第18卷第3期 数学进展 Vol.18, No.3
1989年7月 ADVANCES IN MATHEMATICS July, 1989

随机场概论*

陈木法

(北京师范大学)

二十几年前，诞生了“随机场”这一概率论与统计物理的交叉学科．它一方面大大扩充了概率论的研究领域，另一方面为统计物理提供了一种严格的数学工具．这个学科及其它概率物理分支，代表着当今数学与物理相互渗透的大潮流的一个重要侧面．新近超导研究的突破，为随机场提出了许多迷人的新课题，带来了巨大的推动力．

本文力图以尽可能短的篇幅，介绍随机场所研究的基本问题．第一节介绍必要的准备知识，包括弱收敛的一些新结果和若干概率距离．后者主要来源于随机场，目前已成为专门的研究方向．第二、三节分别介绍随机场的存在性定理和唯一性定理．后者是三年前才发表的、目前所知的最一般的结果．第四、五节介绍随机场理论的中心问题——相变．前一节是较古老的 Peierls 方法；后一节是反射正性方法，它导源于量子场论，只是最近才被引入随机场．相信会有相当的发展前景．反射正性方法的妙处在于：由它可导出强有力的棋盘估计．

除了第一节结果的证明因容易查到参考书而从略外，所述结果都给出了详细证明．希望读者能够认可本文的可读性，只是对于所用的符号需要有一点儿耐心．

一、概率距离

让我们先从弱收敛谈起．设(Φ,ρ)是一距离空间，$\mathscr{B}=\mathscr{B}(\Phi)$是$\Phi$上的 Borel 域．记$(\Phi,\mathscr{B})$上概率测度的全体为$\mathscr{P}(\Phi)$．$\Phi$上有界连续函数的全体记作$C_b(\Phi)$．设$\mu_n,\mu\in\mathscr{P}(\Phi)$，$n\geqslant 1$．称$\mu_n$弱收敛于$\mu$，记作$\mu_n\Rightarrow\mu$，如若对每$f\in C_b(\Phi)$，$\mu_n(f)\to\mu(f)$．此处$\mu(f)=\int_\Phi f d\mu$．下述结果是熟知的．

(1.1)**定理** 下述断言等价

(i) $\mu_n\Rightarrow\mu$;

(ii) 对于Φ中每一闭集C，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\mu_n(C)\leqslant\mu(C)$；

(iii) 对于Φ中每一开集G，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\mu_n(G)\geqslant\mu(G)$．

弱收敛拓扑是可距离化的．事实上，我们有

(1.2) Lévy–Prohorov 距离

$L(P_1,P_2)=\inf\{\delta: P_1(A)\leqslant P_2(A^\delta)+\delta$ 且 $P_2(A)\leqslant P_1(A^\delta)+\delta$ 对一切闭集 $A\subset\Phi\}$，

* 霍英东教育基金和国家自然科学基金资助课题．
1988年8月13日收到．

此处 $A^{\delta}=\{\varphi\in\Phi:\ \rho(\varphi,\varphi')\leqslant\delta,\ \varphi'\in A\}=\{\varphi\in\Phi:\ \rho(\varphi,A)\leqslant\delta\}$.

$(\mathscr{P}(\Phi),L)$具有很好的拓扑性质。它可分（相应地，完备）当且仅当空间(Φ,ρ)自身可分（相应地，完备）。至于紧性，有如下著名结果

(1.3)Prohorov 判准 设(Φ,ρ)是完备可分距离空间.为使$\mathscr{M}\subset\mathscr{P}(\Phi)$关于弱拓扑相对紧（即$\mathscr{M}$关于弱拓扑的闭包是紧集），充要条件是：对每$\varepsilon>0$，存在$\Phi$中紧集$K_{\varepsilon}$，使得

$$\inf_{\mu\in\mathscr{M}}\mu(K_{\varepsilon})\geqslant 1-\varepsilon.$$

至此，我们对$\mathscr{P}(\Phi)$上的弱拓扑，已经有了比较完整的认识。当然，在$\mathscr{P}(\Phi)$上，还可以定义许多种不同的拓扑结构，我们将很快看到这一点。此刻，让我们再介绍 Dobrushin[8] 关于弱拓扑的一些结果。这些结果更便于应用。

回想测度论（过程论）中的单调类定理，有集合形式（λ系和π系方法）和函数形式（$\mathscr{L}$系方法）两种。后者常比前者方便。下述结果是定理1.1(iii)的函数形式。

(1.4)定理 $\mu_n\Rightarrow\mu$当且仅当对于每一个下半连续函数$f:\Phi\to[0,\infty]$（即对于每d: $0\leqslant d<\infty$，$\{\varphi\in\Phi:\ f(\varphi)>d\}$是开集），有

$$\varliminf_{n\to\infty}\mu_n(f)\geqslant\mu(f).$$

关于 Prohorov 判准，我们也有函数形式。

(1.5)定义 称非负可测函数h（可取值$+\infty$）为紧函数，如对每d：$0\leqslant d<\infty$，$\{\sigma\in\Phi:\ h(\sigma)\leqslant d\}$是紧集。

(1.6)定理 为使$\mathscr{M}\subset\mathscr{P}(\Phi)$相对紧，充要条件是存在紧函数$h$，使$\sup\limits_{\mu\in\mathscr{M}}\mu(h)<\infty$。

例如，设(Φ,ρ)为通常的欧氏空间$\mathbb{R}^{d}$。则$\varphi\to\rho(\varphi,0)$是紧函数。由定理1.6知，若一阶绝对矩一致有界：$\sup\limits_{\mu\in\mathscr{M}}\int_{\Phi}\rho(\varphi,0)\mu(d\varphi)<\infty$，则$\mathscr{M}$是相对集的。

我们将常用可数乘积空间。设S是任一可数集。对每$u\in S$，$(\Phi_u,\rho_u,\mathscr{B}_u)$是完备可分距离空间，$\mathscr{B}_u$为 Borel 域。作乘积空间$\Omega=\prod\limits_{u\in S}\Phi_u$，$\mathscr{F}=\prod\limits_{u\in S}\mathscr{B}_u$。以$\Lambda\subset\subset S$表$\Lambda$为$S$的有限子集。对于给定的$P\in\mathscr{P}(\Omega)$，记$p_{\Lambda}$为$P$在$\prod\limits_{u\in\Lambda}\Phi_u$上的投影*)。显然，投影族$\{p_{\Lambda}:\ \Lambda\subset\subset S\}$是相容的。反之，由 Kolmogorov 扩张定理，相容族$\{p_{\Lambda}:\Lambda\subset\subset S\}$唯一决定$(\Omega,\mathscr{F})$上的一个概率测度。这样，$P\in\mathscr{P}(\Omega)$与它的投影族$\{p_{\Lambda}:\ \Lambda\subset\subset S\}$是一一对应的。

(1.7)定理 集$\mathscr{M}\subset\mathscr{P}(\Omega)$相对紧的充要条件是存在$\Phi_u$上的紧函数族$\{h_u:\ u\in S\}$和常数族$\{C_u:\ u\in S\}$使得

$$\int_{\Phi}h_u(\varphi)p_u(d\varphi)\leqslant C_u,\ u\in S.$$

对于每$P=\{p_{\Lambda}:\ \Lambda\subset\subset S\}\in\mathscr{M}$成立。此处，$p_u=p_{\{u\}}$。

以上结果的证明见[4；§1.4.1]。

---

*）对每$\prod\limits_{u\in\Lambda}\Phi_u$上的可测集$B_{\Lambda}$，定义$p_{\Lambda}(B_{\Lambda})=P\{\sigma\in\Omega:\ (\sigma_u:\ u\in\Lambda)\in B_{\Lambda}\}$.

现在，让我们回到本讲的主题——概率距离。在概率论中，例如对定义在某概率空间上的实值随机变量序列ξ_n和ξ，记相应的分布为P_n和P。我们常考虑如下各种收敛性

$$\begin{tikzcd}
 & L^p\text{收敛} \arrow[d, Rightarrow] & \\
\text{淡收敛} & \text{依概率收敛} \arrow[l, Rightarrow] & \text{a.s.收敛} \arrow[l, Rightarrow] \\
 & \text{弱收敛} \arrow[ul, Leftrightarrow] \arrow[ur, Rightarrow, dotted] & \\
 & (P_n \Longrightarrow P) &
\end{tikzcd}$$

L^p收敛性，a.s.收敛性和依概率收敛性均依赖于参考标架（即我们所使用的概率空间）。但淡收敛（vague convergence）和弱收敛（等价）则不然。另一方面，由 Skorohod 的一个定理（参见[12；定理2.7]），如果$P_n\Rightarrow P$，则我们可选出一个适当的参考概率空间，使得定义在这个空间上有随机变量ξ_n和ξ，ξ_n的分布为P_n（记作$\xi_n\sim P_n$），$\xi\sim P$，而且$\xi_n\xrightarrow{\text{a.e.}}\xi$。这正是本图中弱收敛⇒a.e. 收敛性的含义。因此，如果我们希望找到一种内在的概率距离（即不依赖于参考概率空间），我们应当考虑L^p收敛性的类似物。

回顾通常的L^p度量（距离）定义为

$$\|\xi_1-\xi_2\|_p=[E\rho(\xi_1,\xi_2)^p]^{1/p},\quad p\geqslant 1。$$

置$\xi_i\sim P_i$，$i=1,2$，$(\xi_1,\xi_2)\sim\tilde{P}$。则上式可改写成

$$\|\xi_1-\xi_2\|_p=\left[\int_{\Phi\times\Phi}\rho(\varphi^1,\varphi^2)^p\tilde{P}(d\varphi^1,d\varphi^2)\right]^{1/p}.$$

注意$\tilde{P}$的两个边缘分布分别是P_1和P_2。一般地，如果$\tilde{P}\in\mathscr{P}(\Phi\times\Phi)$，它的两个边缘分布分别是$P_1$和$P_2$，则称$\tilde{P}$为$P_1$和$P_2$的一个耦合。记耦合测度的全体为$\mathscr{K}(P_1,P_2)$。对于给定的$P_1$和$P_2$，独立乘积测度$P_1\times P_2$就是一个耦合测度，从而$\mathscr{K}(P_1,P_2)\neq\phi$。这样，作为一种内在的概率度量，自然应取

$$K_p(P_1,P_2)=\inf_{\tilde{P}\in\mathscr{K}(P_1,P_2)}\left[\int_{\Phi\times\Phi}\rho(\varphi^1,\varphi^2)^p\tilde{P}(d\varphi^1,d\varphi^2)\right]^{1/p},$$

这称为p阶 Kantonovich 距离。过去，也叫做Kantonovich-Rubinstein 或 Kantonovich-Rubinstein-Ornstein-Vasserstein距离或KRW距离等。这包含了许多历史的误解。

到目前为止，已知的概率距离大约有15种之多（参见综述文章 Zolotarev [19]）。但我们将只涉及L，K_1,K_2及变差距离

$$\|P_1-P_2\|_{Var}=2\sup_{A\in\mathscr{A}}|P_1(A)-P_2(A)|.$$

后者实际上也是一种Kantonovich距离。使用散拓扑

$$d(\varphi,\varphi')=\begin{cases}0,\varphi=\varphi'\\1,\varphi\neq\varphi'\end{cases},$$

则有

(1.8)**定理**(Dobrushin [8])

$$V(P_1,P_2)=\inf_{\tilde{P}\in\mathscr{K}(P_1,P_2)}\int d(\varphi^1,\varphi^2)\tilde{P}(d\varphi^1,d\varphi^2)$$

$$= \frac{1}{2} \| P_1 - P_2 \|_{\text{Var}}.$$

容易看出，一般地说，Kantonovich距离K_p比弱拓扑强，完整的比较如次：

(1.9)**定理**(Dobrushin[8]和Rachev[15])

$P_n \xrightarrow{K_p} P$当且仅当

(i) $P_n \Rightarrow P$；

(ii) $\int \rho(\varphi, \varphi^0)^p P_n(d\varphi) \to \int \rho(\varphi, \varphi^0)^p P(d\varphi)$, $n \to \infty$对某$\varphi^0 \in \Phi$(等价地，一切$\varphi^0 \in \Phi$)成立。

特别地，如ρ有界，则两种距离等价。

要具体地算出K_p，一般是很困难的。目前已知的只有两种特殊情形。

(1.10)**定理**(Vallender[18])

设$P_k \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$，$k=1,2$。分布函数为$F_k(x)$。

则
$$K_1(P_1, P_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} |F_1(x) - F_2(x)| dx.$$

以后，使用K代替K_1。

(1.11)**定理**(Givens和Shorf[10])

设$P_k \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^d)$是服从均值为$m_k$、协方差矩阵为$M_k$的正态分布，$k=1,2$。则

$$K_2[P_1, P_2] = [|m_1 - m_2|^2 + \mathrm{Tr} M_1 + \mathrm{Tr} M_2 - 2\mathrm{Tr}((\sqrt{M_1} M_2 \sqrt{M_1})^{1/2})]^{1/2}.$$

然而，为证$K_p(P_n, P) \to 0$，$n \to \infty$。我们只需找出合适的上界估计，即构造适当的耦合。这经常是办得到的。

下面给出耦合的几种形式

(1.12)**独立耦合**

$$\tilde{P} = P_1 \times P_2.$$

(1.13)**Ornstein耦合** $\Phi = \mathbb{R}, K > 0, P_1 = P_2 = P$.

$$\tilde{P}(B_1 \times B_2) = \iint_{\substack{x_1 \in B_1, x_2 \in B_2 \\ |x_1 - x_2| \le k}} P(dx_1) P(dx_2)$$
$$+ \int_{[x_1 \in B_1 \cap B_2]} P(dx_1) \left[1 - \int_{[x_2 : |x_1 - x_2| \le k]} P(dx_2)\right], \quad B_1, B_2 \in \mathscr{B}(\mathbb{R}).$$

(1.14)**Vasershtein耦合**

$$\tilde{P}(B_1 \times B_2) = (P_1 \wedge P_2)(B_1 \cap B_2) + \frac{(P_1 - P_2)^+(B_1) \cdot (P_2 - P_1)^+(B_2)}{\| P_1 - P_2 \|_{\text{Var}}}.$$

此处，$(P_1 - P_2)^+$是$P_1 - P_2$的Hahn分解的正部，而$P_1 \wedge P_2 = P_1 - (P_1 - P_2)^+$。

关于概率距离，在Zolotarev[19]的新书《独立随机变量和的现代理论》中有较详细的讨论。并且给出对极限理论的许多有趣的应用。对随机场的众多应用可以从Dobrushin等人的论文中找到。关于通常随机过程的耦合和粒子系统的耦合可查阅Liggett的书[13]，和文献[1—7]及其中的参考文献。

二、随机场的存在性

自此以后，我们取$S=\mathbb{Z}^d$，即d维格子整点集．$\mathbb{Z}^d$上的距离取为$|s-t|^2=\sum_{i=1}^{d}|s^{(i)}-t^{(i)}|^2$。如$V$为$\mathbb{Z}^d$的有限子集，则记$V\subset\subset\mathbb{Z}^d$，且用$|V|$表$V$中整点的个数。再命

$$\partial_r V=\{t\in V^c=\mathbb{Z}^d\setminus V: d(t,V)\leqslant r\}, r\geqslant 0。$$

此处$d(t,V)=\inf\limits_{s\in V}|t-s|$，$\partial_r V$称为$V$的$r$边界。

如上一节那样，定义$\Omega=\Phi^{\mathbb{Z}^d}$，$\mathscr{F}=\mathscr{B}(\Phi)^{\mathbb{Z}^d}$。$\sigma=\{\sigma_t: t\in\mathbb{Z}^d\}\in\Omega$称为组态(Configuration)。如果以$V\subset\mathbb{Z}^d$代替$\mathbb{Z}^d$，我们可定义相应的乘积空间$(\Omega_V,\hat{\mathscr{F}}_V)$。对于$V\subset W\subset\mathbb{Z}^d$，$\sigma_V$同时表示$\sigma_W$在$V$上的限制。再记$\mathscr{F}_V=\{A\sigma\prod\limits_{t\in V^c}\Phi: A\in\hat{\mathscr{F}}_V\}\subset\mathscr{F}$

(2.1)**定义**

(i) $P\in\mathscr{P}(\Omega)$称为随机场。记$p=(p_V: V\subset\subset\mathbb{Z}^d)$。

(ii) 对每$V\subset\subset\mathbb{Z}^d$，给定可测核$q_V$：对每$A\in\hat{\mathscr{F}}_V$，$q_V(A|\cdot)\in\mathscr{F}_{V^c}$；对每$\bar{\sigma}\in\Omega$，$q_V(\cdot|\bar{\sigma})\in\mathscr{P}(\Omega_V)$。为方便，常将$q_V(\cdot|\bar{\sigma})$视作$\mathscr{F}$上的概率测度，它在$\hat{\mathscr{F}}_{V^c}$上集中于单点$\{\bar{\sigma}_{V^c}\}$。族$Q=\{q_V: V\subset\subset\mathbb{Z}^d\}$称为一个规范(specification)，如果它满足如下相容条件：对一切$W\subset V\subset\subset\mathbb{Z}^d$，$\bar{\sigma}\in\Omega_{V^c}$，$A\in\mathscr{F}_{V\setminus W}$和$B\in\mathscr{F}_W$，有

$$q_V(A\cap B|\bar{\sigma})=\int_A q_W(B|\bar{\sigma}_{V^c}\cup\sigma_{U\setminus W})q_U(d\sigma|\bar{\sigma})。$$

此处，对于$V_1\cap V_2=\phi$和$\sigma_{V_1},\bar{\sigma}_{V_2}$，$\sigma_{V_1}\cup\bar{\sigma}_{V_2}$是$\Omega_{V_1\cup V_2}$中的元，它在$V_1$上与$\sigma_{V_1}$重合而在$V_2$上与$\bar{\sigma}_{V_2}$重合，称规范$Q=\{q_V\}$是有限程的或$r$规范，如果对每$A\in\hat{\mathscr{F}}_V$，$V\subset\subset\mathbb{Z}^d$，$q_V(A|\cdot)\in\mathscr{F}_{\partial_r V}$(有时也写成$\in\hat{\mathscr{F}}_{\partial_r V}$)；称为零程的，如$q_V(A|\cdot)$与$V^c$中的元素无关，即$r=0$。

(iii) 设$V\subset\subset\mathbb{Z}^d$，称$P\in\mathscr{P}(\Omega)$关于规范$Q$是$V$相容的，如果$P(\cdot|\mathscr{F}_{V^c})=p_V(\cdot|\cdot)=q_V(\cdot|\cdot)$。称随机场$P$与规范$Q$相容（或$P$是对应于$Q$的随机场），如果对于一切$V\subset\subset\mathbb{Z}^d$，$P$关于$Q$是$V$相容的。

将相容性条件改写成函数形式，就是

$$(2.2)\quad \int f(\sigma_V)q_V(d\sigma_V|\bar{\sigma}_{V^c})=\int\left[\int f(\bar{\sigma}_W\cup\sigma_{V\setminus W})q_W(d\bar{\sigma}_W|\sigma_{V\setminus W}\cup\bar{\sigma}_{V^c})\right]\cdot q_V(d\sigma_V|\bar{\sigma}_{V^c}),$$

$$W\subset V\subset\subset\mathbb{Z}^d,\quad f\in b\hat{\mathscr{F}}_V。$$

此处$b\hat{\mathscr{F}}_V$表示有界$\hat{\mathscr{F}}_V$可测函数的全体。

上述所定义的规范，类似于离散参数马氏链．但这里的参数集不是$\{0,1,2,\cdots\}$，而是$\mathbb{Z}^d$。随机场正是多参数随机过程的较早起源．如果把有限集$W\subset(V\subset\subset\mathbb{Z}^d)$理解为将来，$V\setminus W$理解为现在，$V^c$理解为过去。则(2.2)读作：从过去$\bar{\sigma}_{V^c}$先到达现在$\sigma_{V\setminus W}$再进入将来$\sigma_W$。这正是一种典型的多参数随机过程的马氏性。这样，随机场是单参数马氏过程的一种自然的推广。

在统计物理中，规范常是通过系统的Hamilton量来定义的。

(2.3)**Ising模型** $\Phi=\{-1,+1\}$。Hamilton量是

$$H(\sigma)=-\sum_{\{s,t\}:|s-t|=1}\sigma_s\sigma_t,\qquad \sigma\in\Omega.$$

留意Hamilton量是形式和，因为此级数可能发散，它只是表明交互作用为$-\sigma_s\sigma_t$且是紧邻的，即$|s-t|=1$或$r=1$。

(2.4)**各向异性Heisenberg铁磁模型**

$$\Phi=S^2\subset\mathbf{R}^3.$$

$$H(\sigma)=-\sum_{|s-t|=1}(\sigma_s^{(1)}\sigma_t^{(1)}+\sigma_s^{(2)}\sigma_t^{(2)}+a\sigma_s^{(3)}\sigma_t^{(3)}),$$

此处$\sigma_s=(\sigma_s^{(1)},\sigma_s^{(2)},\sigma_s^{(3)})\in S^2,s\in\mathbf{Z}^d$而$a>1$表示异性系数。

(2.5)**一种无界自旋(spin)模型**

$\Phi=\mathbf{R}^n,n\geqslant 1$。

$$H(\sigma)=\sum_{|s-t|=1}|\sigma_s-\sigma_t|^2+\sum_t\Psi(\sigma_t),$$

此处Ψ是满足一定条件的$\mathbf{R}^n$上的可测函数。

适当地定义交互作用函数$U_A(\sigma),A\subset\subset\mathbf{Z}^d$，$\sigma\in\Omega$(在上述例子中，$U_A(\sigma)=0$，如$|A|>2$)，$U_A\in\mathscr{F}_A$，则这些Hamilton量均可统一地写成

$$H(\sigma)=\sum_A U_A(\sigma).$$

进而可定义具有边界条件$\bar\sigma$的条件Hamilton量

$$H_V(\sigma|\bar\sigma)=\sum_{A:A\cap V\neq\Phi}U_A(\sigma_{V\cap A}\cup\bar\sigma_{V^c\cap A})$$
$$=H_V(\sigma_V|\bar\sigma_{V^c}),\quad V\subset\subset\mathbf{Z}^d.$$

在Φ上选用适当的参考测度λ（计数测度或Lebesgue测度等），然后定义

$$q_V(A|\bar\sigma)=\int_A\exp[-\beta H(\sigma_V|\bar\sigma_{V^c})]\prod_{t\in V}\lambda(d\sigma_t)/Z(V,\bar\sigma),$$
$$A\in\mathscr{F}_V.$$

此处$\beta>0$称为反温度（即$\beta=1/kT$，T为温度，k为波尔兹曼常数)，而

$$Z(V,\bar\sigma)=\int\exp[-\beta H(\sigma_V|\bar\sigma_{V^c})]\prod_{t\in V}\lambda(d\sigma_t)$$

是归一化常数，它也称为配分函数（partition function）或统计和（statistical sum）

(2.6)**命题** 如上得到的$Q=\{q_V\}$满足相容条件（2.2）。

证 显然，关于$\lambda(d\sigma_V)=\prod_{t\in V}\lambda(d\sigma_t),q(\cdot|\bar\sigma_{V^c})$有密度函数

$$q_V(\sigma_V|\bar\sigma_{V^c})=\frac{\exp\left[-\beta\sum_{A:A\cap V\neq\Phi}U_A(\sigma_{V\cap A}\cup\bar\sigma_{V^c\cap A})\right]}{Z(V,\bar\sigma)},$$

可在不致发生混淆的情况下把它简记为

$$q_V(\sigma)=q_V(\sigma_V|\bar\sigma_{V^c})=\exp\left[-\beta\sum_{A:A\cap V\neq\phi}U_A(\sigma)\right]/Z(V,\bar\sigma_{V^c}).$$

另一方面，对于具备密度的情形，（2.2）可改写成

$$\int f(\sigma_V)q_V(\sigma_V|\bar\sigma_{V^c})\lambda_V(d\sigma_V)$$

$$=\int\left[\int f(\bar\sigma_W\cup\sigma_{V\setminus W})q_W(\bar\sigma_W|\sigma_{V\setminus W}\cup\bar\sigma_{V^c})\lambda_W(d\bar\sigma_W)\right]q_V(\sigma_V|\bar\sigma_{V^c})\lambda_V(d\sigma_V)$$

$$=\int\prod_{s\in W}\lambda(\bar\sigma_s)\prod_{t\in V\setminus W}\lambda(d\sigma_t)f(\bar\sigma_W\cup\sigma_{V\setminus W})q_W(\bar\sigma_W|\sigma_{V\setminus W}\cup\bar\sigma_{V^c})\int\prod_{t\in W}\lambda(d\sigma_t)q_V$$

$$\cdot(\sigma_{V\setminus W}\cup\sigma_W|\bar\sigma_{V^c})$$

$$=\int\prod_{t\in W}\lambda(\sigma_t)\prod_{t\in V\setminus W}\lambda(d\sigma_t)f(\sigma_W\cup\sigma_{V\setminus W})q_W(\sigma_W|\sigma_{V/W}\cup\bar\sigma_{V^c})\int\prod_{s\in W}\lambda(d\bar\sigma_s)$$

$$\cdot q_V(\sigma_{V\setminus W}\cup\bar\sigma_W/\bar\sigma_{V^c})$$

（将σ_W与$\bar\sigma_W$互换）

$$=\int\lambda_V(d\sigma_V)f(\sigma_V)q_W(\sigma_W|\sigma_{V\setminus W}\cup\bar\sigma_{V^c})\cdot\int\lambda_W(d\bar\sigma_W)q_V(\sigma_{V\setminus W}\cup\bar\sigma_W|\bar\sigma_{V^c}).$$

这样，我们只需证明

$$q_V(\sigma_V|\bar\sigma_{V^c})=q_W(\sigma_W|\sigma_{V\setminus W}\cup\bar\sigma_{V^c})\int\lambda_W(d\bar\sigma_W)q_V(\bar\sigma_W\cup\sigma_{V\setminus W}|\bar\sigma_{V^c}).$$

使用上述记号，此即是

$$q_V(\sigma)=q_W(\sigma)\int q_V(\bar\sigma_W\cup\sigma_{W^c})\lambda_W(d\bar\sigma_W).$$

今验证之

$$\text{右方}=\frac{\exp\left[-\beta\sum_{A\cap W\neq\phi}U_A(\sigma)\right]}{Z(W,\sigma_{W^c})}\cdot\int\frac{\exp\left[-\beta\sum_{A\cap V\neq\phi}U_A(\bar\sigma_W\cup\sigma_{W^c})\right]}{Z(V,\sigma_{V^c})}\lambda_W(d\bar\sigma_W)$$

$$=\frac{\exp\left[-\beta\sum_{A\cap V\neq\phi}U_A(\sigma)\right]}{Z(V,\sigma_{V^c})}\int\frac{\exp\left[\beta\sum_{\substack{A\cap W=\phi\\A\cap V=\phi}}U_A(\sigma)-\beta\sum_{A\cap V\neq\phi}U_A(\bar\sigma_W\cup\sigma_{W^c})\right]}{Z(W,\sigma_{W^c})}\lambda_W(d\bar\sigma_W)$$

$$=q_V(\sigma)\int\frac{\exp\left[-\beta\sum_{A\cap W\neq\phi}U_A(\bar\sigma_W\cup\sigma_{W^c})\right]}{Z(W,\sigma_{W^c})}\lambda_W(d\bar\sigma_W)=q_V(\sigma),$$

倒数第二步是因为$U_A(\sigma)=U_A(\sigma_A)$，而

$$\sum_{A\cap V\neq\phi}U_A(\bar\sigma_W\cup\sigma_{W^c})=\sum_{A\cap W\neq\phi}U_A(\bar\sigma_W\cup\sigma_{W^c})+\sum_{\substack{A\cap W=\phi\\A\cap V\neq\phi}}U_A(\bar\sigma_W\cup\sigma_{W^c})$$

$$=\sum_{A\cap W\neq\phi}U_A(\bar\sigma_W\cup\sigma_{W^c})+\sum_{\substack{A\cap W=\phi\\A\cap V\neq\phi}}U_A(\sigma_A).$$

这便证得了结论。

使用统计物理的术语，我们也称$q_V(\cdot|\bar\sigma)$是具有边界条件$\bar\sigma$、在V中的条件Gibbs分布，而把对应于$Q=\{q_V\}$的随机场称为Gibbs随机场或Gibbs态。换言之，此时态＝随机场＝概率测度。

现在，我们进入随机场的第一个基本问题：存在性。

仍设(Φ,ρ)为完备可分距离空间，$\mathscr{B}=\mathscr{B}(\Phi)$为Borel域。给定规范$Q=\{q_V\}$。简记

$$q(d\sigma_t|\sigma(\hat{t}))=q_{\{t\}}(d\sigma_t|\sigma_{\mathbf{Z}^d\setminus\{t\}}).$$

(2.7) 存在定理(Dobrushin[8])。

假定存在Φ上的有限紧函数h和非负有限数C，$(c_{st}:\ s,t\in\mathbf{Z}^d,s\neq t)$使得

$$\sum_{s\neq t}c_{st}\leqslant c<1,\quad t\in\mathbf{Z}^d. \tag{2.8}$$

而且

$$\int_\Phi h(\sigma_t)q(d\sigma_t|\sigma(\hat{t}))\leqslant C+\sum_{s\neq t}c_{st}h(\sigma_s), \tag{2.9}$$

$$\sigma\in\Omega,t\in\mathbf{Z}^d.$$

再设对每$V\subset\subset\mathbf{Z}^d$，$\bar{\sigma}\mapsto q_V(\cdot|\bar{\sigma})$关于弱拓扑连续。则存在关于$Q=\{q_V\}$相容的随机场，此外，对于任给的$\varphi_0\in\Phi$，所造的随机场满足：

$$\mathbf{E}h(\sigma_t)\leqslant\max\{C+ch(\varphi_0),C(1-c)^{-1}\},\quad t\in\mathbf{Z}^d.$$

当Φ紧时，取$h\equiv0$或1，我们可取$c_{st}=0$，定理的第一部分假设自然满足。这就得到

(2.10) **推论** 如Φ紧且给定的规范关于弱拓扑连续，则必定存在与此规范相容的随机场。

(2.11) 注

(i) 关于$\bar{\sigma}\mapsto q_V(\cdot|\bar{\sigma})$的连续性条件可以减弱。详见Dobrushin[8]或Sinai[17]。事实上，文[8]中对参数集的取法更为一般。

(ii) 利用反射正性（参见下面的五），本定理可进一步推广，见Shlosman[16]。关于随机场存在性的另外一些一般性结果，见Preston[14, §3]。

定理2.7之证。

取定$V_n\subset\subset\mathbf{Z}^d$，$V_n\uparrow\mathbf{Z}^d$。固定边界条件$\bar{\sigma}\in\Omega$，使得$h(\bar{\sigma}_s)\leqslant D<\infty$，$s\in V_n^c$，$n\geqslant1$。再命$P_n\in\mathscr{P}(\Omega)$：

$$P_n(\bar{\sigma}_{V_n^c})=1,$$

$$P_n(\cdot|\bar{\sigma}_{V_n^c})=q_{V_n}(\cdot|\bar{\sigma}_{V_n^c}).$$

我们的目的是从$\{P_n:\ n\geqslant1\}$构造出一个$P\in\mathscr{P}(\Omega)$，使得P是与$\{q_V\}$相容的随机场。自然先证$\{P_n\}$的相对紧性，然后再证明极限点为所求的随机场。定理的两个条件分别用于这两步的证明之中。

(a) 由定理1.7，$\{P_n\}$的相对紧性可由下述估计

$$\sup_n\int h(\sigma_t)dP_n\leqslant(C+cD)\vee(C(1-c)^{-1}),t\in\mathbf{Z}^d \tag{2.12}$$

导出。现在，我们来证明（2.12）。

任给$\varepsilon>0$，命

$$\mathscr{E}_\varepsilon=\{e\in\mathscr{F}_{V_n}:\ 0\leqslant e\leqslant1,\ \int e(\sigma_{V_n})dP_n\geqslant1-\varepsilon\}$$

$$G_\varepsilon=\inf_{e\in\mathscr{E}_\varepsilon}\ \max_{t\in V_n}\int h(\sigma_t)e(\sigma_{V_n})dP_n,$$

此处$\mathscr{E}_\varepsilon$和G_ε依赖于n，暂且固定n。由于h有限，

$$\{\sigma_{V_n}:\ h(\sigma_t)\leqslant N,\ t\in V_n\}\uparrow \Omega_{V_n},\ N\uparrow\infty.$$

选$e(\sigma_{V_n})$作为右方集合的示性函数，当N充分大时，它属于$\mathscr{E}_\varepsilon$。这样，$G_\varepsilon<\infty$。往证

$$G_\varepsilon\leqslant\max\{C+cD,\ C(1-c)^{-1}\}\equiv C_0.$$

任给$\delta>0$，选取$e_0\in\mathscr{E}_\varepsilon$，使得

$$\max_{t\in V_n}\int h(\sigma_t)e_0(\sigma_{V_n})dP_n\leqslant G_\varepsilon(1+\delta).$$

且存在点$t_0\in V_n$，使

$$\int h(\sigma_{t_0})e_0(\sigma_{V_n})dP_n\geqslant G_\varepsilon(1-\delta).$$

由于V_n是有限集，可设所选用的e_0使得上式对于最少的$t_0\in V_n$成立。命

$$\tilde e_0(\sigma_{V_n})=\tilde e_0(\sigma_{V_n\setminus t_0})=\int e_0(\sigma_{V_n})q(d\sigma_{t_0}|\sigma_{V_n\setminus t_0}\cup\bar\sigma_{V_n^c}),$$

由相容性条件（2.2）和单调类定理知

$$\begin{aligned}\int\tilde e_0(\sigma_{V_n})dP_n&=\int\tilde e_0(\sigma_{V_n\setminus t_0})q_{V_n}(d\sigma_{V_n}|\bar\sigma_{V_n^c})\\&=\int q_{V_n}(d\sigma_{V_n}|\bar\sigma_{V_n^c})\int e_0(\sigma_{V_n\setminus t_0}\cup\bar\sigma_{t_0})q(d\bar\sigma_{t_0}|\sigma_{V_n\setminus t_0}\cup\bar\sigma_{V_n^c})\\&=\int e_0(\sigma_{V_n})\,q_{V_n}(d\sigma_{V_n}|\bar\sigma_{V_n^c})=\int e_0(\sigma_{V_n})dP_n\geqslant1-\varepsilon.\end{aligned}$$

可见$\tilde e_0\in\mathscr{E}_\varepsilon$。类似地，对每$t\in V_n\backslash t_0$，

$$\int h(\sigma_t)\tilde e_0dP_n=\int h(\sigma_t)e_0dP_n\leqslant G_\varepsilon(1+\delta).$$

如果$\int h(\sigma_{t_0})\tilde e_0dP_n<G_\varepsilon(1-\delta)$，则$\tilde e_0$使

$$\int h(\sigma_t)\tilde e_0dP_n\geqslant G_\varepsilon(1-\delta)$$

成立的$t\in V_n$比e_0少了一个而与假设e_0具有最小性矛盾。这样，我们有

$$\begin{aligned}G_\varepsilon(1-\delta)&\leqslant\int h(\sigma_{t_0})\tilde e_0dP_n\\&=\int\tilde e_0(\sigma_{V_n\setminus t_0})q_{V_n}(d\bar\sigma_{V_n}|\bar\sigma_{V_n^c})\int h(\bar\sigma_{t_0})q(d\bar\sigma_{t_0}|\sigma_{V_n\setminus t_0}\cup\bar\sigma_{V_n^c})\\&\leqslant\int\tilde e_0(\sigma_{V_n\setminus t_0})q_{V_n}(d\sigma_{V_n}|\bar\sigma_{V_n^c})\Big[C+\sum_{\substack{s\in V_n\\s\neq t_0}}c_{st_0}h(\sigma_s)+\sum_{s\notin V_n}c_{st_0}h(\bar\sigma_s)\Big]\\&\leqslant C+\sum_{\substack{s\in V_n\\s\neq t_0}}c_{st_0}(1+\delta)+\sum_{s\notin V_n}c_{st_0}D\\&\leqslant C+c\max\{G_\varepsilon(1+\delta),D\}.\end{aligned}$$

如果$G_\varepsilon(1+\delta)\geqslant D$，则

$$G_\varepsilon(1-\delta)\leqslant cG_\varepsilon(1+\delta)+C,$$

即

$$G_s \leqslant C/(1-c-\delta-c\delta).$$

如果$G_s(1+\delta)<D$，则

$$G_s(1-\delta)\leqslant C+cD,$$

$$G_s\leqslant\frac{C+cD}{1-\delta},$$

但δ任意，故总有

$$G_s\leqslant\max\{C+cD, C(1-c)^{-1}\}=C_0.$$

今取e_{s_m}使得

$$0\leqslant\int(1-e_{s_m})dP_n\leqslant\frac{1}{m},$$

$$\max_{t\in V_n}\int h(\sigma_t)e_{s_m}dP_n\leqslant G_{s_m}+\frac{1}{m}\leqslant C_0+\frac{1}{m},$$

在前一式中使用法都引理得

$$\int(1-\varliminf_{m\to\infty}e_{s_m})dP_n=0\Rightarrow\varliminf_{m\to\infty}e_{s_m}=1.\quad P_n-\text{a.s.}$$

在后一式中使用法都引理得

$$\int h(\sigma_t)dp_n\leqslant\varliminf_{m\to\infty}\int h(\sigma_t)e_{s_m}dp_n\leqslant C_0,\quad t\in V_n,$$

这样，我们便证得

$$\max_{t\in V_n}\int h(\sigma_t)dP_n\leqslant C_0.$$

但n是任意的。故证得(2.12)。

(b) 设$\varphi_0\in\Phi$。取$\bar{\sigma}$：$\bar{\sigma}_t=\varphi_0$，$t\in\mathbf{Z}^d$作为我们的边界条件。则由已证的(a)，

$$\sup_n\int h(\sigma_t)dP_n\leqslant\max\{C+\mathrm{ch}(\varphi_0),\ C(1-c)^{-1}\}.$$

由于紧函数必定是下半连续的，故由定理1.4知，$\{P_n: n\geqslant1\}$的任何极限点$\bar{P}$，必定满足

$$\int h(\sigma_t)d\bar{P}\leqslant\max\{C+\mathrm{ch}(\varphi_0),\ C(1-c)^{-1}\}.$$

(c) 取定一个极限点$\bar{P}$如(b)中所示。无妨设$P_n\Rightarrow\bar{P}$.为证$\bar{P}$是一个相应于规范$Q=\{q_V\}$的随机场，只需证明对一切V，$W\subset\subset\mathbf{Z}^d$，$V\cap W=\phi$，一切有界连续函数$f(\sigma_V)$和$g(\sigma_W)$，有

$$\int_\Omega f(\sigma_V)g(\sigma_W)d\bar{P}$$

$$=\int_\Omega g(\sigma_W)d\bar{P}\int f(\sigma_V)g_V(d\sigma_V|\sigma_{V^c}),$$

但当n充分大时，相容性条件已给出

$$\int_\Omega f(\sigma_V)g(\sigma_W)dP_n$$

$$=\int_{\Omega} g(\sigma_W)dP_n\int f(\sigma_V)g_V(d\sigma_V|\sigma_{V^c}),$$

如果规范是连续的，则 $\sigma^c_V\mapsto\int f(\sigma_V)g_V(d\sigma_V|\sigma_{V^c})$连续。两边命 $n\to\infty$，便得到前一等式。

三、随机场的唯一性

我们将限于有限程情形。即 $Q=\{q_V:\ V\subset\subset\mathbf{Z}^d\}$.

$$q_V(A|\sigma_{V^c})=q_V(A|\sigma_{\partial_r V}),\qquad r<\infty.$$

(3.1) 定义 称$P\in\mathscr{P}(\Omega)$是指数增长的，如存在$\varphi_0\in\Phi$，$0\leqslant g<\infty$，$0<G<\infty$使得

$$\rho_t(p)=\int_\Omega\rho(\sigma_t,\varphi_0)P(d\sigma)\tag{3.2}$$

$$\leqslant G\exp[g|t|],\ t\in\mathbf{Z}^d.$$

对于某φ_0和$G<\infty$满足上式的随机场P的全体记作$\mathscr{P}_Q(g)$.

如果$\rho(\cdot,\varphi_0)$是紧函数(例如$\mathbf{R}^n$或$\mathbf{Z}^n$等)，在上节中取$h=\rho(\cdot,\varphi_0)$. 那么所构造的随机场P当然满足(3.2)。特别地，若ρ有界，则此条件平凡。

再记$\partial V=\partial_r V$及

$$\rho_V(\sigma^1,\sigma^2)=\sum_{t\in V}\rho(\sigma^1_t,\sigma^2_t),\ \ \sigma^1,\sigma^2\in\Omega_V,V\subset\subset\mathbf{Z}^d.$$

下面是本节的基本定理，说的是：如果在某有限集$\Lambda\subset\mathbf{Z}^d$中规范具备某种性质，则与之相容的随机场至多唯一。

(3.3) 定理(Dobrushin 和 Shlosman[9])

给定平移不变r规范$Q=\{q_V:\ V\subset\subset\mathbf{Z}^d\}$:

$$q_{V+t}(d\sigma_{V+t}|\bar\sigma_{(V+t)^c})=q_V(d\sigma_V|\bar\sigma_{V^c}),\ t\in\mathbf{Z}^d.$$

假定对某一个$\Lambda\subset\subset\mathbf{Z}^d$，下述条件满足：

(i) 对于每$\delta>0$，存在数族$\{k_t\geqslant0:\ t\in\partial\Lambda\}$，存在二元可测耦合$\hat\mu(d\sigma^1_\Lambda,d\sigma^2_\Lambda|\bar\sigma^1,\bar\sigma^2)\in\mathscr{K}(q_\Lambda(\cdot|\bar\sigma^1),q_\Lambda(\cdot|\bar\sigma^2))$使得对一切$t\in\partial\Lambda$，一切$\bar\sigma^1,\bar\sigma^2\in\Omega$: $\bar\sigma^1_s=\bar\sigma^2_s$，$s\neq t$有

$$\int_{\Omega_\Lambda\times\Omega_\Lambda}\rho_\Lambda(\sigma^1,\sigma^2)\hat\mu(d\sigma^1,d\sigma^2|\bar\sigma^1,\bar\sigma^2)\leqslant k_t\rho(\bar\sigma^1_t,\bar\sigma^2_t)+\delta/2$$

而且

$$\text{(ii)}\qquad \sum_{t\in\partial\Lambda}k_t/|\Lambda|=\gamma<1.$$

则存在$g_0=g_0(\Lambda,r,\gamma)>0$使得$|\mathscr{P}_\theta(g_0)|\leqslant1$.

证 给定对应于$\theta=\{q_V\}$的两个随机场P^1和P^2. 对于任给的$V\subset\subset\mathbf{Z}^d$，以$P_V$表示$P\in\mathscr{P}(\Omega)$在$(\Omega_V,\hat{\mathscr{F}}_V)$上的投影。

(a) 先证：对每$\delta>0$,存在$\mu\in\mathscr{K}(P^1_V,P^2_V)$使得对一切$s\in T(V)\equiv\{t\in\mathbf{Z}^d:\ (\Lambda\cup\partial\Lambda)+t\subset V\}$有

$$\sum_{t\in\Lambda}f_{t+s}\leqslant\sum_{t\in\partial\Lambda}k_tf_{t+s}+\delta.\tag{3.4}$$

此处

$$f_t=\int_{\Omega_V\times\Omega_V}\rho(\sigma_t^1,\sigma_t^2)\mu(d\sigma^1,d\sigma^2),\quad t\in V.$$

为此，选定 $\mu\in\mathscr{K}(P_V^1,P_V^2)$使得

$$(3.5)\qquad \sum_{t\in V}f_t\leqslant K_{\rho_V}(P_V^1,P_V^2)+\delta/2.$$

往证(3.4)。为简化符号，设 $s=0\in\mathbf{Z}^d$(一般情形使用规范的平移不变性).由条件(i)知：对于任给的$\bar\sigma^1,\bar\sigma^2\in\Omega$,

$$(3.6)\qquad \int_{\Omega_\Lambda\times\Omega_\Lambda}\rho_\Lambda(\sigma^1,\sigma^2)\hat\mu(d\sigma^1,d\sigma^2|\bar\sigma^1,\bar\sigma^2)$$

$$\leqslant\sum_{t\in\partial\Lambda}k_t\rho(\bar\sigma_t^1,\bar\sigma_t^2)+\delta/2.$$

记$\widetilde{\mathscr{F}}_{V\setminus V}$为由可测矩形 $B^1\times B^2,B^1,B^2\in\hat{\mathscr{F}}_{V\setminus\Lambda}$生成的$\hat{\mathscr{F}}_V\times\hat{\mathscr{F}}_V$的子$\sigma$域。然后在$\Omega_V\times\Omega_V$上造一个新测度$\tilde\mu$如次：

$$\int\tilde\mu(d\sigma_V^1,d\sigma_V^2)f(\sigma_V^1,\sigma_V^2)$$

$$=\int\mu(d\sigma_V^1,d\sigma_V^2)\int f(\bar\sigma_\Lambda^1\cup\sigma_{V\setminus\Lambda}^1,\bar\sigma_\Lambda^2\cup\sigma_{V\setminus\Lambda}^2)\cdot\hat\mu(d\bar\sigma_\Lambda^1,d\bar\sigma_\Lambda^2|\sigma_{V\setminus\Lambda}^1\cup\bar\sigma_V^1c,\sigma_{V\setminus\Lambda}^2\cup\sigma_V^2c),$$

则$\tilde\mu$与μ在$\widetilde{\mathscr{F}}_{V\setminus\Lambda}$上重合，而$\tilde\mu$关于$\widetilde{\mathscr{F}}_{V\setminus\Lambda}$的条件分布$\mu-$a.s.与$\hat\mu$重合。另一方面

$$\int\tilde\mu(d\sigma_V^1,d\sigma_V^2)f(\sigma_V^1)$$

$$=\int\mu(d\sigma_V^1,d\sigma_V^2)\int f(\bar\sigma_\Lambda^1\cup\sigma_{V\setminus\Lambda}^1)\hat\mu(d\bar\sigma_\Lambda^1,d\bar\sigma_\Lambda^2|\bar\sigma_{V\setminus\Lambda}^1\cup\bar\sigma_{V^c},\bar\sigma_{V\setminus\Lambda}^2\cup\bar\sigma_{V^c})$$

$$=\int\mu(d\sigma_V^1,d\sigma_V^2)\int f(\bar\sigma_\Lambda^1\cup\sigma_{V\setminus\Lambda}^1)q_\Lambda(d\bar\sigma_\Lambda^1|\sigma_{V\setminus\Lambda}^1\cup\bar\sigma_{V^c}^1)\qquad\text{(由}\hat\mu\text{的定义)}$$

$$=\int q_V(d\sigma_V^1|\bar\sigma_{V^c}^1)\int f(\bar\sigma_\Lambda^1\cup\sigma_{V\setminus\Lambda}^1)q_\Lambda(d\bar\sigma_\Lambda^1|\sigma_{V\setminus\Lambda}^1\cup\bar\sigma_{V^c}^1)\qquad\text{(由}\mu\text{的定义)}$$

$$=\int f(\sigma_V^1)q_V(d\sigma_V^1|\bar\sigma_{V^c}^1).\qquad\text{(由相容性)}$$

可见$\tilde\mu\in\mathscr{K}(P_V^1,P_V^2)$。以$\tilde\mu$代替$\mu$,定义相应的$\tilde f_t$。则得

$$(3.7)\qquad K_{\rho_V}(P_V^1,P_V^2)\leqslant\sum_{t\in V}\tilde f_t.$$

另一方面，由定义知

$$(3.8)\qquad f_t=\tilde f_t,\quad t\in V\setminus\Lambda.$$

由(3.6)可见

$$(3.9)\qquad \sum_{t\in\Lambda}\tilde f_t=\int_{\Omega_V\times\Omega_V}\mu(d\bar\sigma^1,d\bar\sigma^2)\int_{\Omega_\Lambda\times\Omega_\Lambda}\rho_\Lambda(\sigma^1,\sigma^2)\hat\mu(d\sigma^1,d\sigma^2|\bar\sigma^1,\bar\sigma^2)$$

$$\leqslant\sum_{t\in\partial\Lambda}k_t\tilde f_t+\delta/2.$$

由(3.5)、(3.7)和(3.8)得

$$\sum_{t\in\Lambda} f_t - \sum_{t\in\Lambda} \tilde{f}_t = \sum_{t\in V} (f_t - \tilde{f}_t) \leqslant \delta/2.$$

由此及(3.9)得

$$\sum_{t\in\Lambda} f_t \leqslant \sum_{t\in\partial\Lambda} k_t \tilde{f}_t + \delta,$$

由此及(3.8)即得(3.4)。

(b) 设$W\subset V$。往证存在 $\bar{g}=\bar{g}(\gamma,r,\Lambda)>0$和 $\bar{C}=\bar{C}(\gamma,r,\Lambda)$,使得

$$\sum_{t\in\Lambda} f_t c_t \leqslant \bar{C} \sum_{t\in\partial_\Lambda V} f_t c_t + \delta|V|, \tag{3.10}$$

此处

$$c_t = c_t(W,\bar{g}) = \exp[-\bar{g}d(t,W)],\quad t\in\mathbf{Z}^d.$$

$$\partial_\Lambda V = \{t\in V:\ d(t,V^c)\leqslant \operatorname{diam}(\Lambda\cup\partial\Lambda)\}.$$

由(3.4)得

$$\sum_{s\in T(V)} \sum_{t\in\Lambda} f_{t+s} c_s \leqslant \sum_{s\in T(V)} \sum_{t\in\partial\Lambda} k_t f_{t+s} c_s + \delta \sum_{s\in T(V)} c_s$$

$$\leqslant \sum_{s\in T(V)} \sum_{t\in\partial\Lambda} k_t f_{t+s} c_s + \delta|V|.$$

交换求和次序，得

$$\sum_{t\in V} f_t \sum_{s\in T(V),\ t-s\in\Lambda} c_s \leqslant \sum_{t\in V} f_t \sum_{s\in T(V),\ t-s\in\partial\Lambda} k_{t-s} c_s + \delta|V|$$

从而

$$\sum_{t\in V} f_t \Big[\sum_{s\in\mathbf{Z}^d:\ t-s\in\Lambda} c_s - \sum_{s\in\mathbf{Z}^d:\ t-s\in\partial\Lambda} k_{t-s} c_s\Big]$$

$$\equiv \sum_{t\in V} f_t I_t^{(1)}$$

$$\leqslant \sum_{t\in V} f_t \Big[\sum_{s\notin T(V):\ t-s\in\Lambda} c_s - \sum_{s\notin T(V):\ t-s\in\partial\Lambda} k_{t-s} c_s\Big] + \delta|V|$$

$$\equiv \sum_{t\in V} f_t I_t^{(2)} + \delta|V|.$$

命

$$m_1 = \max_{t,\ s:\ t-s\in\Lambda\cup\partial\Lambda} c_s/c_t,$$

$$m_2 = \min_{t,\ s:\ t-s\in\Lambda\cup\partial\Lambda} c_s/c_t,$$

则

$$I_t^{(1)} \geqslant m_2 \sum_{s:\ t-s\in\Lambda} c_t - m_1 \sum_{s:\ t-s\in\partial\Lambda} k_{t-s} c_t$$

$$\geqslant |\Lambda|(m_2-\gamma m_1)c_t \geqslant |\Lambda| c_t K,$$

倘若 $0<K<(1-\gamma)$ 和 $\bar{g}=\bar{g}(K)$ 足够小。另一方面，注意 $I_t^{(2)}$ 中的和数仅当 $t\in\partial_A V$ 时非零。而且

$$I_t^{(2)}\leqslant\sum_{\substack{s\in T(V)\\ t-s\in A}}c_s\leqslant m_1|A|c_t\leqslant 2|A|c_t,$$

倘若 $\bar{g}$ 足够小使得 $m_1\leqslant 2$。由以上这些事实导出所需的(3.10)。

(c) 设 $P^1,P^2\in\mathscr{P}_Q(g)$。我们只需证明：对每 $W\subset\subset\mathbf{Z}^d$，$P_W^1=P_W^2$。选 $V\supset W$，$V\subset\subset\mathbf{Z}^d$。由已证得的(a)和(b)，存在 $\mu\in\mathscr{K}(P_V^1,P_V^2)$ 使

$$\sum_{t\in V}f_t c_t\leqslant\bar{C}\sum_{t\in\partial_A V}f_t c_t+\delta|V|.$$

但

$$\text{上式左方}\geqslant\sum_{t\in W}f_t\ (\text{由 } c_t \text{ 之定义})$$
$$\geqslant K_{\rho_W}(P_W^1,P_W^2).$$

对于上式右方，留意

$$f_t=\int_{\Omega_V\times\Omega_V}(\rho(\sigma_t^1,\varphi_0)+\rho(\sigma_t^2,\varphi_0))\mu(d\sigma^1,d\sigma^2)$$
$$=\rho_t(P^1)+\rho_t(P^2)\leqslant 2G\exp[g|t|],$$

这样，我们得到

$$K_{\rho_W}(P_W^1,P_W^2)\leqslant 2\bar{C}G\sum_{t\in\partial_A V}\exp[g|t|-\bar{g}d(t,W)]+\delta|V|,\tag{3.11}$$

取 $V=V_n=\{t\in\mathbf{Z}^d,\ -n\leqslant t^{(i)}\leqslant n\}$。适当选取 $\delta=\delta_n$，使 $\delta|V|\to 0$。则存在 $g_0<\bar{g}$，使当 $g\leqslant g_0$ 时，(3.11)的右方趋于零。最后，由于 K_{ρ_W} 是距离，故 $P_W^1=P_W^2$，倘若 $P^1,P^2\in\mathscr{P}_Q(g)$。

由上述定理可以导出不少简便的唯一性判别法。例如说，我们有

(3.12) 推论 假定 $\operatorname{diam}\Phi\equiv\sup_{\varphi,\varphi'\in\Phi}\rho(\varphi,\varphi')\leqslant 1$(例如使用散拓扑)。如果对于某 $\Lambda\subset\subset\mathbf{Z}^d$，$\varepsilon>0$ 和任意的 $\delta>0$，存在二元可测的 $\hat{\mu}(d\sigma_\Lambda^1,d\sigma_\Lambda^2|\bar{\sigma}^1,\bar{\sigma}^2)\in\mathscr{K}(q_\Lambda(\cdot|\bar{\sigma}^1),\ q_\Lambda(\cdot|\bar{\sigma}^2))$ 使得

$$\int_{\Omega_\Lambda\times\Omega_\Lambda}\rho_\Lambda(\sigma^1,\sigma^2)\hat{\mu}(d\sigma_\Lambda^1,d\sigma_\Lambda^2|\bar{\sigma}^1,\bar{\sigma}^2)\leqslant(1-\varepsilon)|\Lambda|/|\partial\Lambda|+\delta/2,\ \bar{\sigma}_s^1=\bar{\sigma}_s^2\ \text{除}\ s=\text{某}\ t\ \text{而外},$$

则存在 $g_0=g_0(\Lambda,r,\varepsilon)$ 使得 $|\mathscr{P}_Q(g_0)|\leqslant 1$。

证 在定理(3.3)中取 $k_t=(1-\varepsilon)|\Lambda|/|\partial\Lambda|$，$t\in\partial\Lambda$，则

$$|\Lambda|^{-1}\sum_{t\in\partial\Lambda}k_t=1-\varepsilon<1.$$

从而定理(3.3)的条件都满足。

(3.13) 例 二维 Ising 模型

$\Phi=\{-1,+1\}$，赋散拓扑。已知

$$q_V(A|\sigma_{V^c}) = \sum_{\sigma_V\in A} \exp\left[\beta \sum_{\substack{\{s,t\}\cap V\neq\phi \\ |s-t|=1}} \sigma_s\sigma_t\right] / Z(V,\sigma_{V^c}).$$

取 $\Lambda=\{0\}$，则

$$K_{\rho_{\{0\}}}(q_{\{0\}}(\cdot|\bar{\sigma}^1),\ q_{\{0\}}(\cdot|\bar{\sigma}^2))$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{\sigma_0=\pm1}|q_{\{0\}}(\sigma_0|\bar{\sigma}^1)-q_{\{0\}}(\sigma_0|\bar{\sigma}^2)|.$$

这是因为，若 P_1 关于某参考测度 λ 有密度 f_1，P_2 有密度 f_2，则

$$V(P_1,P_2)=\sup_B|P_1(B)-P_2(B)|$$
$$=\frac{1}{2}\int|f_1-f_2|d\lambda.$$

若以$\{1,2,3,4\}$表示原点O的四个紧邻位置，则

$$q_{\{0\}}(\sigma_0|\bar{\sigma})=\frac{\exp\left[\beta\sigma_0\sum_{j=1}^4\bar{\sigma}_j\right]}{\sum_{\sigma'_0=\pm1}\exp\left[\beta\sigma'_0\sum_{j=1}^4\bar{\sigma}_j\right]}$$
$$=\frac{1}{1+\exp\left[\mp2\beta\sum_{j=1}^4\bar{\sigma}_j\right]},\quad 如\ \sigma_0=\pm1.$$

这样

$$K_{\rho_{\{0\}}}(\cdot,\cdot)\leqslant\frac{\exp[8\beta]-\exp[-8\beta]}{(1+\exp[-8\beta])^2}$$
$$=\frac{\exp[8\beta](\exp[8\beta]-1)}{\exp[8\beta]+1}.$$

只需 $\beta\leqslant0.044305$，便有

$$右方<0.249995<\frac{1}{4}=\frac{|\Lambda|}{|\partial\Lambda|},$$

从而推论(3.12)的条件满足．故 Gibbs 态唯一．

(3.14) **注** 上例中，仍然取$\Lambda=\{0\}$．直接应用定理(3.3)．当$\beta<\frac{1}{4}\log3\approx0.274653$时便可保证唯一性．

四、相变、Peierls 方法

上节已证，当 β 充分小(即高温)时，二维 Ising 模型仅有一个 Gibbs 态，即$|\mathscr{G}_Q|=1$．本节要证：

(4.1) **定理** 对于二维 Ising 模型，存在 $\beta_0>0$，使当 $\beta\geqslant\beta_0$ 时，$|\mathscr{G}_Q|>1$．

事实上，对于 $d(\geqslant2)$维 Ising 模型，已知存在 $\beta_c\in(0,\infty)$，使当 $\beta<\beta_Q$ 时，$|\mathscr{G}_Q|=1$；而当 $\beta>\beta_c$ 时，$|\mathscr{G}_Q|>1$．这种现象被称为相变的一种形式．而 β_c 称为临界值．

证明的工具是围道方法，以 E_t 表示以 $t\in\mathbf{Z}^2$ 为中心，平行于坐 标轴的单位正方形。以 ∂E_t 表 E_t 的 边 界。$\bigcup\limits_t \partial E_t$ 称 为 $\mathbf{Z}^2$ 的 对偶图. 对偶图上(沿 E_t 的边走)的长度有限的闭路 Γ 称为一个围道，其长度记作 $|\Gamma|$. 今设 $V\subset\subset\mathbf{Z}^2$，并记

$$\partial(\sigma_V)=\partial\Big(\bigcup_{t\in V,\ \sigma_t=-1} E_t\Big),$$

此集不必连通. 此处 ∂B 表示 $B\subset\mathbf{R}^2$ 的边界.

取 $V=V_L$ 为中心在 $0\in\mathbf{Z}^2$，边长为 $2L$，平行于坐标 轴的正方形. 记 $P^+_{V,\beta}$ 为边界条件是 $\{\bar\sigma_t=\pm1, t\in V^c\}$ 的条件 Gibbs 分布 $q_V(\cdot|\bar\sigma)$. 依通常方式看作是 $\mathscr{P}(\Omega)$ 中元. 定理证明的关键一步在于

(4.2) **Peierls 不等式** 设 Γ 是任一固定的围道，则

$$P^+_{V,\beta}[\sigma:\ \Gamma\subset\partial(\sigma_V)]\leqslant\exp[-2\beta|\Gamma|],\ V=V_L.$$

证 记 $\nu=|\{\{s,t\}:\ \{s,t\}\cap V\neq\phi, |s-t|=1\}|$. 对于任给的 σ，用 $\Sigma^\pm$ 分别表 示上述集合中 $\sigma_s=\sigma_t$ 和 $\sigma_s=-\sigma_t$ 的边 $\{s,t\}$ 的条数. 于是

$$\Sigma^+ + \Sigma^- = \nu(=2(|V_L|+2L+1)=4(L+1)(2L+1)).$$

由于分离 $+1$ 和 -1 的某 E_t 的边属于 $\partial(\sigma_V)$，我们有 $\Sigma^-=|\partial(\sigma_V)|$. 进而 $\Sigma^+=\nu-|\partial(\sigma_V)|$. 使用这些记号，可将Hamilton 量写成

$$\begin{aligned}H^+_V(\sigma)&=-\sum_{\substack{\{s,t\}\cap V_L\neq\phi\\|s-t|=1}}\sigma_s\sigma_t,\\&=-\sum^{+}+\sum^{-}=-\nu+2|\partial(\sigma_V)|,\end{aligned}$$

其中 σ 在 V^c 外为 ±1. 这样，

$$\begin{aligned}&p^+_{V,\beta}[\sigma:\ \Gamma\subset\partial(\sigma_V)]\\&=\frac{\sum\limits_{\sigma_V:\ \Gamma\subset\partial(\sigma_V)}\exp[-\beta H^+_V(\sigma)]}{\sum\limits_{\sigma_V}\exp[-\beta H^+_V(\sigma)]}\\&=\frac{\sum\limits_{\sigma_V:\ \Gamma\subset\partial(\sigma_V)}\exp[-2\beta|\partial(\sigma_V)|]}{\sum\limits_{\sigma_V}\exp[-2\beta|\partial(\sigma_V)|]}\end{aligned}$$

为估计右端的量，我们作一个简单的变换. 记

$$\Phi_\Gamma=\{\sigma_V:\ \Gamma\subset\partial(\sigma_V)\},$$
$$\Phi^-_\Gamma=\{\sigma_V:\ \Gamma\cap\partial(\sigma_V)=\phi\}.$$

作变换 $\Phi_\Gamma\ni\sigma_V\mapsto\sigma^-_V\in\Phi^-_\Gamma$ 如次:

$$(\sigma^-_V)_t=\begin{cases}-\sigma_t, & \text{如 } t \text{ 在 } \Gamma \text{ 的内部}\\ \sigma_t, & \text{如 } t \text{ 在 } \Gamma \text{ 的外部}\end{cases}$$

这个映射当然是一对一的，它的作用是将 Γ 从 $\partial(\sigma_V)$ 中去掉. 我们有

$$\partial(\sigma_V)=\partial(\sigma^-_V)\cup\Gamma,\quad |\partial(\sigma_V)|=|\partial(\sigma^-_V)|+|\Gamma|,$$

进而

$$P^+_{V,\beta}[\Gamma\subset\partial(\sigma_V)]=\frac{\sum\limits_{\sigma_V\in\Phi_\Gamma}\exp[-2\beta|\partial(\sigma_V)|]}{\sum\limits_{\sigma_V}\exp[-2\beta|\partial(\sigma_V)|]}$$

$$=\frac{\sum\limits_{\sigma_V\in\Phi_\Gamma^-}\exp[-2\beta|\partial(\sigma_V)|-2\beta|\Gamma|]}{\sum\limits_{\sigma_V}\exp[-2\beta|\partial(\sigma_V)|]}$$

$$\leqslant\exp[-2\beta|\Gamma|].$$

(4.3) **推论**

$$P^+_{V,\beta}[\sigma_0=-1]\leqslant 9(2e^{4\beta}-9)/[e^{4\beta}(e^{4\beta}-9)^2],\ \beta>\frac{1}{2}\log 3.$$

证　以 $0\in\mathrm{Int}\,\Gamma$ 表原点在 Γ 的内部。设 $\sigma_0=-1$。则存在围道 Γ，使 $0\in\mathrm{Int}\,\Gamma\subset\partial(\sigma_V)$（因为边界条件是 $+1$）。这样，由 Peierls 不等式得

$$P^+_{V,\beta}[\sigma_0=-1]\leqslant P^+_{V,\beta}[\Gamma\subset\partial(\sigma_V),0\in\mathrm{Int}\,\Gamma]$$

$$=\sum_{0\in\mathrm{Int}\,\Gamma}P^+_{V,\beta}[\Gamma\subset\partial(\sigma_V)]$$

$$\leqslant\sum_{0\in\mathrm{Int}\,\Gamma}e^{-2\beta|\Gamma|}$$

$$=\sum_{n=4}^{\infty}c_n e^{-2\beta n}\ (|\Gamma|=n\geqslant 4),$$

此处

$$c_n=|\{\Gamma:|\Gamma|=n\ 且\ 0\in\mathrm{Int}\Gamma\}|.$$

现在，我们估计 c_n。固定围道的长度为 n。从原点出发，沿第一个坐标轴的正方向至多可以走出 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 个正方形，即与此轴的正方向至多只有 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 个交点。换言之，若记

$$t_0(\Gamma)=\min\{x>0:(x,0)\in\Gamma\},$$

则

$$|\{t_0(\Gamma):|\Gamma|=n,\ 0\in\mathrm{Int}\Gamma\}|\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]\leqslant\frac{n}{2}.$$

另一方面，从 $t_0(\Gamma)$ 出发，第一步沿第二个坐标轴的正方向走；此后，每步仅有三个方向可走：$\updownarrow\rightarrow$　$\overset{\uparrow}{\longleftrightarrow}$ 等等；但 Γ 是闭的，最后一步必须回到 $t_0(\Gamma)$，只有一种走法。综上所述，得

$$c_n\leqslant\frac{n}{2}\cdot 3^{n-2}.$$

最后，闭路的长度必定是偶数。故

$$P^+_{V,\beta}[\sigma_0=-1]\leqslant\sum_{n=2}^{\infty}n3^{2n-2}e^{-4\beta n}.$$

(4.4) **定理(4.1)之证**　由推论(4.3)知，当 $\beta>\beta_0=0.6587$ 时，

$$P^+_{V,\beta}[\sigma_0=-1]<\frac{1}{2}.$$

令$L\to\infty$，则$V_L\uparrow \mathbf{Z}^2$。记$P^+_{V,\beta}$的任一弱极限点为$P^+_\beta\in\mathscr{G}_\theta$，则

$$P^+_\beta[\sigma_0=-1]<\frac{1}{2},\ \beta\geqslant\beta_0.$$

由对称性得

$$P^+_\beta[\sigma_0=+1]<\frac{1}{2},\ \beta\geqslant\beta_0,$$

这表明$P^+_\beta\neq P^-_\beta$。故$|\mathscr{G}_\theta|>1$.

二维 Ising 模型的相变点已确定为 $\beta_c=\frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2})\approx0.4407$，当$d\geqslant3$时，此模型也有相变。但$d=1$时无相变（参见[4，例(10.5.51)]）。相变与维数有关，这是一种普遍现象．关于Ising 模型相变的存在性最早由 Peierls(1936)得到，严格结果由 Griffiths (1964) 和 Dobrushin(1965)得到。二维β_0的值最先由Onsager 定出。关于这方面的研究，还有著名的李政道—杨振宁定理(1952)。

关于 Peierls 方法的进一步发展主要由 Pirogov 和Sinai作出。又称PS方法。对于Φ 为有限集情形尤其有效。详见Sinai 的专著[17]。最新的进展见[21]及所引文献。

五、反射正性与相变

设$V\subset\subset\mathbf{Z}^d$，$L$为$\mathbf{R}^d$中的一个超平面($d=1$时退化为单点)，使得$V$依$L$反射不变，即$r_LV=V$，任取定被$L$分离的$\mathbf{R}^d$的一个半空间(包括$L$)，并记作$L^+$，再命

$$V^+=V\cap L^+,\ V^-=r_LV^+,\ V^0=V^+\cap V^-.$$

称 $\mu_V\in\mathscr{P}(\Omega_V)$是依$r_L$反射正的，如果它依$L$反射不变：

$$\mu_V(B)=\mu_V(r_LB),\ B\in\hat{\mathscr{F}}_V,$$

而且对于一切$f\in{}_b\hat{\mathscr{F}}_{V^+}$（${}_b\mathscr{F}$表示有界$\mathscr{F}$可测函数的全体），有

$$\mu_V(fr_Lf)\geqslant0.$$

此处$r_Lf(\sigma)=f(r_L\sigma)$，$(r_L\sigma)_t=\sigma_{r_Lt}$.

反射正性最早由Osterwalder和Schrader（1973）提出来的，因此也称OS正性。它已成为研究量子场论的基本工具。例如见 Glimm 和 Jaffer[11] 及所引文献。反射正性使我们可定义一个非负定的双线性型$\langle f,g\rangle_r=\mu_V(fr_Lg)$，进而得到

(5.1)Schwartz 不等式

$$|\mu_V(fg)|\leqslant\mu_V(fr_Lf)^{1/2}\mu_V(gr_Lg)^{1/2},\ f\in{}_b\hat{\mathscr{F}}_{V^+},\ g\in{}_b\hat{\mathscr{F}}_{V^-}.$$

由此出发，可导出一个极为重要的棋盘估计（见(5.5)）。

下述结果告诉我们反射正性有一定的普遍性。

(5.2)引理 设V和$r=r_L$如上。如果存在F，$G\in\hat{\mathscr{F}}_{V^+}$，使得

$$H_V=F+rF+\sum_{j=1}^kG_jrG_j,$$

$$Z=Z(V)=\int_{\Omega_V}\exp[-H_V(\sigma)]\lambda_V(d\sigma)<\infty.$$

则$d\mu_V=Z^{-1}\exp[-H_V]d\lambda_V$ 是依 r 反射正的。

证 留意

$$\begin{aligned}&\exp[-H_V(\sigma_V)]\\&=\exp[F(\sigma_V)+rF(\sigma_V)]\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\sum_{j=1}^{k}(G_j\, r\, G_j)\Big]^n(\sigma_V)/n!\ .\end{aligned}$$

不计一个正常数因子，$\mu_V(frf)$可表成形如

$$\int_{\Omega_{V^0}}\lambda_{V^0}(d\sigma_{V^0})\left\{\int_{\Omega_{V^+\setminus V^0}}\lambda_{V^+\setminus V^0}(d\sigma_{V^+\setminus V^0})\, e^{F(\sigma_{V^+})}f(\sigma_{V^+})G_1(\sigma_{V^+})^{n_1}\cdots G_k(\sigma_{V^+})^{n_k}\right\}^2$$

的项之和。

在$\mathbf{Z}^d$ 中，有以下两种常用的反射，一是半整点，即依形如$\left\{u\in\mathbb{R}^d:u^{(m)}=\frac{1}{2}n\right\}$（对某$1\leqslant m\leqslant d$和某整数 n 成立)的超平面 L 的反射。记这种反射的全体为 $\mathscr{R}_{1/2}$。以1代替上述定义中的½，我们得到整点上的反射。其全体记作$\mathscr{R}_1$，当然$\mathscr{R}_1\subset\mathscr{R}_{1/2}$。

(5.3)例 $\Phi=$单位圆 S^1，$\lambda=S^1$ 上的通常测度。$0\leqslant\sigma_t<2\pi$，$t\in\mathbf{Z}^d$。

$$H(\sigma)=-\sum_{|s-t|=\sqrt{2}}\cos(\sigma_s-\sigma_t)-\sum_{|s-t|=1}\cos(2(\sigma_s-\sigma_t)).$$

对于任给的$V\subset\subset\mathbf{Z}^d$，若$r\in\mathscr{R}_{1/2}$，$V=rV$，则引理(5.2)的条件满足。

然而，使得$rV=V$的 r 很少，不能充分发挥反射正性的效力。若我们将V的边界对接起来，作成圆环体(torus)，则我们可在任何半整点处作反射。将整个 $\mathbf{Z}^d$ 依这种圆环体分成等价类更为方便。为说明这一点，我们还需引进一些记号。

记 $\mathscr{X}_N=\mathscr{X}_N^d$ 为 $\mathbf{Z}^d$ 关于子群 $N\mathbf{Z}^d(N\geqslant 1)$ 的商群。$t\in\mathbf{Z}^d$ 关于子群 $N\mathbf{Z}^d$ 的陪集记作(t)。定义

$$|(t)|=\min_{t'\in(t)}|t'|.$$

随后，我们也将 $(t)\in\mathscr{X}_N$ 混同于 t 。再记 $\Omega_N=\prod_{t\in\mathscr{X}_N}\Phi$，$\mathscr{F}_N=\prod_{t\in\mathscr{X}_N}\mathscr{B}(\Phi)$。类似地，可在$\Omega_N$上定义平移 θ_t 等等。Ω_N 中的元素称为 Ω 中的周期组态。

命

$$\Lambda_0=\{t\in\mathbf{Z}^d:t^{(i)}=0\text{或}1,\ i=1,\cdots,d\}$$

它是单位方体，我们限于满足如下条件的交互作用U。

紧邻性(*) $U(\sigma)=U(\sigma_{\Lambda_0})$；

反射不变性 $U(r\sigma)=U(\sigma)$，$r\in\mathscr{R}_{1/2}$，$\sigma\in\Omega$。

此时，称 $$H_N^p(\sigma)=\sum_{t\in\mathscr{X}_N}\theta_t U(\sigma),\quad \sigma\in\Omega_N$$

为具有周期边界条件的Hamilton量。然后可定义具有周期边界条件的 Gibbs 态：

$$dP_N^\beta=dP_{U,\beta,N}=\frac{\exp[-\beta H_N^p(\sigma)]}{Z(U,N,\beta)}\lambda_N(d\sigma),$$

(*)相对于距离 $\|s-t\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant d}|s^{(i)}-t^{(i)}|$，此处的交互作用长度依然是1。

此处 $\lambda_N(d\sigma)=\prod\limits_{t\in\Gamma N}\lambda(d\sigma_t)$。

按照先前的讨论，对于给定的交互作用U，由Hamilton量

$$H(\sigma)=\sum_{t\in\mathbf{Z}^d}\theta_t U(\sigma),$$

可定义相应的Gibbs态集$\mathscr{G}(U)$。今设P_N^β有弱极限点P，试问$P\in\mathscr{G}(U)$？倘若如此，我们便可充分发挥反射正性的力量来研究相变，答案是肯定的。

(5.4)**命题** 假定U连续，$Z(U,N,\beta)<\infty$。如果存在子列$P_{N_k}^\beta\Rightarrow P,k\to\infty$，则$P\in\mathscr{G}(U)$。

证 仍然用$Q=\{q_V\}$表示相应于H_V的规范。取N足够大，使得$W\cup\partial W\subset V_N\subset\subset\mathbf{Z}^d$。任意取定$\bar\sigma\in\Omega$，将$P_N^\beta$视为$\Omega$上、具有边界条件$\bar\sigma$的概率测度，并记作$p_{V_N}^U(d\sigma_{V_N}|\bar\sigma_{V_N^c})$。无妨设$P_N^\beta\Rightarrow P$，$N\to\infty$。则由

$$\begin{aligned}&\int p_{V_N}^U(d\sigma_{V_N}|\bar\sigma_{V_N^c})f(\sigma_W)\\&=\int p_{V_N}^U(d\sigma_{V_N}|\bar\sigma_{V_N^c})\left[\int p_W^U(d\bar\sigma_W|\bar\sigma_{V_N\setminus W}\cup\bar\sigma_{V_N^c})f(\bar\sigma_W)\right]\\&=\int p_{V_N}^U(d\sigma_{V_N}|\bar\sigma_{V_N^c})\left[\int p_W^U(d\bar\sigma_W|\sigma_{\partial W})f(\bar\sigma_W)\right]\\&=\int p_{V_N}^U(d\sigma_{V_N}|\bar\sigma_{V_N^c})\left[\int q_W(d\bar\sigma_W|\sigma_{\partial W})f(\bar\sigma_W)\right]\end{aligned}$$

知，当$N\to\infty$时，有

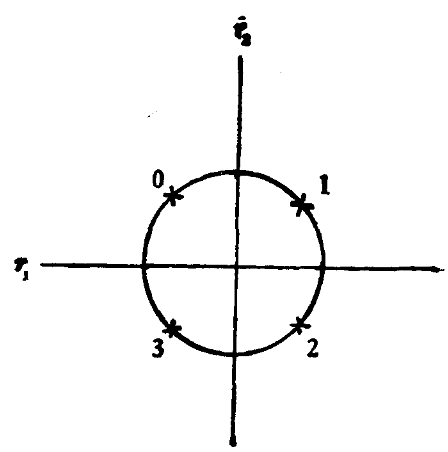
$$\begin{aligned}&\int P(d\sigma)f(\sigma_W)\\&=\int Pd(\sigma)\int f(d\bar\sigma_W)q_W(d\bar\sigma_W|\sigma_{\partial W}).\end{aligned}$$

可见P是与$\{q_V\}$相容的随机场，即$P\in\mathscr{G}(U)$。

上面已经谈到，反射正性可为我们提供一个棋盘估计。今以一特例说明之。取$d=1$，$N=4$。则此时有两个r_1，$r_2\in\mathscr{R}_{1/2}$。

r_1：$(0,1,2,3)\to(3,2,1,0)$，

r_2：$(0,1,2,3)\to(1,0,3,2)$。



它们可由右图来描述。今给定Φ上的有界可测函数f_j，我们希望求出如下的平均估计

$$\mu(f_0\cdots f_3)=\int_{\Phi^4}\mu(d\sigma)\prod_{j=0}^{3}f_j(\sigma_j).$$

反复使用 Schwartz 不等式，得

$$\begin{aligned}&|\mu(f_0\cdots f_3)|\\&=|\langle f_0f_1,\ r_1(f_2f_3)\rangle_{r_1}|\qquad(r_1^2=1)\\&\leqslant\mu(f_0f_1\ r_1(f_0f_1))^{1/2}\mu(f_2f_3\ r_1(f_2f_3))^{1/2}\\&=\mu(f_0r_1f_0\ f_1r_1f_1)^{1/2}\mu(f_2r_1f_2\ f_3r_1f_3)^{1/2}\\&\leqslant\mu(f_0r_1f_0\ r_2f_0\ r_1r_2f_0)^{1/4}\mu(f_1r_1f_1\ r_2f_1\ r_1r_2f_1)^{1/4}.\end{aligned}$$

$$\cdot\mu(f_2r_1f_2\ \ r_2f_2\ \ r_1r_2f_2)^{1/4}\mu(f_3r_1f_3\ \ r_2f_3\ \ r_1r_2f_3)^{1/4} \qquad (r_1r_2=r_2r_1)$$

于是

$$\left|\int\mu(d\sigma)\prod_{j=0}^{3}f_j(\sigma_j)\right|\leqslant\prod_{i=0}^{3}\left(\int\mu(d\sigma)\prod_{j=0}^{3}f_j(\sigma_j)\right)^{1/4}$$

这就是棋盘估计的一种特殊形式．左方每一个位置 0,1,2,3上有一个不同的函数 f_j；而右方每个位置上是同一个函数f_i。这正是棋盘估计的要点，因为右方更便于处理．

若记$\triangle=\left[\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}+1\right]$，则上面的反射可看成关于$\triangle$的两个端点的反射．现在，我们考虑更一般的"大块"反射．即将$\mathscr{Z}_N$分成同样形状的"大块"之拼，然后依每块的"面"作反射．详言之，记

$$\triangle=\triangle(p,q)=\{u\in\mathbb{R}^d:\ p^{(i)}\leqslant u^{(i)}\leqslant p^{(i)}+q^{(i)},\ \ i=1,\cdots,d\},$$

此处$p^{(i)}\in\mathbf{Z}^1\cup\frac{1}{2}\mathbf{Z}^1$，$q^{(i)}\in\mathbf{N}_+=\{1,2,\cdots\},i=1,\cdots,d$．为使$\triangle$经平移铺满整个$\mathscr{Z}_N$．需假定 $q^{(i)}|N$，$(2q^{(i)})|N$，$i=1,\cdots,d$．再记

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}(q)&=\mathbf{Z}(q^{(1)},\cdots,q^{(d)})\\&=\{u\in\mathbf{Z}^d:\ q^{(i)}|u^{(i)},\ i=1,\cdots,d\},\end{aligned}$$

$$\mathscr{Z}_N(q)=\mathbf{Z}(q)/N\mathbf{Z}^d.$$

$\mathscr{Z}_N(q)$是$\mathscr{Z}_N$以形如方体$\triangle$的划分．换言之，$\{\triangle+e:\ e\in\mathscr{Z}_N(q)\}$将铺满整个$\mathscr{Z}_N$．给定函数族$\{Fe\in{}_b\hat{\mathscr{F}}_{\triangle+e}:\ e\in\mathscr{Z}_N(q)\}$．对于每一个$e\in\mathscr{Z}_N(q)$，我们定义一个新的函数族$\{F_{e,e'}:\ e'\in\mathscr{Z}_N(q)\}$如次：命$F_{e,0}=F_e$．如果$e'$，$e''\in\mathscr{Z}_N(q)$使得$\triangle+e+e'$和$\triangle+e+e''$有一个公共面，则命$F_{e,e'}=r_LF_{e,e''}$．显然，这样的定义无歧义．换言之，我们把定义在$\triangle+e$上的函数$F_e=F_{e,0}$经依诸面的反射定义到一切$\triangle+e'(e'\in\mathscr{Z}_N(q))$上．

(5.5)**定理**(棋盘估计)　假定$\mu\in\mathscr{P}(\Omega_N)$($N$为偶数)，依$\triangle+e(e\in\mathscr{Z}_N(q))$的每一面都是反射正的，则

$$\left|\mu\left(\prod_{e\in\mathscr{Z}_N(q)}F_e\right)\right|\leqslant\prod_{e\in\mathscr{Z}_N(q)}\left[\mu\left(\prod_{e'\in\mathscr{Z}_N(q)}F_{e,e'}\right)\right]^{\frac{|\triangle|}{|\mathscr{Z}_N|}},$$

此处$|\triangle|$为$\triangle$的欧氏体积，$|\mathscr{Z}_N|=N^d$．

这个定理的证明需要一定技巧和篇幅，留到下一节完成．为说明如何使用棋盘估计来研究相变，我们还需要如下结果．

(5.6)**定理**　假定A^1和A^2是两个不交柱集（即存在$V\subset\subset\mathbf{Z}^d$使$A_1,A_2\in\mathscr{F}_V$）．命$A^i_u=\theta_uA^i$，$\theta_uA(\sigma)=A(\theta_{-u}\sigma)$，$i=1,2$．如果存在常数$A\in\left(\frac{1}{2},1\right]$和$B\in\left[0,\left(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1-A}{2}}\right)^2\right)$使得

(i)　$P^\beta(A^1)=P^\beta(A^2)\geqslant A/2$，

(ii)　$P^\beta(A^1_s\ A^2_t)\leqslant B$，$s$，$t\in\mathbf{Z}^d$，$\beta\geqslant\beta_c$，

则存在$\bar{P}^\beta_i$，$i=1,2$，使得

$$\bar{P}^\beta_1(A^1)>\frac{1}{2},\ \bar{P}^\beta_2(A^2)>\frac{1}{2},\ \beta\geqslant\beta_c.$$

证　(a)由Birkhoff-Khinchin遍历定理，

$$\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{t\in\Lambda} I_{A^i_t}\frac{L^1(P^\beta)}{P^\beta-a.s.}\rightarrow f^i,\ i=1,2,\ |\Lambda|\rightarrow\infty,$$

使得$\theta_t f^i=f^i$，$P^\beta-a.s.$且$P^\beta(f^i)=P^\beta(A^i)$，$i=1,2$。由所设的两条件得：对每$a\in[0,A]$和$b\in[B,1]$，

$$P^\beta(f^1+f^2\geqslant a)\leqslant\frac{A-a}{1-a},$$

(5.7)

$$P^\beta(f^1f^2\leqslant b)\leqslant\frac{b-B}{b},\ \beta\geqslant\beta_c.$$

(b)往证 存在ε，$\delta>0$使

(5.8) $$P^\beta\left(f^i\geqslant\frac{1}{2}+\delta\right)\geqslant\frac{\varepsilon}{2},\ i=1,2;\ \beta\geqslant\beta_c.$$

事实上，这可由以下两条件导出

(5.9) $\exists\,\varepsilon>0$使$P^\beta(f^1+f^2\geqslant a,\ f^1f^2\leqslant b,\ xy\leqslant b)>\varepsilon$

(5.10) $\exists\,\delta>0$ 使$\{(x,y):\ 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1,\ x+y\geqslant a\}\subset\left\{(x,y):\ y>\frac{1}{2}+\delta\right\}$

对于某$a<1$和$b>0$成立。

但由（5.7）可证，由

(5.11) $$\frac{A-a}{1-a}+\frac{b-B}{b}>1$$

可推出(5.9)；另一方面，由

(5.12) $$b<\frac{a^2}{4}\quad 且\quad \frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}>\frac{1}{2}$$

可推出（5.10），但由

(5.13) $$B\frac{1-a}{A-a}<b<\frac{a}{2}-\frac{1}{4}$$

可推出(5.11)和(5.12)。最后，对定理所给的A和B，我们可取$a_0=B+\frac{A}{2}+\frac{1}{4}$使(5.13)成立。

(c) 命 $M_1=M_1^\beta=\left\{f^1\geqslant\frac{1}{2}+\delta\right\}$，则 $P^\beta(M_1)\geqslant\frac{\varepsilon}{2}$。定义

$$\bar{P}_1^\beta=P^\beta(\cdot\ ;M_1)/P^\beta(M_1)^{*)}.$$

由于

$$\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{t\in\Lambda} I_{A^1_t}\frac{L^1(\bar{P}_1^\beta)}{\bar{P}_1^\beta-a.s.}\rightarrow\bar{f}^1,$$

且$\bar{P}_1^\beta(\bar{f}^1)=\bar{P}_1^\beta(A^1)$。但$\bar{P}_1^\beta\ll P^\beta$，可见$\bar{f}^1=f^1$，$\bar{P}_1^\beta-a.s.$故

$$\bar{P}_1^\beta(A^1)=\bar{P}_1^\beta(f^1)=P^\beta(f^1;\ M_1)/P^\beta(M_1)$$

---

*）如P^β是Gibbs态，则$\bar{P}_1^\beta$亦然。详见[14]。

$$\geqslant\left(\frac{1}{2}+\delta\right) P^{\beta}(M_1)/P^{\beta}(M_1)=\frac{1}{2}+\delta.$$

同理可证

$$\bar{P}_2^{\beta}(A^2)\geqslant\frac{1}{2}+\delta,\ \beta\geqslant\beta_c.$$

现在，我们可以给出以上结果的一个具体的应用。

(5.14)**定理** 设 $d=2$。模型 (5.3) 有低温相变。

证 使用定理(5.6)。以 $|\varphi_1-\varphi_2|$ 表示连接 $\varphi_1,\varphi_2\in S^1$ 的最短弧长。命

$$A^1=\{\sigma:\ |\sigma_s-\sigma_t|<\delta,\ s,t\in\Lambda_0,\ |s-t|=1\}$$

$$A^2=\{\sigma:\ |\sigma_s-\sigma_t|>\pi-\delta,\ s,t\in\Lambda_0,\ |s-t|=1\}$$

$$A^0=\Omega\backslash(A^1+A^2).$$

我们先对 P_N^{β} 研究定理(5.6)所需的两个估计，而后再求极限。命

$$U(\sigma)=U(\sigma_{\Lambda_0})=-\frac{1}{2}\sum_{\substack{s,t\in\Lambda_0\\|s-t|=1}}\cos(2(\sigma_s-\sigma_t))-\sum_{\substack{s,t\in\Lambda_0\\|s-t|=1}}\cos(\sigma_s-\sigma_t)$$

则

$$H_N^{p}(\sigma)=\sum_{t\in x_N}\theta_t U(\sigma).$$

(a) 先考虑条件(i)。即估计 $P_N^{\beta}(A^{\circ})$. 应用关于 $\triangle=\Lambda_0$ 的棋盘估计，我们有

$$P_N^{\beta}(A^{\circ})\leqslant\left[P_N^{\beta}\left(\bigcap_{t\in x_N}A_t^0\right)\right]^{1/N^2}$$

$$=[P_N^{\beta}(A_N^0)]^{1/N^2}.$$

为估计右方，固定 $x\in S^1$ 并设 k 为一待定常数。记 $R_k=\{y\in S^1:\ |y-x|<\delta/k\}$。则

$$Z(N,\beta)=\int_{\Omega_N}\exp[-\beta H_N^{p}(\sigma)]\prod d\sigma$$

$$>\int_{(R_k)^{N^2}}\exp[-\beta H_N^{p}(\sigma)]\prod d\sigma$$

$$>\left(\frac{2\delta}{k}\right)^2\exp\left[2\beta N^2\left(\cos\frac{2\delta}{k}+\cos\frac{4\delta}{k}\right)\right].$$

另一方面，如果 $\sigma\in\theta_t A^0=A_t^0$，则在 $\theta_t\Lambda_0=\Lambda_t$ 上至少有一邻边 $\langle st\rangle$ 使 $|\sigma_s-\sigma_t|\geqslant\delta$，即至少有一邻边 $\langle st\rangle$，使

$$\cos(2(\sigma_s-\sigma_t))\leqslant\cos(2\delta),$$

从而

$$-\theta_t U(\sigma)\leqslant\frac{1}{2}(3+\cos(2\delta))+2=3\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\delta).$$

这样

$$P_N^{\beta}(A_N^0)=Z(N,\beta)\int_{\bigcap\limits_{t\in x_N}A_t^0}\exp\left[-\beta\sum_{t\in x_N}\theta_t U\right]\prod d\sigma$$

$$\leqslant\frac{\exp\left[\beta N^2\left(3\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\delta)\right](2\pi)^{N^2}}{\exp\left[\beta N^2\left(2\cos\frac{2\delta}{k}+2\cos\frac{4\delta}{k}\right)\right]\left(\frac{2\delta}{k}\right)^{N^2}}$$

$$=\exp\left[BN^2\left(3\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\delta)-2\cos\frac{2\delta}{k}-2\cos\frac{4\delta}{k}\right)\right]\left(\frac{\pi k}{\delta}\right)^{N^2}.$$

于是，我们可以取 $k=k(\delta)$，使得指数为负的，进而存在 $C=C(\delta)$ 和 $c=c(\delta)>0$（与 N 无关!），使得

$$P_N^\beta(A^0)\leqslant C\exp[-c\beta].$$

(b) 为验证条件(ii)。我们使用 Peierls 方法加反射正性。记 $\Lambda_t=\theta_t\Lambda_0$。称 $\{\Lambda_{t_1},\cdots,\Lambda_{t_n}\}$ 构成一个围道 Γ，如果 Λ_{t_i} 与 Λ_{t_j} 有公共边当且仅当 $|i-j|=\pm1(\bmod n)$。此时记 $\Gamma=\bigcup_{j=1}^{n}\Lambda_{t_j}$, $\operatorname{supp}\Gamma=\{\Lambda_{t_1},\cdots,\Lambda_{t_n}\}$ 及 $|\Gamma|=n$。称组态 $\sigma\in\Omega_N$ 包含 Γ，如果对每 $\Lambda_t\in\operatorname{supp}\Gamma$，$\sigma\in A_t^0$。这一事件记作 A_Γ，则

$$A_\Gamma=\bigcap_{t:\Lambda_t\in\operatorname{supp}\Gamma}A_t^0,$$

称 Γ 分离 s 和 t，如果 s，t 不同属于 $\partial\Gamma$ 的同一连通分支（连通性是沿格子图上可达）。

今设 $\sigma\in A_s^1A_t^2$。由于 $\sigma\in A_s^1A_s^2\Rightarrow|u-v|\geqslant\sqrt{2}$，可见必定存在围道 Γ 分离 s 和 t。即 $A_s^1A_t^2\subset A_\Gamma$。使用关于 $\triangle=\Lambda_0$ 的反射正性，我们得到

$$\begin{aligned}P_N^\beta(A_s^1A_t^2)&\leqslant P_N^\beta(A_\Gamma)\leqslant[P_N^\beta(A_N^0)]^{|\Gamma|/N^2}\\&\leqslant C^{|\Gamma|}\exp[-c\beta|\Gamma|]\qquad(\text{由(a)})\\&=\exp[-(c\beta-\log C)|\Gamma|]\end{aligned}$$

对 $|\Gamma|=4,6,8,\cdots$ 分解，如同前面所处理过的，可找到 β_0，使当 $\beta\geqslant\beta_0$ 时，总有

$$P_N^\beta(A_s^1A_t^2)\leqslant C'\exp[-c'\beta].$$

此处 $C',c'>0$ 是与 β 和 N 无关的常数，只依赖于(a)中的 C 和 c。

(c) 由(a)和(b)知，存在 β_0，使当 $\beta\geqslant\beta_0$ 时，关于 N 一致地有

$$P_N^\beta(A^0)\leqslant C''\exp[-c''\beta]$$

$$P_N^\beta(A_s^1A_t^2)\leqslant C''\exp[-c''\beta],\quad s,\ t\in\mathscr{Z}_N.$$

任取 P_N^β 的弱极限点（必要时抽子列）P^β，则关于 P^β，上述两个估计成立。然后选 βc 充分大，使当 $\beta\geqslant\beta_c$ 时，定理的两个条件满足。这里还需用到如下事实：如果 $P_n\in\mathscr{G}(U)$，$P_n\Rightarrow P$，则对于一切柱集 A，$P_n(A)\to P(A)$。这是因为：一方面 $P\in\mathscr{G}(U)$ 推出 P 与规范的相容性；另一方面规范 $\{q_V\}$ 在任一集合 $A\in\hat{\mathscr{F}}_V$ 的边界 ∂A 上无负荷。

反射正性方法既可以处理 Φ 有限，也可以处理 Φ 连续的情形。更多的例子可从Shlosman的综合报告[16]中找到。当然，反射正性条件本身是一个限制。

六、附录　棋盘估计的证明

我们从上节讨论过的简单情形（$d=1$，$N=4$）开始。先给出另一种证法，它包含了证明一般情形的基本思路。

假定在每一位置0,1,2,3上，已分别放置有一个函数，例如说，依次为 $f_0,\cdots,f_3$。我们定义多线性泛函

$$G(f_0,f_1,f_2,f_3)=G(f_3,f_0,f_1,f_2)=\cdots\qquad(\text{圈序})$$

的公共值为 $\int\mu(d\sigma)\prod_{j=0}^{3}f_j(\sigma_j)$。这样做的好处是：我们可将不同的反射用同一个记号表示出

来，从而使论证大为简化。例如，

$$
\begin{aligned}
&|G(f_0,f_1;f_2,f_3)|^2\\
&\leqslant G(f_0,f_1;rf_1,rf_0)G(f_3,f_2;rf_2,rf_3)
\end{aligned}
$$

中的 r 代表的是关于 r_1 的反射；而经一个旋转，

$$
\begin{aligned}
&|G(f_3,f_0;f_1,f_2)|^2\\
&\leqslant G(f_3,f_0;rf_0,rf_3)G(f_2,f_1;rf_1,rf_2)
\end{aligned}
$$

中的 r 代表的是关于 r_2 的反射。这样做有一个缺点是：在经几次变换后的表达式 $G(f'_0,f'_1,f'_2,f'_3)$ 中，不易辨认出 f'_j 所处的位置。关键在于 $f'_0,\cdots,f'_3$ 必定分别占满四个位置0,1,2,3，而具体 f'_j 处何位置并不重要。因为最终表达式与此无关。请看：使用上述简化记号，原先的证明可改写成

$$
\begin{aligned}
&|G(f_0,f_1;f_2,f_3)|\\
&\leqslant G(f_0,f_1;rf_1,rf_0)^{1/2}G(f_3,f_2;rf_2,rf_3)^{1/2}\\
&=G(rf_0,f_0;f_1,rf_1)^{1/2}G(rf_3,f_3;f_2,rf_2)^{1/2} && \text{（圈序性）}\\
&\leqslant G(rf_0,f_0;rf_0,f_0)^{1/4}G(rf_1,f_1;rf_1,f_1)^{1/4} && (r^2=1)\\
&\cdot G(rf_2,f_2;rf_2,f_2)^{1/4}G(rf_3,f_3;rf_3,f_3)^{1/4}.
\end{aligned}
$$

我们可以毫无困难地读出，右端就是

$$
\left(\prod_{i=0}^{3}\int\mu(d\sigma)\prod_{j=0}^{3}f_i(\sigma_j)\right)^{1/4}.
$$

现在，让我们把上述想法一般化。

(6.1) **定理**（抽象的棋盘估计）

设 $\mathscr{U}$ 为（实）向量空间，$r:\mathscr{U}\to\mathscr{U}$ 为线性映射且 $r^2=1$。再设 $G(a_1,\cdots,a_{2n})$ 为多线性映射，满足

(i) **圈序性**：$G(a_1,\cdots,a_{2n})=G(a_2,\cdots,a_{2n},a_1)$；

(ii) **Schwartz 不等式**：

$$
\begin{aligned}
&|G(a_1,\cdots,a_n;b_n,\cdots,b_1)|^2\\
&\leqslant G(a_1,\cdots,a_n;ra_n,\cdots,ra_1)G(b_1,\cdots,b_n;rb_n,\cdots,rb_1).
\end{aligned}
$$

此时，$G(a_1,\cdots,a_n;ra_n,\cdots,ra_1)$ 或者非正或者非负。我们取为非负的并命

$$
\|a\|=|G(a,ra,a,\cdots,ra)|^{1/2}.
$$

则 $\|\cdot\|$ 是半范且

(6.2) $$|G(a_1,\cdots,a_{2n})|\leqslant\prod_{i=1}^{2n}\|a_i\|.$$

证　由(i)得 $\|ra\|=\|a\|$，$a\in\mathscr{U}$。

(a) 给定 $a_1,\cdots,a_{2n}\in\mathscr{U}$。先设 $\|a_i\|\neq 0,i=1,\cdots,2n$。命 $b_i=a_j$ 或 $ra_j(j=1,\cdots,2n)$，$i=1,\cdots,2n$ 及

$$
F(b_1,\cdots,b_{2n})=G(b_1,\cdots,b_{2n})\Big/\prod_{i=1}^{2n}\|b_i\|.
$$

显然 F 完全有意义而且满足定理的全部假设。这样，我们需要证明

(6.3) $$|F(b_1,\cdots,b_{2n})|\leqslant 1 \qquad \text{对一切}(b_i)\text{成立。}$$

为此，设

$$F_0=\max_{(b_i)}|F(b_1,\cdots,b_{2n})|。$$

从集合$\{(b_1,\cdots,b_{2n}):|F(b_1,\cdots,b_{2n})|=F_0\}$中选出一个元素，使得对于某个 i，链

$$a_i,ra_i,a_i,\cdots$$

的长度$l(\geqslant1)$最长。无妨设$i=1$。由(i)，无妨设所取到的元素(b_i)具有如下形式：

$$(b_1,\cdots,b_{2n})=(\underbrace{a_1,ra_1,\cdots,ra_1}_{l},b_{l+1},\cdots,b_{2n})$$

当然，前面链中的最后一个元素是a_1或ra_1视l的奇、偶而定。如果$l=2n$，则我们已有

$$F_0=|F(a_1,ra_1,\cdots,a_1,ra_1)|=1。\tag{6.4}$$

这导出(6.3)。如果$l<2n$，则由条件(ii)得

$$\begin{aligned}F_0^2&=|F(b_1,\cdots,b_{2n})|^2\\&\leqslant F(b_1,\cdots,b_n;rb_n,\cdots,rb_1)\\&\quad\cdot F(b_{n+1},\cdots,b_{2n},rb_{2n},\cdots,rb_{n+1})\\&\leqslant F_0^2(\text{由于 }F_0\text{ 是最大值})。\end{aligned}$$

从而$F(b_1,\cdots,b_n;rb_n,\cdots,rb_1)=F_0$。这样，若$l\geqslant n$，则我们回到(6.4)。反之，若$l<n$，则由

$$\begin{aligned}&F(b_1,\cdots,b_n,rb_n,\cdots,rb_1)\\&=F(\underbrace{a_1,ra_1,\cdots}_{l},b_{l+1},\cdots,b_n,rb_n,\cdots,rb_{l+1},\underbrace{\cdots,a_1,ra_1}_{l})\\&=F(\underbrace{a_1,ra_1,\cdots,a_1,ra_1}_{2l},b_{l+1},\cdots,b_n,rb_n,\cdots,rb_{l+1})\end{aligned}$$

可见，链$a_1,ra_1,\cdots,a_1$，ra_1的长度是$2l>l$而与我们的假设相悖。

(b) 若有某个$\|a_1\|=0$，我们断定$G(a_1,a_2,\cdots,a_{2n})=0$。否则，可取到序列$(b_1,\cdots,b_{2n})$使得

$$b_j\in\{a_1,ra_1\},\ G(b_1,\cdots,b_{2n})>0。$$

而且$(b_1,\cdots,b_{2n})$中有链$(a_1,ra_1,\cdots)$，它是最长的。按照(a)中的证法，可证$b_1,\cdots,b_{2n}$必定就是$a_1,ra_1,\cdots,a_1,ra_1$。因此

$$0\neq G(b_1,\cdots,b_{2n})=G(a_1,ra_1,\cdots,a_1,ra_1)=\|a_1\|=0$$

而导致矛盾。

(c) 往证(6.2)推出关于$\|\cdot\|$的三角不等式。

$$\begin{aligned}\|a+b\|&=|G(a+b,r(a+b),\cdots,a+b,r(a+b))|^{1/2n}\\&\leqslant\left(\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\|a\|^k\|b\|^{2n-k}\right)^{1/2n}\\&=\|a\|+\|b\|.\end{aligned}$$

为证明定理(5.5)，我们先考虑一种特殊情形。

(6.5) **推论** 假定$\mu\in\mathscr{P}(\Omega_N)$关于一切$r\in\mathscr{R}_{1/2}$是反射不变且反射正的，$N$为偶数。则对任一函数族$\{f_t\in{}_b\mathscr{B}:\ t\in\mathscr{Z}_N\}$，我们有

$$\left|\int_{\Omega_N}\mu(d\sigma)\prod_{t\in\mathscr{Z}_N}f_t(\sigma_t)\right|$$

(6.6)

$$\leqslant \prod_{t \in \mathscr{X}_N} \left(\int_{\Omega_N} \mu(d\sigma) \prod_{u \in \mathscr{X}_N} f_t(\sigma_u) \right)^{1/N^d}.$$

特别地，对一切$f \in b\mathscr{B}$,

(6.7) $$\left| \int_{\Omega_N} \mu(d\sigma) f(\sigma_0) \right| \leqslant \left(\int_{\Omega_N} \mu(d\sigma) \prod_{t \in \mathscr{X}_N} f(\sigma_t) \right)^{\frac{1}{N^d}}.$$

证 先考虑在第一个坐标轴上的反射。命

$$\mathscr{U} = \{a(\sigma_t) = a(\sigma_{(0,t^{(1)},\cdots,t^{(d)})}: \ t \in \mathscr{X}_N, t^{(1)} = 0\}, \ N = 2n.$$

再设$G(a_0, \cdots, a_{2n-1}) = G(a_1, \cdots, a_{2n-1}, a_0) = \cdots$

取公共值 $$\int_{\Omega_N} \sum_{j=0}^{2n-1} a_j(\sigma_{(j,t^{(2)},\cdots,t^{(d)})}) \mu(d\sigma).$$

将定理(6.1)应用于函数

$$a_j = \prod_{t^{(2)},\cdots,t^{(d)}} f_{(j,t^{(2)},\cdots,t^{(d)})},$$

得

$$\left| \int_{\Omega_N} \mu(d\sigma) \prod_{t \in \mathscr{X}_N} f_t(\sigma_t) \right|$$

$$= \left| \int_{\Omega_N} \mu(d\sigma) \prod_{j=0}^{2n-1} \prod_{t^{(2)},\cdots,t^{(d)}} f_{(j,t^{(2)},\cdots,t^{(d)})}(\sigma_{(j,t^{(2)},\cdots,t^{(d)})}) \right|$$

$$= \left| \int_{\Omega_N} \mu(d\sigma) \prod_{j=0}^{2n-1} a_j(\sigma_{(j,t^{(2)},\cdots,t^{(d)})}) \right|$$

$$\leqslant \prod_{j=0}^{2n-1} \left(\int_{\Omega_N} \mu(d\sigma) \prod_{k=0}^{2n-1} a_j(\sigma_{(k,t^{(2)},\cdots,t^{(d)})}) \right)^{1/2n}$$

$$= \prod_{j=0}^{2n-1} \left(\int_{\Omega_N} \mu(d\sigma) \prod_{k=0}^{2n-1} \prod_{t^{(2)},\cdots,t^{(d)}} f_{(j,t^{(2)},\cdots,t^{(d)})}(\sigma_{(j,t^{(2)},\cdots,t^{(d)})}) \right)^{1/2n}.$$

将上述步骤应用于其它的$(d-1)$个方向，便证得(6.6)，最后，在(6.6)中取$f_0 = f$；$f_t = 1$，$t \in \mathscr{X}_N \backslash \{0\}$，即得(6.7)。

(6.8) 定理(5.5)的证明

(a) 由上述推论的证明中可以看出，我们可以依次地考虑$\mathbb{Z}^d$的各个坐标方向，把问题归结为$d=1$的情形。

(b) 当$d=1$时，所述结论可由抽象棋盘估计得到。只需将每个大块$\Delta + e$视为单个的"积木"，如同推论(6.5)中的$\left[m+\frac{1}{2}, \ m+\frac{3}{2}\right]$，$m \in \mathbb{Z}$。

致谢 衷心感谢审稿人和参加南开概率、统计年的许多同志对本文初稿的批评指正。

参 考 文 献

[1] 陈木法，马链的基本耦合，北京师范大学学报．第4期（1984），3—10.

[2] 陈木法，Infinite dimensional reaction diffusion processes, *Acta. Math. Sinica*, New Series, 1:3 (1985), 261—273.

[3] 陈木法，Coupling of jump processes, *Acta. Math. Sinica*, New Series, 2:2 (1986), 123—136.

[4] 陈木法，跳过程与粒子系统，北京师范大学出版社，1986.

[5] 陈木法，非紧状态空间无穷质点马程的存在定理，中国科学，8 (1986), 707—714.

[6] 陈木法，Probability metrics and coupling methods, Pitman Research Lecture Notes in Math., Vol.200, 1989.

[7] 陈木法、李少辅，Coupling methods for multidimensional diffusion processes, *Ann. of Prob.*, 17:1 (1989), 151—177.

[8] Dobrushin, R. L., Prescribing a system of random variables by condition distributions, *Theory of Prob. Appl.*, 15:3 (1970), 458—486.

[9] Dobrushin, R. L., and Shlosman, S. B., Constructive criterion for the uniqueness of Gibbs field, *Statistical Physics and Dynamical Systems*, p. 347—370, edited by Fritz, J., Jaffe, A. and Szasz, D., Birkhauser, 1985.

[10] Givens, C. R., and Shortt, R. M., A Class of Wasserstein metrics for probability distributions, *Michigan Math. J.*, 31 (1984), 231—240.

[11] Glimm, J., and Jaffe, A., Quantum Physics, A Functional Integral Point of View, second edition, Springer-Verlag, 1987.

[12] Ikeda, N., and Watanabe, S., Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes, North-Holland Publishing Company, 1981.

[13] Liggett, T. M., Interacting Particle Systems, Springer-Verlag, 1985.

[14] Preston, C., Random Fields, *Lecture Notes in Math.*, 534, Springer-Verlag, 1976.

[15] Rachev, S. T., Minimal metrics in the random variables space, Pub. Inst. Stat. Univ., Paris, 27 (1982), 27—47.

[16] Shlosman, S. B., The method of reflection positivity in the mathematical theory of first-order phase transitions, Russian Math.Surveys, 41:3 (1986), 83—134.

[17] Sinai, Ya. G., The Theory of Phase Transitions: Rigorous Results, London: Pergamon, 1981.

[18] Vallender, S. S., Calculation of the Wasserstein distance between probability distributions on the line, *Theory of Prob. Appl.*, 18 (1973), 784—786.

[19] Zolotarev, V. M., Probability metrics, *Theory Prob. Appl.*, 28:2 (1984), 278—302.

[20] Золотарев, В. М., Совретенная Теория Суммирования Независимых Случайных Величин, Москва «Наука», 1986.

[21] Yong Moon Park, Extension of Pirogov-Sinai theory of phase transition to infinite range interactions, *Comm. Math. Phys.*, 114 (1988), (Ⅰ).187—218; (Ⅱ).219—241.

A Survey on Random Fields

Chen Mufa

(Beijing Normal University)

Abstract

These notes are presented at a summer school as a preparation of the Nankai's year 1988—1989 on probability and statistics. First some basic facts about weak convergence and probability metrics are reviewed. Then some existence and uniqueness theorems for random fields are introduced. Finally the phase transitions by using Peierls' contour method and reflection positivity are studied. The notes are self-contained in the sense that all details are given.

《陈省身数学奖》评选揭晓

为了奖励作出突出成就的我国中青年数学家，促进我国数学的发展，由香港亿利达（ELITE）工业集团有限公司董事长刘永龄先生捐助而设立的《陈省身数学奖》，第二届该奖评选揭晓，1987年和1988年的获奖人为中年数学家李邦河和姜伯驹。

李邦河同志现任中国科学院系统科学研究所研究员，他获奖的主要成果是：1. 在微分流形的浸入理论的研究中，发展了若干不同的方法，完整地解决了这一困难领域中的许多问题，系统地推进了这一领域的发展。2. 在代数结和球的同伦群方面的工作。3. 在叶状结构方面的工作。

姜伯驹同志现任北京大学数学系教授兼南开数学研究所副所长，中国科学院学部委员，第三世界科学院院士。他的获奖工作主要是：1. 关于"Nielsen 数等于最少不动点数"问题的研究。2. 关于计算 Nielsen 数方法的研究。3. 关于 Nielsen 式的周期点理论的研究。

此外，第一届《陈省身数学奖》的评选结果是：1985年和1986年的获奖者为中年数学家钟家庆和张恭庆。

钟家庆同志是中国科学院数学研究所研究员，已于1987年 4 月12日因病逝世。他的获奖工作主要是：1. 证明了具非负全纯双截曲率及正 Ricci 曲率的紧的 Kahler-Einstein 流形必等度于一紧的 Hermite 对称空间。2. 证明了 Ricci 曲率为非负的紧的黎曼流形M的Laplace-Beltrami 算子的第一特征值 $\lambda_1 \geq \pi^2/d^2$，其中 d 是M的直径。

张恭庆同志现任北京大学数学系教授兼数学研究所所长（获奖时任副所长）。他的获奖工作可归纳为以下两个方面：1. 发展 Morse 理论使适用于非线性分析问题的研究。2. 发展 Mountain Pass 定理扩大其应用范围。

（章学诚摘自《中国数学会通讯》1989年第1期和1987年第1期。）