应用概率统计 第八卷
第四期 1992年11月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 8. No. 4. Nov. 1992

经济最优化的随机模型(II)

陈 木 法*
(北京师范大学)

摘　　要

本文研究随机经济模型的稳定性. 首先, 我们讨论一种类似于决定性情形的弱稳定性. 然后, 我们证明: 在较弱的条件下, 从决定性的初始产综出发, 齐次的随机模型必定走向崩溃.

设 A 和 x 分别为 d 阶方阵和 d 维行向量. 以 $A\geqslant0$ 和 $x\geqslant0$ 表逐元非负. 类似地, $A>0$ 和 $x>0$ 表逐元为正. 若 $A\geqslant0$, 以 $\rho(A)$表 A 的最大特征根. 当 A 还是不可约时, 就有 $\rho(A)>0$.

§1. 无消费情形的华罗庚基本定理

本文只研究无消费情形, 为读者方便, 我们先回顾如下的

基本定理 设 $A\geqslant0$ 为 d 阶不可约、可逆方阵, u 为对应于 $\rho(A)$的左正特征向量, $x_n=x_0A^{-n}$, $n\geqslant1$. 如 $x_0=u$, 则

$$x_n=\rho(A)^{-n}u,\quad n\geqslant1.$$

从而对于一切 n, x_n 都是正向量. 再设 $A^{-1}\geqslant0$. 如 $0<x_0\neq u$(不计常数因子), 则

$$x_n>0$$

不可能对一切 n 成立.

如文[1], [2]所述, 本定理证明的关键在于 A^n 有特征根 $\rho(A)^n$. 它决定了最优解 $x_0=u$ 所对应的最佳增长速度 $\rho(A)^{-n}$.

§2. 弱 稳 定 性

现在转入随机模型. 由前文[2]知, 对于无消费情形,

$$x_0=x_1A_1=x_2A_2A_1=\cdots=x_nA_nA_{n-1}\cdots A_1.$$

其中 $\{A_n\}_{n\geqslant1}$ 为 i.i.d. $A_1\geqslant0$, a.s. 命

$$M_n=A_nA_{n-1}\cdots A_1,\quad n\geqslant1.$$

由文[1], [2]的启发, 我们应研究 M_n 的极限性质.

本文1989年9月4日收到, 1991年8月8日收到修改稿.

* 霍英东教育基金和国家自然科学基金资助.

首先是 M_n 的阶，仿决定性情形，自然猜想为 $\prod_{j=1}^{n}\rho(A_j)$. 倘若如此，我们便可转去研究 $\prod_{j=0}^{n-1}A_{n-j}/\rho(A_{n-j})$ 的极限性质(这是文献[1]，(II)所提出的一个研究课题). 由于

$$\frac{1}{n}\log\prod_{j=1}^{n}\rho(A_j)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\log\rho(A_j),$$

由 Kolmogorov 强大数定律知，只要

$$\mathbb{E}|\log\rho(A_1)|<\infty$$

就有

$$\frac{1}{n}\log\prod_{j=1}^{n}\rho(A_j)\xrightarrow{\text{a.s.}}\mathbb{E}\log\rho(A_1),\quad n\to\infty.$$

于是 $\prod_{j=1}^{n}\rho(A_j)$ 有决定性的收敛指数 $\mathbb{E}\log\rho(A_1)$. 随后将看到，这第一步猜测就错了. 究其因，M_n 与 $\rho(M_n)$ 同阶，而后者显然不同于 $\prod_{j=1}^{n}\rho(A_i)$. 由此看出，随机矩阵的极限理论与通常的极限理论有着根本的区别.

让我们再回到上节的基本定理. 我们已经证得[1],[2]：当 A 是不可约、非周期时，$(A/\rho(A))^n$ 极限是秩为 1 的正方阵. 而构成这个方阵的行向量给出经济模型的唯一的稳定解. 对于随机模型，我们把这一性质放宽为

定义 称 $\{A_n\}_{n>1}$ 或 $\{M_n=A_n\cdots A_1\}_{n>1}$ 为弱稳定的，如果 M_n 依分布收敛于集中于正方阵的极限.

我们需要如下类似于不可约、非周期性条件:

(H_1). $A_1\geqslant 0$, a.s., 存在 m 使

$$\mathbb{P}[M_m(i,\ j)>0\ \text{对一切}\ i,\ j\ \text{成立}]>0.$$

(H_2). $\mathbb{P}[A_1\ \text{有一零行或零列}]=0$.

对于重要的一类随机矩阵：$A_1>0$, a.s, 这两个条件自然满足。此外，如 $\mathbb{E}A_1<\infty$ 且 (H_1) 成立，则

$$(\mathbb{E}A_1)^m(i,\ j)=\mathbb{E}M_m(i,\ j)>0,\quad 1\leqslant i,\ j\leqslant d.$$

因而 $\mathbb{E}A_1$ 是不可约、非周期的. 当然更有 $\rho(\mathbb{E}A_1)>0$. 由[3; 定理 1](凡应用[3]中的结果，需将 A_n 和 M_n 分别换成它们的转置 A_n^* 和 M_n^*)知，如 (H_1) 和 (H_2) 满足，为使 $\{A_n\}$ 是弱稳定的，必需

$$\mathbb{E}A_1<\infty\quad \text{且}\quad \rho(\mathbb{E}A_1)=1.$$

这表明：$\prod_{j=0}^{n-1}A_{n-j}$ 的正确的收敛指数只能是

$$\log\rho(\mathbb{E}A_1)$$

而非前面所猜测的 $\mathbb{E}\log\rho(A_1)$. 命

$$\overline{A}_j=A_j/\rho(\mathbb{E}A_1),$$

$$\overline{M}_n=\prod_{j=0}^{n-1}\overline{A}_{n-j}.$$

由[3; 定理 2]得出如下结果:

定理 1. 设 (H_1) 和 (H_2) 满足. 再设

$$\mathbb{E}A_1(i,\ j)<\infty,\quad 1\leqslant i,\ j\leqslant d.$$

则 $\{\overline{A}_n\}$ 是弱稳定的当且仅当

$$\rho(\overline{M}_n)=1, \text{ a.s. } \quad n\geqslant 1. \tag{1}$$

这个定理告诉我们，弱稳定性需要很强的条件(1)．例如说，文[2]中的2/3模型通常就不满足(1)．因此，一般地讲，我们不能期望随机模型有弱稳定解．

§3．崩溃概率

使用上节记号，并假定

$$\mathbb{P}[\det A_1=0]=0. \tag{2}$$

我们关心的是从非随机的$x_0>0$出发，

$$x_n=x_0M_n^{-1}, \quad n\geqslant 1$$

的崩溃概率$\mathbb{P}[T<\infty]$，此处

$$T=\inf\{n\geqslant 1, \exists\, j:1\leqslant j\leqslant d \text{ 使 } x_n^{(j)}\leqslant 0\}.$$

就此目的而言，上节所讨论的弱稳定性（或非随机规范化后的弱稳定性）并非完全必要．有趣的是，若采用适当的随机规范化：

$$\overline{M}_n=M_n/\|M_n^*\|,$$

其中对任一d阶方阵B，

$$\|B\|=\max_{1\leqslant i\leqslant d}\sum_{j=1}^{d}|B(i, j)|,$$

则我们常有"弱稳定性"：

引理（[3; 引理2]）．设(H_1)和(H_2)满足．则以概率1，当n充分大时$M_n>0$而且$\overline{M}_n^*$依分布收敛于RL，其中R和L分别为正的列、行向量，使得

$$\max_{1\leqslant i\leqslant d}R(i)=1, \quad \sum_{j=1}^{d}L(j)=1, \text{ a.s.} \tag{3}$$

易见$\|M_n^*\|>0$, a.s.，从而

$$x_n>0 \Leftrightarrow x_0M_n^{-1}>0 \Leftrightarrow x_0\overline{M}_n^{-1}>0, \quad n\geqslant 1.$$

故
$$\mathbb{P}[T=\infty]=\mathbb{P}[x_n>0, \forall n\geqslant 1]=\mathbb{P}[x_0\overline{M}_n^{-1}>0, \forall n\geqslant 1].$$

我们将证明如下结果：

定理2．设(H_1)、(H_2)和条件(2)满足，给定$x_0>0$，$\max\limits_{1\leqslant i\leqslant d}x_0(i)=1$．则$\mathbb{P}[T=\infty]\leqslant\mathbb{P}[R^*=x_0]$．特别地，如$\mathbb{P}[R^*=x_0]=0$，则从$x_0$出发，以概率1走向崩溃．

证　由Skorohod定理（见[4; 第9页，定理2.7]）知，我们可构造适当的概率空间，使得上述引理中的依分布收敛变成a.s．收敛，即存在$\mathbb{P}$零集Λ，使得在Λ^c上，

$$\overline{M}_n^*\to RL, \quad n\to\infty.$$

记$\bar{x}_n=x_0\overline{M}_n^{-1}$．今固定$\omega\in\Lambda^c$．如

$$\bar{x}_n(\omega)>0, \quad \forall n\geqslant 1,$$

则必定存在子列$n_k=n_k(\omega)$，使得

$$\lim_{k\to\infty}\bar{x}_{n_k}(\omega)\equiv x^*(\omega)\in[0, \infty]^d.$$

然而
$$x_0=\lim_{k\to\infty}[x_0M_{n_k}(\omega)^{-1}M_{n_k}(\omega)]=\lim_{k\to\infty}[x_0\overline{M}_{n_k}(\omega)^{-1}\overline{M}_{n_k}(\omega)]$$
$$=\lim_{k\to\infty}[\bar{x}_{n_k}(\omega)\overline{M}_{n_k}(\omega)]=x^*(\omega)L^*(\omega)R^*(\omega).$$

由此及 x_0, L, $R>0$ 导出

$$C=x^*L^*\in(0,\ \infty),\ \text{a.s.}$$

进而由 $\max\limits_{1\le i\le d} x_0(i)=\max\limits_{1\le i\le d} R(i)=1$ 知 $C=1$, a.s. 故在 A^C 上，有

$$[T=\infty]\subset[R^*=x_0],\ \text{a.s.}$$

致谢．感谢审稿人对本文初稿的宝贵意见．

参 考 文 献

[1] 华罗庚，计划经济大范围最优化的数学理论，(I)-(XI)，科学通报，1984 年第 12 期—1985 年第 24 期．

[2] 陈木法，经济最优化的数学模型(I)，应用概率统计，8(1992)，289—294

[3] Kesten, H. and Spitzer, F. (1984), Convergence in distribution of products of random matrices, *Z. Wahrs.* **67**, 363—386.

[4] Ikeda, N. and Watanabe, S. (1981), *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, North-Holland Publishing Company.

STOCHASTIC MODELS OF ECONOMICAL OPTIMIZATION (II)

Mu-Fa Chen

(Beijing Normal University)

Abstract

This paper deals with the stability for the stochastic models of economical optimization. First, we discuss a type of stability which is an analogue of the deterministic situation. Then, we prove that under some weaker assumptions, the homogeneous stochastic models starting from a deterministic initial vector should go to collapse with probability one.