于二维以上的单位球面达到精确；第四、六、七个估

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

计对于单位圆均达到精确. 从此表中可以看出, 几何学家经过 40 年的努力, 已获得相当系统和完美的图案. 这正是我们的原始的出发点, 向几何学家学习, 学习他们的方法 (如同国外概率学家已经做过的那样, 学到了 Cheeger 不等式), 特别是我国学者的新贡献 (导源于 Li-Yau 方法). 哪曾想到, 我们会走上另一条道路, 即采用耦合方法这一概率工具去研究几何的特征值估计. 更加梦想不到的是我们竟然找到了一种新的变分公式.

2.2 新变分公式

定理 6(一般公式. 陈木法、王凤雨, 1997)

$$\lambda_1 \geq \sup_{f\in\mathcal{F}} \inf_{r\in(0,D)} \frac{4f(r)}{\int_0^r C(s)^{-1}\,\mathrm{d}s\int_s^D C(u)f(u)\,\mathrm{d}u},$$

此处

$$\mathcal{F}=\{f\in C[0,D]: f \text{ 在 } (0,D) \text{ 上为正}\}, C(r)=\cosh^{d-1}\left[\frac{r}{2}\sqrt{\frac{-K}{d-1}}\right].$$

新变分公式的价值在于下界估计, 乃古典变分公式的对偶. 出于好奇, 我曾追查过古典变分公式的出处. 它可追溯到 Lord S. J. W. Rayleigh(1877) 和 E.Fischer(1905), 但在历史上从未有过这种对偶公式. 毫无疑问, 新公式可提供大量新估计, 即使是平凡情形 $f=1$, 所得出的估计在几何上也非平凡. 将此公式依次应用于下述初等试验函数 $\sin(\beta r)$, $\sin(\alpha r)$, $\sin(\beta r)$ 和 $\cosh^{d-1}(\alpha r)\sin(\beta r)$ (常数 α 同上, $\beta=\frac{\pi}{2D}$), 我们得出如下推论.

推论 7(陈木法、王凤雨, 1997)

$$\lambda_1 \geq \frac{\pi^2}{D^2}+\max\left\{\frac{\pi}{4d}, 1-\frac{2}{\pi}\right\}K, \quad K\geq 0. \tag{9}$$

$$\lambda_1 \geq \frac{dK}{d-1}\left\{1-\cos^d[\alpha/(d-1)]\right\}^{-1}, \quad d>1, \quad K\geq 0. \tag{10}$$

$$\lambda_1 \geq \frac{\pi^2}{D^2}+\left(\frac{\pi}{2}-1\right)K, \quad K\leq 0. \tag{11}$$

$$\lambda_1 \geq \frac{\pi^2}{D^2}\sqrt{1-2D^2K/\pi^4}\,\cosh^{1-d}[\alpha/(d-1)], \quad d>1, \quad K\leq 0. \tag{12}$$

其中, (9) 改进了 (4), (10) 改进了 (1) 和 (2), (11) 改进了 (6), (12) 改进了 (7) 和 (8). 这样, 新公式全面地改进了上述全部估计. 应当特别指出, 以上结果也适用于凸边界流形 (Neumann 边界条件). 此时, 几何学家普通认为上述表中的估计均成立. 然而, 只是到了 1990 年, J. F. Escobar 才得出 Lichernerowicz 估计. 而其它几种最优估计均未得到, 更不用说上述推论所列的估计了. 换言之, 对于带边界情形, 除了 (1) 之外, 我们的估计都是新的. 此外, 新方法也适用于非紧流形, 椭圆算子和马氏链.

2.3 证明要点

讲一下我们证明的要点也十分有趣. 首先, 设 $g(\neq$ 常数$)$ 为 λ_1 的特征函数, 则 $E^x g(X_t)=g(x)e^{-\lambda_1 t}$ 对于一切 $t\geq 0$ 成立. 这给出了 λ_1, g 和过程 (X_t)(出发点为 x)

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

三者之间的关系. 另一方面，耦合性质给出 $\widetilde{E}^{x,y}g(X_t)=E^x g(X_t)$. 这些关系当然也适用于从 y 出发的过程 (Y_t). 于是有

$$\begin{aligned}e^{-\lambda_1 t}|g(x)-g(y)|&=|E^x g(X_t)-E^y g(Y_t)|=\left|\widetilde{E}^{x,y}\left[g(X_t)-g(Y_t)\right]\right|\\&\le L(g)\widetilde{E}^{x,y}\rho(X_t,Y_t)\le L(g)\rho(x,y)e^{-\alpha t},\quad t\ge 0,\end{aligned}$$

此处 $L(g)$ 是 g 关于距离 ρ 的 Lipschitz 常数，最后一步用到了如下关键估计

$$\widetilde{E}^{x,y}\rho(X_t,Y_t)\le\rho(x,y)e^{-\alpha t},\quad t\ge 0. \tag{13}$$

在前一式中命 $t\to\infty$, 立即得出结论 $\lambda_1\ge\alpha$.

2.4 最优耦合

在估计式 (13) 中，既要构造好的耦合、又要构造好的距离. 这些问题都易问不易答，既无明显的入手之处、又无法预料最终的结局. 详细的想法，已在 [12] 中一步一步地作了介绍. 关于后者，我们花费了整整三年的时间. 关于前者，在之前的六年里我们曾做过三次. 最后在 1993 年才找到了一种优化的办法. 首先，暂且固定距离 ρ, 我们希望找出耦合，使得 $\widetilde{E}^{x,y}\rho(X_t,Y_t)$ 越小越好. 这引导我们寻求马氏耦合，使得它达到 $\inf\widetilde{E}^{x,y}\rho(X_t,Y_t)$, 其中的 inf 跑遍一切马氏耦合. 这引出了 ρ 最优耦合概念. 此概念不仅使我们找到了一些新的耦合方法，而且迄今为止，我们所得到的全部最优估计，都是通过最优耦合得到的.

我之所以复习这个最优耦合概念，主要原因是张绍义最近作了重要推广，他使用非负下半连续函数 φ 代替上面的距离函数 ρ. 作为这种最优耦合的重要应用，他证明了下述基本定理.

定理 8(张绍义, 1998[21]) 两个转移概率 (或跳过程) 保序 $\Longleftrightarrow$ 存在保序的马氏耦合.

此定理多少有些意外，因为我们已知此结论对于扩散过程不真. 回想 V. Strassen (1965) 的著名结果：两个概率测度保序当且仅当存在一个保序耦合. 这乃是众多论著反复引用的一条基本定理. 原因在于：序结构乃是数学的基本结构之一，因而随机结构必定是随机数学的基本结构之一. 现在，关于概率测度的耦合保序性被延拓到转移概率 (或跳过程) 的马氏耦合的保序性，自然有重要意义.

在此基础上，张余辉 [22] 最终完成了两个跳过程保序性基于算子的判准. 这个问题，我们曾研究了多年. 先前，只完成了同一跳过程保序性的判准，而在两个过程不同时，施加了额外的条件.

我们的 ρ 最优性概念，导源于一种概率距离 — Wasserstein 距离. 有趣的是，类似的概率距离也是 Talagrand [17; 定理 1.1] 的出发点. 该文的定理 1.2 也使用了一种连续函数 φ 代替距离函数 ρ. 由此猜测，以上工作对于“测度集中现象”这一论题 [16] 的研究会有所帮助.

致谢 本文是“第 25 届随机过程及其应用会议”(1998.7, 美国，Oregon) 和“第六次全国概率统计会议”(1998.10, 北京) 的大会报告. 作者感谢会议的资助，也感谢 NSFC, Qiu Shi Sci. & Tech. Found., DPFIHE., MCSEC. 和 MCMCAS. 的资助.

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

参考文献

12 Chen Mufa.(1997) Coupling, spectral gap and related topics. *(I): Chin. Sci. Bulletin*, 42(14): 1472-1477 (Chinese Edition); 42(16): 1321-1327 (English Edition). (II): 42(15): 1585-1591 (Chinese Edition); 42(17): 1409-1416 (English Edition). (III): 42(16): 1696-1703 (Chinese Edition); 1997, 42(18): 1497-1505 (English Edition).

13 Chen Mufa.(1998) Estimate of exponential convergence rate in total variation by spectral gap. *Acta Math. Sin. Ser. (A)*, 41(1): 1–6 (Chinese Edition); *Acta Math. Sin. New Ser.*, 14(1): 9–16.

14 Chen Mufa.(1998) Equivalence of exponential ergodicity and L^2-exponential convergence for Markov chains. Preprint.

15 Chen Mufa and Wang F. Y.(1998) Cheeger's inequalities for general symmetric forms and existence criteria for spectral gap. Preprint. 摘要：科学通报 43(14): 1475–1477; 43(18):(英文版) 1516–1519.

16 Ledoux M.(1997) Concentration of measure and logarithmic Sobolev inequalities. Preprint, http://www-sv.cict.fr/lsp/Ledoux/.

17 Talagrand M.(1996) Transportation cost for Gaussian and other product measures. *Geom. Funct. Analy.*, 6(3): 587–600.

18 Wang Fengyu.(1997) Logarithmic Sobolev inequalities on noncompact Riemannian manifolds. *Prob. Th. Rel.*, Fields, 109: 417–424.

19 Wang Fengyu.(1998) Harnack inequalities for log-Sobolev functions and estimates of log-Sobolev constants. Preprint.

20 Wang Fengyu.(1998) Sobolev inequalities and essential spectrum for general symmetric forms. Preprint.

21 Zhang S Y.(1998) Existence and application of optimal Markovian coupling with respect to nonnegative lower semi-continuous functions. To appear in *Acta Math. Sin. ser. B.*

22 Zhang Y H.(1998) Sufficient and necessary conditions for stochastic comparability of jump processes. To appear in *Acta Math. Sin. ser. B.*

Recent Story of Estimation of Principal Eigenvalues

Chen Mufa

(Dept. of Math., Beijing Normal University, Beijing, 100875, P. R. China)

Abstract Two general methods for estimating the principal eigenvalues are introduced in the paper. We show how the first method came from Riemannian geometry applies to probability theory and how the second one goes in the opposite way. The main results on the estimation are also surveyed.

Key words principal eigenvalue; spectral gap; symmetric form; Cheeger's inequality

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net