马链的基本耦合

陈　木　法

（数学系）

研究耦合的原因在于：对于两个不同的过程，要直接地比较它们之间的关系，往往相当困难。耦合的想法就是要把这两个过程放到同一个概率空间上，即构造乘积空间中的一个新的过程——耦合过程，使它的边缘过程就是原先的两个过程。然后，通过新过程的某种序结构来达到比较原过程的目的。

耦合方法最先出现于无穷质点马程的研究[1,4]，而后被许多人所应用和发展[3,5]。关于马链的耦合，其作用将会在以后的文章中看到。本文的目的是建议一些两个或多个连续参数的马链的基本耦合。我们将给出相应的保序性条件。

一、耦合的基本要求

设$\{\eta_t\}$和$\{\zeta_t\}$是两个马氏过程。状态空间分别为$(E_1, \mathscr{E}_1)$和$(E_2, \mathscr{E}_2)$。命$(\widetilde{E}, \widetilde{\mathscr{E}})$为$(E_i, \mathscr{E}_i)$ $(i=1, 2)$的乘积可测空间。为达到研究原过程的目的，每一个合理的耦合过程$\{\widetilde{\eta}_t\}$，都必须满足：

i）$\{\widetilde{\eta}_t\}$有正确的边缘分布，即

$$\widetilde{P}^{(\eta,\zeta)}[\widetilde{\eta}_t \in B_1 \times E_2] = P^{\eta}[\eta_t \in B_1],$$
$$\widetilde{P}^{(\eta,\zeta)}[\widetilde{\eta}_t \in E_1 \times B_2] = P^{\zeta}[\zeta_t \in B_2],\ B_1 \in \mathscr{E}_1,\ B_2 \in \mathscr{E}_2.$$

此处$\widetilde{P}^{(\eta,\zeta)}$表示过程$\{\widetilde{\eta}_t\}$从$(\eta, \zeta)$出发的概率分布，其它记号类似。

为比较原过程$\{\eta_t\}$和$\{\zeta_t\}$，常假定$E_1=E_2=E$，并在E上定义某种半序关系"$\leqslant$"。此时，耦合的主要目的之一是

ii）保序性。即$\eta \leqslant \zeta \Longrightarrow \widetilde{P}^{(\eta,\zeta)}(\eta_t \leqslant \zeta_t)=1$，$\forall t \geqslant 0$。我们称$f$：$E \to R$为单调增的，如果

$$\eta,\ \zeta \in E,\ \eta \leqslant \zeta \Rightarrow f(\eta) \leqslant f(\zeta).$$

这样，如果条件i）和ii）满足，则对于每一个非负的单调增函数f，我们将有

$$\eta \leqslant \zeta \Rightarrow P_t^{(1)} f(\eta) \leqslant P_t^{(2)} f(\zeta),\quad t \geqslant 0$$

此处$P_t^{(1)}$和$P_t^{(2)}$分别表示过程$\{\eta_t\}$和$\{\zeta_t\}$的转移概率。

除了上述两个要求而外，当然，首先要求

iii）耦合过程$\{\widetilde{\eta}_t\}$存在。

本文的目的是对马链讨论上述三个要求。为简单起见，取

$$E_1 = E_2 = \{0, 1, 2, \cdots\} \equiv Z_+,\ \widetilde{E} = Z_+ \times Z_+.$$

本文1983年12月22日收到。

我们限于保守、全稳定Q过程。这样，本文所涉及的Q矩阵都是保守、全稳定的。

设$Q_s=(q_{ij}^{(s)}: i, j\in Z_+)$，$s=1, 2$是两个$Q$矩阵。我们要寻找$\widetilde{E}$上的一个$Q$矩阵

$$\widetilde{Q}=(\widetilde{q}(i_1, i_2), (j_1, j_2)): (i_1, i_2), (j_1, j_2)\in\widetilde{E}),$$

使它所决定的Q过程$\widetilde{P}(t, (i_1, i_2), (j_1, j_2))$（我们也用其拉氏变换$\widetilde{P}(\lambda, (i_1, i_2), (j_1, j_2))$）满足如下三个条件：

i)′边缘性：

$$\sum_{j_2}\widetilde{P}(t, (i_1, i_2), (j_1, j_2))=P_1(t, i_1, j_1)，与i_2无关.$$

$$\sum_{j_1}\widetilde{P}(t, (i_1, i_2), (j_1, j_2))=P_2(t, i_2, j_2)，与i_1无关.$$

其中$P_s(t, i_s, j_s)$是由Q_s所决定的最小Q过程。

ii)′保序性：

$$i_1\leqslant i_2\Rightarrow\sum_{j_1\leqslant j_2}\widetilde{P}(t, i_1, i_2), (j_1, j_2))=1, \ \forall t\geqslant 0$$

iii)′正则性。即$\widetilde{Q}$唯一决定Q过程$\widetilde{P}_t$。

二、关　于 i)′

假设$\widetilde{Q}$满足 i)′，则由保守性假定可推出

$$\sum_{j_2}\widetilde{q}((i_1, i_2), (j_1, j_2))=q_{i_1 j_1}^{(1)}, i_1, i_2, j_1\in E.$$

（见〔6〕，第六章定理 3）。类似的第二个边缘的等式略去不写，以下类同．这样，对于每一个$f\in C_b(E)$（它是E上的一个有界函数，或有界数列．以下常将它视作$\widetilde{E}$上的函数），我们有

i)″$Qf(\cdot, i_2)=\widetilde{Q}_1 f$，与$i_2$无关。

这样，我们有

1．引理． i)′⇒i)″.

我们将证逆命题。为此，先证明两条引理。

2．引理． 设$Q_n=(q_{ij}^{(n)})$，和$Q=(q_{ij})$是一列Q矩阵.相应的最小Q过程分别记作

$$P_\lambda^{(n)}=(P_{ij}^{(n)}(\lambda))和P_\lambda=(P_{ij}(\lambda)).$$

如果$Q_n\xrightarrow[n\to\infty]{}Q$，逐点，

则

a）$\varliminf_{n\to\infty}P_\lambda^{(n)}\geqslant P_\lambda$，逐点。

b）若还设P_λ不断，则$\varliminf_{n\to\infty}P_\lambda^{(n)}=P_\lambda$.

证．由$P_\lambda^{(n)}$满足向后方程及Fatou引理得

$$\varliminf_{n\to\infty}P_{ij}^{(n)}(\lambda)\geqslant\sum_{k\neq i}\varliminf_{n\to\infty}\left(\frac{q_{ik}^{(n)}}{\lambda+q_i^{(n)}}P_{kj}^{(n)}(\lambda)\right)+\varliminf_{n\to\infty}\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_i^{(n)}}$$

$$=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}\varliminf_{n\to\infty}P_{kj}^{(n)}(\lambda)+\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_i}$$

及最小解的比较定理（〔2〕，定理3.3.1）立得a）。

3．注．结论a）无需假定保守性．

往证b）．由a）和Fatou引理，

$$\frac{1}{\lambda}\geqslant\varliminf_{n\to\infty}\sum_j P_{ij}^{(n)}(\lambda)\geqslant\sum_j\varliminf_{n\to\infty}P_{ij}^{(n)}(\lambda)$$

$$\geqslant\sum_j P_{ij}(\lambda)=\frac{1}{\lambda}.$$

可见等式必须成立．

4．引理．设Q_1和Q_2为有界Q矩阵．则i)″$\Longrightarrow$i)′．

证．先证：若i)″成立，则$\widetilde{Q}$有界．事实上，

$$\widetilde{q}(i_1,i_2)\equiv\sum_{(j_1,j_2)\neq(i_1,i_2)}\widetilde{q}((i_1,i_2),(j_1,j_2))$$

$$\leqslant\sum_{j_1\neq i_1}\sum_{j_2}\widetilde{q}((i_1,i_2),(j_1,j_2))$$

$$+\sum_{j_2\neq i_2}\sum_{j_1}\widetilde{q}((i_1,i_2),(j_1,j_2))=q_{i_1}^{(1)}+q_{i_2}^{(2)}$$

这样

$$\|\widetilde{Q}\|\equiv\sup_{(i_1,i_2)\in\widetilde{E}}\widetilde{q}(i_1,i_2)\leqslant\|Q_1\|+\|Q_2\|.$$

从而，三个Q过程均唯一．我们有

5．　$\widetilde{P}_t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\widetilde{Q}^n$；$P_t^{(s)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}Q_s^n$，$s=1,2$，此时$\widetilde{Q}(Q_s)$是$C_b(\widetilde{E})$（$C_b(E)$）到自身的有界线性算子．这样，对于每一个$f\in C_b(E)$，由i)″得$\widetilde{Q}f(\cdot,i_2)=Q_1f$，与$i_2$无关．进而由归纳法得$\widetilde{Q}^nf(\cdot,i_2)=Q_1^nf$，与$i_2$无关．故由（5）得$\widetilde{P}_tf(\cdot,i_2)=P_t^{(1)}f$，与$i_2$无关．此即是i)′．

6．注．每一个Q矩阵可由有界Q矩阵序列逐点逼近．事实上，只须取$Q^{(n)}$如次：$q_i^{(n)}=q_i\wedge n$；$q_{ij}^{(n)}=q_{ij}q_i^{(n)}/q_i$，$i\neq j$．（此处约定$0/0=0$）．

7．引理．设三个Q过程均唯一．如果存在Q矩阵序列$Q_s^{(n)}$，使$Q_s^{(n)}\longrightarrow Q_s$，逐点，且$\widetilde{Q}^{(n)}\to\widetilde{Q}$逐点，则i)″$\Longrightarrow$i)′．

证．由引理4知，$\widetilde{Q}^{(n)}$有界，且对于每个$f\in C_b(E)$，$\widetilde{P}_t^{(n)}f(\cdot,i_2)=P_t^{(n,1)}f$，与$i_2$无关．

于是
$$\sum_{j_2}\widetilde{P}^{(n)}(\lambda,(i_1,i_2),(j_1,j_2))=P_1^{(n)}(\lambda,i_1,j_1),$$

进而，由引理2得

$$\sum_{j_2}\widetilde{P}(\lambda,(i_1,i_2),(j_1,j_2))$$

$$=\sum_{j_2}\lim_{n\to\infty}\widetilde{P}^{(n)}(\lambda,(i_1,i_2),(j_1,j_2))$$

$$\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\sum_{j_2}\widetilde{P}^{(n)}(\lambda,(i_1,i_2),(j_1,j_2))$$

$$= \lim_{n\to\infty} P_1^{(n)}(\lambda, i_1, j_1) = P_1(\lambda, i_1, j_1)$$

再由Q过程的唯一性立知上面的等号必须成立．此即是 i)′．

由引理 1 和引理 7 得

8．定理．设引理 7 中的条件满足，则i)′⟺i)″．

三、关　　于 ii)′

本节假定三个Q过程均唯一．

显然，条件ii)′与下面的任一条件等价：

a）$i_1 \leqslant i_2$, $j_1 > j_2 \Rightarrow \widetilde{P}(t, (i_1, i_2), (j_1, j_2)) = 0$, $\forall t \geqslant 0$．

b）$i_1 \leqslant i_2$, $j_1 > j_2 \Rightarrow \widetilde{P}(\lambda, (i_1, i_2), (j_1, j_2)) = 0$, $\forall \lambda > 0$．

条件 a）推出

$$\text{ii)}'' \; i_1 \leqslant i_2,\ j_1 > j_2 \Rightarrow \tilde{q}((i_1, i_2), (j_1, j_2)) = 0$$

事实上，我们有

9．定理．如果三个过程均唯一，则ii)′⟺ii)″．

证．只需再证ii)″⇒ii)′．设$i_1 \leqslant i_2$, $j_1 > j_2$，则$\widetilde{P}^{(n)}(\lambda, (i_1, i_2), (j_1, j_2)) \equiv 0$．假设第$m$步已真，则

$$\begin{aligned}
&\widetilde{P}^{(m+1)}(\lambda, (i_1, i_2), (j_1, j_2)) \\
&= \sum_{(k_1,k_2)\neq(i_1,i_2)} \frac{\tilde{q}((i_1, i_2), (k_1, k_2))}{\lambda + \tilde{q}(i_1, i_2)} \widetilde{P}^{(m)}(\lambda, (k_1, k_2), (j_1, j_2)) \\
&+ \frac{\delta((i_1, i_2), (j_1, j_2))}{\lambda + \tilde{q}(i_1, i_2)} \\
&= \sum_{\substack{k_1 \leqslant k_2 \\ (k_1,k_2)\neq(i_1,i_2)}} \frac{\tilde{q}((i_1, i_2), (k_1, k_2))}{\lambda + \tilde{q}(i_1, i_2)} \widetilde{P}^{(m)}(\lambda, (k_1, k_2), (j_1, j_2)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
&\widetilde{P}(\lambda, (i_1, i_2), (j_1, j_2)) \\
&= \lim_{m\to\infty} P^{(m)}(\lambda, (i_1, i_2), (j_1, j_2)) = 0.
\end{aligned}$$

这导出 b)，等价地，这导出ii)′．

满足i)″的$\widetilde{Q}$可以有各种不同的取法．下面是最基本的一种：

10． $\tilde{q}((i_1, i_2), (j_1, j_2))$

$$= \begin{cases} (q^{(1)}_{i_1 k} - q^{(2)}_{i_2 k})^+, & j_2 = i_2,\ j_1 = k \neq i_1, \\ (q^{(2)}_{i_2 k} - q^{(1)}_{i_1 k})^+, & j_1 = i_1,\ j_2 = k \neq i_2, \\ q^{(1)}_{i_1 k} \wedge q^{(2)}_{i_2 k}, & j_1 = j_2 = k \neq i_1, i_2, \\ 0, & (j_1, j_2) \neq (i_1, i_2) \text{ 的其它情形}. \end{cases}$$

$$\tilde{q}(i_1, i_2) = \sum_{(j_1,j_2)\neq(i_1,i_2)} \tilde{q}((i_1, i_2), (j_1, j_2)).$$

利用算子的写法常是方便的：

11. $$\tilde{Q}f(i_1,i_2)=\sum_k\left(q_{i_1k}^{(1)}-q_{i_2k}^{(2)}\right)^+\left(f(k,i_2)-f(i_1,i_2)\right)$$
$$+\sum_k\left(q_{i_2k}^{(2)}-q_{i_1k}^{(1)}\right)^+\left(f(i_1,k)-f(i_1,i_2)\right)$$
$$+\sum_k q_{i_1k}^{(1)}\wedge q_{i_2k}^{(2)}\left(f(k,k)-f(i_1,i_2)\right)$$

为使这样的$\tilde{Q}$满足ii)″，充要条件是

12. 保序性条件.

$$i_1\leqslant i_2\Rightarrow q_{i_1,i_2+1}^{(1)}\leqslant q_{i_2,i_2+1}^{(2)},$$
$$i_1\leqslant i_2\Rightarrow q_{i_1,i_1-1}^{(1)}\geqslant q_{i_2,i_1-1}^{(2)},$$

如果$Q_1=Q_2=Q$，则条件11可解释为：随着行号的增加，在Q的对角线的上方，每列元素单调上升；而在下方，每列元素单调下降。

下面，我们将给出$\tilde{Q}$的另一种更为细致的取法。为书写方便，将使用如下记号：

13. $$\begin{cases}\mathrm{I}_{1,k}^{\pm}f(i_1,i_2)=q_{i_1,i_1\pm k}^{(1)}\left[f(i_1\pm k,i_2)-f(i_1,i_2)\right],\\ \mathrm{I}_{2,k}^{\pm}f(i_1,i_2)=q_{i_2,i_2\pm k}^{(2)}\left[f(i_1,i_1\pm k)-f(i_1,i_2)\right],\\ \mathrm{II}_{1,k}^{\pm}f(i_1,i_2)=\left(q_{i_1,i_1\pm k}^{(1)}-q_{i_2,i_2\pm k}^{(2)}\right)^+\left[f(i_1\pm k,i_2)-f(i_1,i_2)\right],\\ \mathrm{II}_{2,k}^{\pm}f(i_1,i_2)=\left(q_{i_2,i_2\pm k}^{(2)}-q_{i_1,i_1\pm k}^{(1)}\right)^+\left[f(i_1,i_2\pm k)-f(i_1,i_2)\right],\\ \mathrm{II}_{3,k}^{\pm}f(i_1,i_2)=q_{i_1,i_1\pm k}^{(1)}\wedge q_{i_2,i_2\pm k}^{(2)}\left[f(i_1\pm k,i_2\pm k)-f(i_1,i_2)\right].\end{cases}$$

此处$k\geqslant1$。若有某k，上述某$q_{i,i-k}$无意义，则约定为0。

在给出耦合的形式之前，让我们先看两个例子。

14. 生灭型。设Q_1和Q_2是两个生灭Q矩阵。此时，若让两个过程自由运动，则破坏条件ii)″只能发生在对角线集$\Delta_1\equiv\{(i_1,i_2)\in\tilde{E}:i_1=i_2\}$上。因此，为了保序，在此集上，必须让它们同时运动，而在其他地方，可让它们自由运动。从而，可取

15. $$\tilde{Q}_1f(i_1,i_2)=(\mathrm{I}_{11}^{+}+\mathrm{I}_{21}^{+})f(i_1,i_2)\,\mathrm{I}_{\Delta_1^c}(i_1,i_2)$$
$$+(\mathrm{II}_{11}^{+}+\mathrm{II}_{21}^{+}+\mathrm{II}_{31}^{+})f(i_1,i_2)\,\mathrm{I}_{\Delta_1}(i_1,i_2)$$

条件i)″得以满足。此时，12变成

16. $q_{i,i+1}^{(1)}\leqslant q_{i,i+1}^{(2)},\ q_{i,i-1}^{(1)}\geqslant q_{i,i-1}^{(2)},\ i\in E$.

17. 生一恰死二模型。此时Q_1和Q_2的对角线上方的第一排元素非零。对角线下方第二排元素非零（但$q_{20}^{(2)}=0$）其他各排均为零。对于"生"来说，例外集仍然是Δ_1，对于"死"来说，例外集是$\Delta_1\cup\Delta_2$，此处$\Delta_2=\{(i_1,i_2):i_2=i_1+1\}$。因此，我们可取

18. $$\tilde{Q}_2f(i_1,i_2)=(\mathrm{I}_{11}^{+}+\mathrm{I}_{21}^{+})f(i_1,i_2)\,\mathrm{I}_{\Delta_1^c}(i_1,i_2)$$
$$+(\mathrm{I}_{12}^{-}+\mathrm{I}_{22}^{-})f(i_1,i_2)\,\mathrm{I}_{\Delta_1^c\cap\Delta_2^c}(i_1,i_2)$$
$$+(\mathrm{I}_{11}^{+}+\mathrm{II}_{21}^{+}+\mathrm{II}_{31}^{+})f(i_1,i_2)\,\mathrm{I}_{\Delta_1}(i_1,i_2)$$
$$+(\mathrm{II}_{12}^{-}+\mathrm{II}_{22}^{-}+\mathrm{II}_{32}^{-})f(i_1,i_2)\,\mathrm{I}_{\Delta_1\cup\Delta_2}(i_1,i_2)$$

此时，保序性条件成为：

19. $q_{i,i+1}^{(1)}\leqslant q_{i,i+1}^{(2)},\ q_{i,i-2}^{(1)}\geqslant q_{i,i-2}^{(2)}$.

现在，我们不难叙述一般模型。首先，找出"生"的例外集Δ_1和"死"的例外集Δ_2。

然后取

20. $$\tilde{Q}f(i_1,i_2)=\sum_{k=1}^{\infty}(\mathrm{I}_{1k}^{+}+\mathrm{I}_{2k}^{+})f(i_1,i_2)\,\mathrm{I}_{\Delta_1^c}(i_1,i_2)$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}(\mathrm{II}_{1k}^{+}+\mathrm{II}_{2k}^{+}+\mathrm{II}_{3k}^{+})f(i_1,i_2)\,\mathrm{I}_{\Delta_1}(i_1,i_2)$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}(\mathrm{I}_{1k}^{-}+\mathrm{I}_{2k}^{-})f(i_2,i_2)\,\mathrm{I}_{\Delta_2^c}(i_1,i_2)$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}(\mathrm{II}_{1k}^{-}+\mathrm{II}_{2k}^{-}+\mathrm{II}_{3k}^{-})\,\mathrm{I}_{\Delta_2}(i_1,i_2).$$

为讨论保序条件，只须看II_{1k}^{+}和II_{2k}^{-}两项，即

21. $$q_{i_1,i_1^{(1)}+k}\leqslant q_{i_2,i_2^{(2)}+k},\ k\geqslant 1,\ (i_1,i_2)\in\Delta_1,$$
$$q_{i_1,i_1^{(1)}-k}\geqslant q_{i_2,i_2^{(2)}-k},\ k\geqslant 1,\ (i_1,i_2)\in\Delta_2.$$

将11和20作一比较是有益的．首先，模型17不满足条件12，因而不能用11得出保序耦合。换句话说，11并不能完全包括20。而且，如果Q_1和Q_2有相同的运动规律，那么，就条件 iii)′来说，20常比11容易满足（参见下节）。因此，20更为有用一些．然而，由于11的形式简单，适应性广，仍然有其基本的意义。

至此，我们已经给出了耦合$\tilde{Q}$矩阵的两种基本形式．当然，还有许多特殊形式．我们不再一一列举．

四、关　　于 iii)′

我们有如下结果

22. 定理． 设$\tilde{Q}$满足i)″．若$\tilde{Q}$正则，则$Q^{(1)}$和$Q^{(2)}$亦然．

证．我们知道，对于固定的$\lambda>0$和$j_1\in E$，$\left\{\sum_{j_2}\tilde{P}(\lambda,(i_1,i_2),(j_1,j_2)):\ i_1,i_2\in E\right\}$是方程

$$x(\lambda,(i_1,i_2),j_1)=\sum_{(k_1,k_2)\neq(i_1,i_2)}\frac{\tilde{q}((i_1,i_2),(k_1,k_2))}{\lambda+\tilde{q}(i_1,i_2)}\cdot x(\lambda,(k_1,k_2),j_1)+\frac{\delta(i_1,j_1)}{\lambda+\tilde{q}(i_1,i_2)}$$

的最小非负解．若能证明$\{\overline{x}(\lambda,(i_1,i_2),j)\equiv P_1(\lambda,i_1,j_1):i_1,i_2\in E\}$也满足此方程，则必有

$$\sum_{j_2}\tilde{P}(\lambda,(i_1,i_2),(j_1,j_2))\leqslant P_1(\lambda,i_1,j_1),\ i_1,i_2\in E$$

由此及λ和j_1的任意性立即导出定理的结论．这样，我们只需验证$\{\overline{x}(\lambda,(i_1,i_2),j_1):i_1,i_2\in E\}$满足上述方程．为此，只需注意

$$\sum_{(k_1,k_2)\neq(i_1,i_2)}\tilde{q}((i_1,i_2),(k_1,k_2))P_1(\lambda,k_1,j_1)+\delta(i_1,j_1)$$
$$=\sum_{k_1\neq i_1}\sum_{k_2}\tilde{q}((i_1,i_2),(k_1,k_2))P_1(\lambda,k_1,i_1)$$

$$+\sum_{k_2\neq i_2}\tilde{q}((i_1,i_2),(i_1,k_2))P_1(\lambda,i_1,j_1)+\delta(i_1,j_1)$$

$$=\sum_{k_1\neq i_1}q^{(1)}_{i_1k_1}P_1(\lambda,k_1,j_1)+\Big(\sum_{k_2}\tilde{q}((i_1,i_2),(i_1,k_2))$$

$$+\tilde{q}((i_1,i_2),(i_1,i_2))\Big)P_1(\lambda,i_1,j_1)+\delta(i_1,j_1)$$

$$=(\lambda+\tilde{q}^{(1)}_{i_1})P_1(\lambda,i_1,j_1)$$

$$+q^{(1)}_{i_1i_1}P(\lambda,i_1,j_1)+\tilde{q}(i_1,i_2)P_1(\lambda,i_1,j_1)$$

$$=(\lambda+\tilde{q}(i_1,i_2))P_1(\lambda,i_1,j_1)\text{。证毕。}$$

定理（22）的反问题是：

23. 问题．何时可由$Q_s(s=1,2)$过程的唯一性导出$\tilde{Q}$过程的唯一性。

一般地说，若干个马链的耦合仍是一个高维的马链，它的唯一性问题可用〔7〕中的方法讨论。特别地，在〔7〕中，我们已经证明了形如15所定义的$\tilde{Q}_1$是正则的（我们也证明了高维结果）.这里，我们用类似的想法证明

24. 定理．设$Q_1=Q_2=Q=(q_{ij})$正则，且为生灭型，则如下定义的$\overline{Q}=(\overline{q}((i_1,i_2),(j_1,j_2)):(i_1,i_2),(j_1,j_2)\in\tilde{E})$；

$$\overline{Q}f(i_1,i_2)=\sum_{k\geq1}(\mathrm{I}^{\pm}_{1,k}+\mathrm{I}^{\pm}_{2,k})f(i_1,i_2)\,\mathrm{I}_{\Delta^c}(i_1,i_2)$$

$$+\sum_{k\geq1}(\mathrm{II}^{\pm}_{1,k}+\mathrm{II}^{\pm}_{2,k}+\mathrm{II}^{\pm}_{3,k})f(i_1,i_2)\,\mathrm{I}_{\Delta}(i_1,{}_2i)$$

正则。其中$\Delta=\{(i_1,i_2):i_1=i_2\}$.

证．取$B_0=\{(0,0)\}$，$B_k=\{i_1,i_2):i_1=k,0\leqslant i_2\leqslant k$或者$i_2=k,0\leqslant i_1<k\}$，$k\geqslant1$，

则$\sum_0^\infty B_k=\tilde{E}$。设$\{u(i_1,i_2):(i_1,i_2)\in\tilde{E}\}$是方程

$$25.\quad\begin{cases}(\lambda+\overline{q}(i_1,i_2))u(i_1,i_2)=\displaystyle\sum_{(j_1,j_2)\neq(i_1,i_2)}\overline{q}((i_1,i_2),(j_1,j_2))\cdot u(j_1,j_2),\\ 0\leqslant u(i_1,i_2)\leqslant1,(i_1,i_2)\in\tilde{E},\lambda>0\end{cases}$$

的任一解．这里

$$\begin{aligned}&\overline{q}((i_1,i_2),(j_1,j_2))\\&\quad=q_{i_1j_1},&&\text{如}j_2=i_2,j_1\neq i_1\neq i_2,\\&\quad=q_{i_2j_2},&&\text{如}j_1=i_1,j_2\neq i_2\neq i_1,\\&\quad=q_{i_1j_1}\wedge q_{i_2j_2},&&\text{如}j_1=j_2\neq i_1=i_2,\\&\quad=0,&&(j_1,j_2)\neq(i_1,i_2)\text{的其他情形}.\end{aligned}$$

$$\overline{q}(i_1,i_2)=\sum_{(j_1,j_2)\neq(i_1,i_2)}\overline{q}((i_1,i_2),(j_1,j_2)).$$

命$u_k=\max\{u(i_1,i_2):(i_1,i_2)\in B_k\}$，并设$(i_1^{(k)},i_2^{(k)})\in B_k$使$u_k=u(i_1^{(k)},i_2^{(k)})$，于是，由24得

$$(\lambda+\overline{q}(i_1^{(k)},i_2^{(k)}))u_k$$

$$\leqslant\sum_{l\neq k}\sum_{(j_1,j_2)\in B_l}\overline{q}((i_1^{(k)},i_2^{(k)}),(j_1,j_2))u_l$$

$$+\sum_{(j_1,j_2)\in B_k\setminus(i_1^{(k)},i_2^{(k)})}\tilde{q}((i_1^{(k)},i_2^{(k)}))u_k.$$

注意，由生灭型假设知，对于每一个$l\neq k$，至多仅存在一个$(j_1^{(k)},j_2^{(k)})\in B_l$，使得$\tilde{q}((i_1^{(k)},i_2^{(k)}),(j_1^{(k)},j_2^{(k)}))>0$，若不存在，任取一元$(j_1^{(k)},j_2^{(k)})\in B_l$。我们总有

$\tilde{q}((i_1^{(k)},i_2^{(k)}),(j_1^{(k)},j_2^{(k)}))=q_{kl}$，这样，上式化成 $(\lambda+q_k)u_k\leqslant\sum_{l\neq k}q_{kl}u_l$。

由假设，Q正则，从而此方程只有零解。这说明方程25只有零解，故$\tilde{Q}$也是正则的。

作为本文的结束，我们指出：有时构造耦合，其目的并非ii)′。只是i)′和iii)′才总是必需的。

作者感谢严士健老师的指导和参加讨论班的同志们的帮助。

参考文献

〔1〕 Dobrushin, R. L., *Problems of Information Transimission*, 7 (1971), 149—164, 235—241.

〔2〕 侯振挺、郭青峰，齐次可列马尔可夫过程，科学出版社，1978.

〔3〕 Liggett, T. M., *Lecture Notes in Math.*, 598 (1977), 188—248.

〔4〕 Vasershtein, L. K., *Problems of Information Transimission*, 3 (1969), 47—52.

〔5〕 唐守正、刘秀芳，北京师范大学学报（自然科学版），1981, 3: 13—24.

〔6〕 王梓坤，随机过程论，科学出版社，1965.

〔7〕 严士健、陈木法，多维Q过程，手稿

BASIC COUPLINGS FOR MARKOV CHAINS WITH CONTINUEOUS PARAMETERS

Chen Mufa

Abstract

Some basic couplings for Markov chains with continueous parameters are proposed. The author shows what conditions are needed for the couplings and how to check them.