# 概率核的存在性及转移概率的可微性

陈　木　法

（数　学　系）

**摘　　要**

本文给出了某个概率核存在的充要条件。结合已有的结果，我们得到了抽象空间中跳过程的转移函数关于时间参数 $t$ 可微的充要条件。

对于离散状态空间跳过程的转移函数的可微性已由D. G. Austin[1,2]，K. L. Chung[4,5]和G. E. H. Reuter[9]作了详尽的研究，有了完全的解答。许宝騄[6]，研究了$n$维欧氏空间情形。新近，郑小谷和刘秀芳[11]把许的结果推广到具有可数基的内正则拓扑空间。其关键的一步是就这种空间解决了下述问题（参见〔11〕，引理1.1）：

设$\mathscr{B}_{[0,\infty)}$是$[0,\infty)$上的Borel $\sigma$域，其上有Lebesgue测度$dt$。再设$(E,\ \mathscr{E})$是任意的可测空间。$r:[0,\infty)\times\mathscr{E}\longrightarrow\boldsymbol{R}$满足

$$r(\cdot,A)\in\mathscr{B}_{[0,\infty)},\quad A\in\mathscr{E};$$

$$0\leqslant r(\cdot,A)\leqslant 1,\quad \text{a.e.}t,\quad A\in\mathscr{E};$$

$$r(\cdot,E)=1,\quad \text{a.e.}t$$

$$r(\cdot,\sum_n A_n)=\sum_n r(\cdot,A_n),\quad \text{a.e.}t$$

这里，例如说，最后的等式的例外集依赖于序列$\{A_n\}_1^\infty$。

**问题**：是否存在概率核$R$（即对每$A\in\mathscr{E}$，$R(\cdot,A)\in\mathscr{B}_{[0,\infty)}$，而对于每$t\geqslant 0$，$R(t,\cdot)$是$\mathscr{E}$上的概率测度），使得

$$R(\cdot,A)=r(\cdot,A),\quad \text{a.e.}t,\quad A\in\mathscr{E}.$$

本文利用条件概率的工具和乘积空间的技巧，给出这个问题有解的充要条件，这同时也给出了转移函数可微性的充要条件（详见〔3〕第一章）。作为应用，我们将证明：对于万有可测空间，条件总是满足的。

显然，我们只需考虑$t\in[0,1]$的情形。简记$\mathscr{B}=\mathscr{B}_{[0,1]}$。定义

$$P(B\times A)=\int_B r(t,A)dt,\quad B\in\mathscr{B},\quad A\in\mathscr{E}$$

则$P$非负，$P([0,1]\times E)=1$。不难看出：$P$关于两个变元分别是$\sigma$可加的，记

$$\mathscr{D}\equiv\{B\times A:\ B\in\mathscr{B},\ A\in\mathscr{E}\}.$$

本文1985年月9日25收到。

如果$D$，$D_k\in\mathscr{D}$，$1\leqslant k\leqslant n$，$D=\sum_{k=1}^{n}D_k$，那么对$n$使用数学归纳法，不难证明$P$在半集代数$\mathscr{D}$上是有限可加的．熟知，为使$P$在$\mathscr{D}$上$\sigma$可加，当且仅当它在$\mathscr{D}$上是次$\sigma$可加的：

$$D_n\in\mathscr{D},\ n\geqslant 1,\ \{D_n\}\text{两两不交}$$
$$\Longrightarrow P\left(\sum_{n=1}^{\infty}D_n\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}P(D_n).$$

最后，记

$$\mathscr{G}=\{B\times E:\ B\in\mathscr{D}\}$$

那么$\mathscr{G}$是$\mathscr{B}\times\mathscr{E}$的子$\sigma$域，它是可数生成的．

**定理．**$R$存在当且仅当（i）$P$在$\mathscr{D}$上次$\sigma$可加；（ii）$P(\cdot|\mathscr{G})$有正则修正两条件同时成立．

证．首先注意，若条件（i）成立，则$P$可唯一扩张成$\mathscr{B}\times\mathscr{E}$上的概率测度，从而(ii)有意义．

（a）必要性．假定所述的$R$存在．

先证：若记$D(t)$为$D\in\mathscr{B}\times\mathscr{E}$在$t$处的截口，则作为$t$的函数，$R(t,\ D(t))$是$\mathscr{B}$可测的．这是单调类定理的典型应用，只需留意

$$R(t,D(t))=I_B(t)R(t,A),\quad D=B\times A\in\mathscr{D}.$$

其次，定义$\bar{P}(D)=\int R(t,D(t))dt$，$D\in\mathscr{B}\times\mathscr{E}$．

显然$\bar{P}$是$\mathscr{B}\times\mathscr{E}$上的概率测度，它在$\mathscr{D}$上与$P$重合，故由$\bar{P}$在$\mathscr{D}$上的$\sigma$可加性立得$P$满足(i)．以下改写$\bar{P}$为$P$．由于

$$\begin{aligned}&\int_{B\times E}P(D|\mathscr{G})dt=P((B\times E)\cap D)\\&=\int R(t,\ (B\times E)(t)\cap D(t))\ dt=\int_B R(t,D(t))dt\\&=\int_{B\times E}R(t,D(t))dP,\quad B\in\mathscr{B},\ D\in\mathscr{B}\times\mathscr{E}\end{aligned}$$

以及 $$R(t,\ \sum_n D_n(t))=\sum_n R(t,\ D_n(t)),\quad t\geqslant 0.$$

可见$R(t,\ (\cdot)(t))$就是$P(\cdot|\mathscr{G})(t)$的正则修正，故条件(ii)也满足．

(b)．充分性．假定条件（i）和（ii）都满足．取$P(\cdot|\mathscr{G})$的正则修正为$\tilde{R}$．命$R(t,\ A)=\tilde{R}(t,\ [0,1]\times A)$，则$R(t,\ A)$是一个概率核．又

$$\begin{aligned}\int_B R(t,\ A)dt&=\int_{B\times E}\tilde{R}(t,[0,1]\times A)dP\\&=P((B\times E)\cap[0,1]\times A)\\&=P(B\times A)=\int_B r(t,\ A)dt,\quad B\in\mathscr{B}\end{aligned}$$

故

$$R(\cdot,A)=r(\cdot,A),\ \text{a.e.}\,t,\ A\in\mathscr{E}.\ \text{证毕．}$$

我们指出：如果$\mathscr{E}$是可数生成的，那么$\mathscr{B}\times\mathscr{E}$也是可数生成的．此时，正则条件概率存在的充要条件已由马志明得到[8]．更有兴趣的是把条件施加到（$E$，$\mathscr{E}$）上，即找出对于各种$r$普遍适用的空间．

下面，我们考虑万有可测空间（universal measurable space）：它可测同构于一个

完备可分距离空间（$X$，$\mathscr{B}(X)$）的一个万有可测子集$X_0$及其上的Borel $\sigma$ 域 $X_0\cap\mathscr{B}(X)$ [7,10]。我们之所以限于这种空间是因为：一方面，这种空间足够广泛，它包含 Blackwell 空间和标准Borel空间等。当然，它也包含 Polish 空间；另一方面，这种空间在概率论中有着重要的地位。例如说，具有这种状态空间的任何马氏过程必定有转移函数[7]，正则条件概率必定存在[10]，进而Kolmogorov扩张定理成立。

**推论**。如果（$E$，$\mathscr{E}$）是万有可测空间，则定理的条件满足。

证。使用上述记号。不失一般性，可设$(E,\mathscr{E})=(X_0, X_0\cap\mathscr{B}(X))$。

先证：（$E$，$\mathscr{E}$）是内正则空间。即对于一个$\mathscr{E}$上的概率测度$\mu$和$A\in\mathscr{E}$，

$$\mu(A)=\sup\{\mu(K)\text{：紧集}K\subset A\}.$$

为此，定义$(X,\mathscr{B}(X))$上的概率测度$\nu$如次：

$$\nu(A)=\mu(B\cap E),\quad B\in\mathscr{B}(X).$$

由万有可测子集的定义知，存在$B_1$，$B_2\in\mathscr{B}(X)$，使得$B_1\subset E\subset B_2$且$\nu(B_1)=\nu(B_2)=\mu(E)=1$。任给$A\in\mathscr{E}$，则存在$B\in\mathscr{B}(X)$，使$A=B\cap E$，现在，两次使用（$X$，$\mathscr{B}(X)$）的内正则性，我们看到

$$\begin{aligned}\mu(A)&=\nu(B)=\nu(B\cap B_1)\\&=\sup\{\nu(K)\text{：紧集}K\subset B\cap B_1\}\\&=\sup\{\mu(K)\text{：紧集}K\subset B\cap B_1\}\\&\leqslant\sup\{\mu(K)\text{：紧集}K\subset B\cap E\}\\&=\sup\{\nu(K)\text{：紧集}K\subset B\cap E\}\\&\leqslant\sup\{\nu(K)\text{：紧集}K\subset B\cap B_2\}\\&=\mu(A).\end{aligned}$$

可见，等号必定成立。即

$$\mu(A)=\sup\{\mu(K)\text{：紧集}K\subset B\cap E=A\}.$$

由于$A$和$\mu$都是任意的，故$(E,\mathscr{E})$为内正则。

如上所述，对于万有可测空间，条件（ii）自然成立。至于条件（i），可由已证的（$E$，$\mathscr{E}$）的内正则性和〔12〕（第三章，定理74）得到。直接证明也是容易的。

## 参 考 文 献


〔1〕 Austin, D. G., Proc., *Amer. Math. Soc.*, **7** (1956), 756—761.

〔2〕 Austin, D. G., *Duke Math. J.*, **25** (1958), 625—629.

〔3〕 陈木法，跳过程与粒子系统，北京师范大学出版社，1986.

〔4〕 Chung, K. L., *Trans. Amer. Math. Soc.*, **81** (1956), 195—210.

〔5〕 Chung, K. L., *Fourth Berkeley Symposium on Math. Statist. and Probability*, Vol. II 1961, 35—56.

〔6〕 许宝騄，北京大学学报（自然科学版），**3**(1958)，3:257—269.

〔7〕 Kuznetsov, S. E., *Theory Prob. Appl.*, **25** (1980), 389—393.

〔8〕 马志明，正则条件概率存在的充要条件（手稿）.

〔9〕 Reuter, G. E. H., *Acta Math.*, **97** (1957), 1—46.

〔10〕 Sokal, A. D., *Z. Wahr.*, **56** (1981), 537—548.

〔11〕 郑小谷、刘秀芳，北京师范大学学报（自然科学版）1984，1:25—35.

〔12〕 Deellacherie, C. and Meyer, P. A., *Probability and Potential*, North-Holland, 1978.

# EXISTENCE OF A PROBABILITY KERNEL AND THE DIFFERENTIABILITY OF THE TRANSITION FUNCTION OF JUMP PROCESS IN ABSTRACT SPACE

Chen Mufa

**Abstract**

Let $\mathscr{B}$ be the Borel $\sigma$-field on $[0,1]$, in which the Lebesgue measure is denoted by $dt$, and let $(E,\mathscr{E})$ be an arbitrary measurable space. Suppose that $r$ is a function on $[0,1]\times E$ satisfying

$$r(\cdot,A)\in\mathscr{B},\ A\in\mathscr{E};\ 0\leqslant r(\cdot,A)\leqslant 1,\ \text{a.e.}\,t,\ A\in\mathscr{E};$$

$$r(\cdot,E)=1,\ \text{a.e.}\,t;\ r\Big(\cdot,\sum_n A_n\Big)=\sum_n r(\cdot,A_n),\ \text{a.e.}\,t.$$

The differentiability of the function mentioned at the title can be reduced to the existence of a probability kernel $R$ satisfying $R(\cdot,A)=r(\cdot,A)$, a.e.$t$, $A\in\mathscr{E}$. In this note, two conditions are shown to be necessary and sufficient for the existence of $R$. In particular, the conditions are satified in the case $(E,\mathscr{E})$ being a universal measurable space, which is isomorphic to a universally measurable subset and its Borel $\sigma$-field of a complete separable metric space.