应用概率统计 第 38 卷
第 2 期 2022 年 4 月

Chinese Journal of Applied Probability and Statistics
Apr., 2022, Vol. 38, No. 2, pp. 159-178
doi: 10.3969/j.issn.1001-4268.2022.02.001

华罗庚经济最优化理论的新进展 *

陈 木 法

(江苏师范大学数学研究院, 徐州, 221116; 北京师范大学数学学院, 数学与复杂系统教育部重点实验室, 北京, 100875)

摘 要： 本文介绍学习华罗庚经济最优化的数学理论的新体会. 一是将该模型的稳定性研究转化为马氏链同样理论的研究. 二是提供了较为完整的算法. 三是介绍并修正华先生发表于 1987 年、但尚未引起重视的关于带消费的实际模型的简洁处理方案. 同时给出了简单例证. 为读者方便, 本文还包括前期成果回顾、历史考证、必备知识概述等.

关键词： 投入产出法; 华罗庚模型; 马氏链; 稳定性; 算法

中图分类号： F06; F22; O211.6

英文引用格式： CHEN M F. New progress on L.K. Hua's optimization theory of economics[J]. Chinese J Appl Probab Statist, 2022, 38(2): 159–178. (in Chinese)

华罗庚经济最优化的数学理论是他从 1982 年开始直至仙逝前 (1985 年 6 月)的主要研究成果. 目标是为我国经济的振兴、制定国民经济发展规划等提供数学上的分析参考. 从我们所收集到的已发表论著 [11–22] 中, 足以看出他为此课题付出了极为艰辛的努力. 此理论的出发点是早已在国际上通行的 "投入产出法". 因为当年我国执行的是 "计划经济", 所以这批文章的标题中都有这顶帽子. 然而, 华先生在文 [14] 早已指出: 他的理论模型完全适用于 "市场经济", 只需做个简单变换即可. 他当然严格区分价值与价格, 前者为内在属性, 后者有很多不确定因素, 未必靠得住. 其实作为联合国提倡的分析国民经济最主要工具的 "投入产出法", 当然更多地应用于以 "市场经济" 为主的国家. 对于这些国家, 也有 "基础建设", "国防费用", "教育、行政", "尖端技术" 等每年都需要议会审批的大计划. 在我国则有 "五年计划". 那怕对于一个小公司, 也需要一点小计划. 所以问题并不在于 "计划" 或 "市场", 而在于寻找一个合理高效的平衡解. 众所周知, 每一个系统都需要某种平衡. 例如生态学, 核心是物种共存, 不同物种之间需要一种平衡. 又如人口学, 老、中、少之间, 男女之间都需要某种平衡. 任何系统, 只要平衡遭到破坏, 那就需要付出巨大代价才可能回到老平衡或建立新平衡. 华先生对于 "投入产出法" 的根本性贡献在于: 从数学上给出了经济平衡的唯一解, 失去平衡时间的估计以及各种调整方案. 其中一个大问题的解答是直至他仙逝前不久才找到的, 至今尚未得到应有的重视.

* 国家自然科学基金项目 (批准号: 12090011、11771046)、国家重点研发计划项目 (批准号: 2020YFA0712900)、教育部 "双一流" 建设学科 (北京师大) 和江苏高校优势学科建设工程资助.

E-mail: mfchen@bnu.edu.cn.

本文 2021 年 12 月 26 日收到.

区别于已有经济理论的主要标志在于: 华先生的理论是定量的, 可计算的. 这一理论至今尚未得到普及, 原因可能是尚无此理论的普及版、又缺乏好算法. 后者是我们求寻多年、最近刚解决的难题, 也是本文的主要目标之一. 相信这里提供的高效算法可作为理论分析的基本工具.

本文共分 7 小节. §1. 引言: 两种数学模型; §2. 矩阵论的两个基本结果; §3. 基本定理及其更新; §4. 不可约非负方阵与马氏链; §5. 稳定性分析三例; §6. 算法及进一步课题; §7. 补充说明和证明.

§1. 引言: 两种数学模型

先概述这个理论的两种模型. 将我们所关心的产品所构成的**产综** (固定单位: 瓩, 吨$\cdots\cdots$ 等) 记为

$$x = \left(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(d)}\right).$$

要了解当前的经济状况, 需要调查如下三种数据

- 去年的投入产综: $x_0 = \left(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \cdots, x_0^{(d)}\right)$;
- 今年的产出产综: $x_1 = \left(x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \cdots, x_1^{(d)}\right)$;
- **结构方阵** (**消耗系数方阵**): $A_0 = \left(a_{ij}^{(0)} : i, j = 1, 2, \cdots, d\right)$.

其中矩阵 A_0 的含义是: 每生产一个单位的 i 类产品, 需消耗 $a_{ij}^{(0)}$ 个单位的 j 类产品. 于是有

$$x_0^{(j)} = \sum_{i=1}^{d} x_1^{(i)} a_{ij}^{(0)}. \qquad \text{写成矩阵形式：} x_0 = x_1 A_0.$$

反过来, 对于给定的 x_0 和 A_0, 要唯一确定 x_1, 需要 A_0 可逆. 先假定所生产出的产品全部用于再生产, 此即

理想化模型或无消费模型.

此时有 $x_{n-1} = x_n A_{n-1}$, $n \geqslant 1$. 从而

$$x_0 = x_1 A_0 = x_2 A_1 A_0 = \cdots = x_n A_{n-1} \cdots A_0.$$

对于时齐情形 $A_n \equiv A$, 我们得到著名的**投入产出法**:

$$x_0 = x_n A^n, \qquad n \geqslant 1. \tag{1}$$

如只是研究稳定性, 即上式右方当 $n \to \infty$ 时的极限行为, 则只需用到 A^n 的渐近行为, 不必假定 A 可逆. 但当 A 可逆时, 上式等价于

$$x_n = x_0 A^{-n}, \qquad n \geqslant 1. \tag{2}$$

当然, 理想化模型不切实际, 实际中真正需要的是

带消费模型.

要点是每一年要拿出一部分用于消费而不是用于再生产. 华先生曾建议过两种处理方法. 在文 [13; (IV)] 和 [16] 中使用

$$x_n - \xi_n = x_{n+1}A,$$

其中 ξ_n 为消费量; 而在文 [18,22] 中, 则将上式左方改为

$$x_{n+1} - \xi_n.$$

文 [6] 及笔者所见到的应用华理论的论文, 都采用的是后者. 然而, 华的书 [20] 又回到前者. 本文的末尾将详细讨论这一探索历程 (包括 ξ_n 的构造).

区别于传统的投入产出法, 华罗庚将经济系统分解为两块分别处理. 先研究呈现数学本质部分的无消费模型, 再将带消费模型化归前一模型. 读者无妨猜猜其中的奥妙!

本文的最主要结果有三个: 其一是提供华先生理论的一种等效的马氏链描述 (§4), 这对于理解稳定性的本质以及计算都有很大好处 (参见例 13); 其二是算法 (§6), 特别是刚刚完善的拟对称化算法, 相信会在投入产出法的各种分析以及其它领域得到广泛应用. 其三是介绍华先生的更新结果及笔者的修正 (§7(2)).

§2.　矩阵论的两个基本结果

为陈述华罗庚理论的主要定理, 需要用到矩阵论中的两个基本结果. 本节也只涉及两个概念: 不可约性和非周期性. 记 $E=\{1,2,\cdots,d\}$, $A=(a_{ij}: i,j\in E)$, $A^n=\big(a_{ij}^{(n)}: i,j\in E\big)$. 如常, 非负矩阵指其所有元素非负. 同样地有正矩阵.

定义 1　称非负矩阵 $A=(a_{ij})$ 不可约, 如对每一对 $i,j\in E$, 存在互不相同的 $i=i_1$, $i_2,\cdots,i_m=j$ 使得

$$a_{i_1i_2}>0,\ a_{i_2i_3}>0,\ \cdots,\ a_{i_{m-1}i_m}>0.$$

简单地说, 不可约意指每一对 i,j **互通**, 既存在如上的从 i 到 j 的通路, 也存在一条从 j 到 i 的通路. 若以 $a_{ij}>0$ 标记集合 E 中连接两点 i 和 j 之间的**边**, 则 E 中的点连同刚刚赋上的边就构成一个**连通图**. 下述定理应当是不可约非负矩阵的最重要结果, 它也是此理论的基石.

定理 2 (Perron-Frobenius: 1907, 1912)　非负不可约矩阵 A 的谱半径 $\rho(A)$ 是正的单重特征值, 其左、右特征向量也是正的.

分别以 u (行向量) 和 v (列向量) 表 A 相应于 $\rho(A)$ 的左、右正特征向量 (贯穿全文, 特征向量可相差一非零常数):

$$uA = \rho(A)u, \qquad Av = \rho(A)v.$$

也简称为**最大左、右正特征向量**. 如上式所示, 向量的行、列属性常可自动识别, 不必逐一标出.

自此以后, 假定对于每一个 $i \in E$,

$$\big\{n \geqslant 1 : a_{ii}^{(n)} > 0\big\} \neq \emptyset. \tag{3}$$

定义 3 点 $i \in E$ 的**周期**定义为 (3) 中集合元素的最大公约数, 记之为 d_i. 如 $d_i = 1$, 则称 i **非周期**. 当 A 不可约时, 可证一切 i 同周期 [7; 定理 1.26]. 此时称之为 A 的周期. 特别地, 如共同周期为 1, 则称 A 非周期.

对于不可约的 A, 只要其对角线含一正元素, 就是非周期的. 此时有如下性质.

命题 4 对于非负不可约、非周期的 A, 存在自然数 $M \leqslant (d-1)^2+1$ 使得当 $m \geqslant M$ 时, A^m 为正方阵 (见 [23; 例 8.3.4 和习题 8.3.9]). 如对角线元素全正, 则结论可加强为 $M \leqslant d-1$ (见 [23; (8.3.5) 式]). 记满足条件的最小的 M 为 $M_{\min}$.

命题 5 对于非负不可约、非周期 A, 每一个不同于 $\rho(A)$ 的特征值的模均小于 $\rho(A)$.

这样, 每一个非负不可约、非周期的矩阵 A 拥有三大要素: 最大正的、也是模最大的特征值 $\rho(A)$, 其 (最大) 左特征向量 u 和 (最大) 右特征向量 v.

本小节的材料是经典的 (也许除命题 4 而外), 也都是常见的. 其细节可从 [7; 第一章], [20] 或 Wikipedia 中的条目 “Perron-Frobenius 定理” 找到. 我们这里使用的是马氏链的术语. 在矩阵论中称这里的 “不可约” 为 “不可分拆”, 而这里的 “不可约、非周期非负方阵” 则被简称为 “原方阵”.

作为本小节的结束, 我们提供一个简单例子, 说明模型中 A 的可逆性假设是必要的. 给定 $\{0, 1\}$ 上的一个正概率分布 π (行向量). 取 $A = \mathbb{1}\pi$, 其中 $\mathbb{1}$ 为元素恒为 1 的列向量. 则 A 不可约、非周期, 唯一平稳分布就是 π: $\pi = \pi A$. 现在, 取 $x_0 = \pi$, 则易证任一概率分布 x_1 都满足方程 $x_0 = x_1 A$. 但当 $x_0 \neq \pi$ 时, 该方程关于 x_1 (非负且 $x_1\mathbb{1} = 1$) 无解. 这说明此方程不能完全决定一个投入产出系统. 原因就是 A 的秩为 1, 不可逆.

§3. 基本定理及其更新

自此以后, 除非另有声明, 常假定 A 非负不可约且非周期.

下面是华罗庚经济最优化理论的基本定理, 第 (1) 部分取自 [17, 19, 20]; 第 (2) 部分取自 [18, 22].

定理 6 假设 A 可逆.

(1) **无消费**理想模型. 第 n 步产出 $x_n = x_0 A^{-n}$, $n \geqslant 1$, 其中 x_0 为投入.

- 最好的投入是 $x_0 =$ 最大左特征向量. 此时有最佳发展速度 $\rho(A)^{-1}$ (允许 A 有周期).
- 否则, 必定存在自然数 n_0, 使得当 $n \geqslant n_0$ 时, 向量 x_n 含不同号的分量.

(2) **带消费**实用模型. $x_n = x_0 B^n$, $n \geqslant 1$, 其中

$$B = (1-\alpha)A^{-1} + \alpha I \ \text{(不再是非负矩阵)},$$

而 $\alpha \in (0,1)$ 为消费比例. 此时经济发展速度为 $(1-\alpha)\rho(A)^{-1} + \alpha$.

下面是定理 6 的更新版本. 首先注意投入产出模型本质上是一个递推方程 $x_{n-1} = x_n A$. 这样, 如前所述, 对于给定的 x_{n-1} (这是经济逐年发展的动态方程), 要求此方程关于变量 x_n 有唯一解. 于是常假定 A 为可逆方阵. 如果仅关心 $x_n A^n$ 的极限行为, 则完全用不着 A^{-1}, 这早在文 [1] 的证明中便可看出. 另一方面, 留心从计算角度看, 特别对于大矩阵, 矩阵求逆运算远非平凡. 况且解线性方程组有多种方法, 未必需要求逆运算. 因此, 下述定理的第 (1) 部分避开了逆矩阵写法; 定理的第 (2) 部分源于 [20; 第三章, §1 的末段], 略有修正 (详情见 §7 (2)), 是一个本质性更新.

定理 7 (1) **无消费**理想模型. 第 n 步产出 x_n 是方程 $x_0 = x_n A^n$, $n \geqslant 1$ 的非负、非零解, 其中 x_0 为投入.

- 以下两条细节同定理 6 (1).

(2) **带消费**实用模型. 只需将上条 (1) 中的 A 换成

$$A_\alpha := (1-\alpha)A + \alpha I \qquad [\Rightarrow \rho(A_\alpha) = (1-\alpha)\,\rho(A) + \alpha], \qquad \alpha \in (0,1).$$

此处 A 可为周期但 A_α 必非周期. 两者共有最大左、右特征向量 u 和 v.

应当指出这里的第 (2) 部分只是将定理 6 (2) 的 B 中的 A^{-1} 换成 A. 但前者的 B 不再非负, 其分析需使用实矩阵的谱结构, 复杂程度远非只用到非负矩阵 A 主特征对的后者可比拟. 文末的 §7 (2) 将指出: 两处的参数 α 的意义完全不同.

作为定理 7 的直接应用, 我们有如下结果 (其证明推迟到 §7 (2)).

推论 8 如设经济的增长速度为 $\delta \in (0, \min\{\rho(A)^{-1}-1, 1\})$, 则第 $n+1$ 年的消费量为

$$\xi_n = \frac{1-(1+\delta)\rho(A)}{\delta}(x_{n+1} - x_n),$$

其中 x_n 为递推方程

$$x_n = x_{n+1}[(1-\alpha)A + \alpha I], \qquad \alpha := \frac{(1+\delta)^{-1} - \rho(A)}{1-\rho(A)}$$

的解, x_0 为预先给定的初值. 反之, 由第 $n+1$ 年的消费不超过 ξ_n 可确定最大增长速度 δ.

基于定理 7, 文 [1,5] 所研究的随机模型可得到简化.

§4. 不可约非负方阵与马氏链

因为笔者长期研究马氏链, 自然会考虑一特殊情形: A 为转移概率矩阵 P. 此时左正特征向量就是 P 的平稳分布, 常记作 π: $\pi=\pi P$. 在不可约条件下, 此平稳分布唯一, 由此可体会到离开平稳分布系统就会出问题. 进一步问, 能否将经济系统的稳定性化归马氏链的稳定性来研究? 首先, 这就需要从 A 构造出紧密相关的 P. 留意后者远比前者特殊: 非负, 行和为 1, 从而最大特征值为 1. 头、尾两条很容易满足, 只需把 A 换成 $A\rho(A)^{-1}$. 问题在于第二个条件: 行和为 1. 这意味着我们需要修改 $A\rho(A)^{-1}$ 的每一列元素, 即建议我们要右乘一个正向量 (例如说 w) 所生成的对角矩阵 D_w:

$$\frac{A}{\rho(A)}D_w.$$

此处我们介绍几个文中要用到的特殊记号:

D_w: 以向量 $w=(w^{(k)}:k\in E)$ 作为对角线元素的对角矩阵.

$w^{\alpha}:=\big((w^{(k)})^{\alpha}:k\in E\big)$.

$x\odot y:=\big(x^{(k)}y^{(k)}:k\in E\big)$, 称为分量乘积向量.

这样, 若以 * 表示转置, 则易见

$$\begin{aligned}&\text{当 } w \text{ 的元素均非零时}, \ D_w^{-1}=D_{w^{-1}}.\\&\mathbb{1}^*D_w=w\,(\text{行向量}),\ \ D_w\mathbb{1}=w\,(\text{列向量}).\\&D_xD_y=D_{x\odot y},\ \ xD_y=x\odot y\,(\text{行}),\ \ D_xy=x\odot y\,(\text{列}).\end{aligned}\tag{4}$$

如上得到的矩阵 $\rho(A)^{-1}AD_w$ 的行和未必是常数. 所以每一行还需要归一化. 这引导我们选用 $w=v$, 即定义

$$p_{ij}=\frac{a_{ij}v_j}{v_i\rho(A)},\quad i,j\in E\iff P=D_{v^{-1}}\frac{A}{\rho(A)}D_v.\tag{5}$$

在文 [1; (I)] 中, 笔者正是采用此法证明华罗庚的基本定理. 在随机过程的教材 [7] 中, 也以此作为开篇.

下面是由 (5) 所定义的转移概率矩阵 P 的主要性质.

引理 9 (陈: 1992) (1) $P\geqslant 0$, $P\mathbb{1}=\mathbb{1}$.

(2) $P^n=D_{v^{-1}}[A/\rho(A)]^nD_v$.

(3) $\forall\, i,j,m$: $p_{ij}^{(m)}>0\iff a_{ij}^{(m)}>0$. 特别地, P 与 A 有相同的不可约性和周期性.

(4) $\rho(P)=1$, 其所对应的右、左特征向量分别为 $\mathbb{1}$ 和 $u\odot v$. 特别地, P 有平稳分布 $\pi=u\odot v/uv$: $\pi=\pi P$.

证明:　此处, 只证性质 (4) 末尾左特征向量的表达式. 由性质 (2) 知,

$$D_v\,P = \frac{A}{\rho(A)}D_v.$$

两边左乘 D_u, 由 (4) 得

$$D_{u\odot v}\,P = D_u\Big(\frac{A}{\rho(A)}\Big)D_v.$$

然后两边左乘 $\mathbb{1}^*$, 再由 (4) 得

$$u\odot v\,P = u\Big(\frac{A}{\rho(A)}\Big)D_v = uD_v = u\odot v.$$

其中第 2 个等号用到 u 为 A 的最大左特征向量. 最后, 因为 P 不可约、非周期, 由有限马氏链的一个基本定理 (参见 [7; 定理 1.17] 或使用 Perron-Frobenius 定理)知不变测度 (或最大左特征向量) $u\odot v$ 唯一. 这便证得 P 有唯一平稳分布 $\pi = u\odot v/(uv)$: $\pi = \pi P$, 得出所需断言.　$\square$

引理 10　相应于 $A_\alpha = (1-\alpha)A + \alpha I$, $\alpha\in(0,1)$, 我们有

$$P_\alpha = (1-\beta)P + \beta I, \qquad \beta := \alpha[(1-\alpha)\rho(A)+\alpha]^{-1}.$$

此外, $\{P_\alpha : \alpha\in[0,1)\}$ 有共同的最大特征值 1 及其左、右特征向量 π 和 $\mathbb{1}$.

证明:　因为 A_α 与 A 有相同的右特征向量 v, 由 (5) 知

$$P_\alpha = \frac{1}{\rho(A_\alpha)}\Big[(1-\alpha)\rho(A)D_{v^{-1}}\frac{A}{\rho(A)}D_v + \alpha I\Big] = \frac{(1-\alpha)\rho(A)P+\alpha I}{(1-\alpha)\rho(A)+\alpha}.$$

得出前一断言. 然后易证后一断言.　$\square$

下述结果给出关于 A 和 P 的两种迭代算法的等效性.

定理 11　P 的迭代序列 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 与 A 的迭代序列 $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ 及 v 满足恒等式:

$$\mu_n = \rho(A)^n x_n\odot v, \qquad n\geqslant 0, \tag{6}$$

$$x_n = \rho(A)^{-n}\mu_n\odot v^{-1}, \qquad n\geqslant 0. \tag{7}$$

因此, 两种算法等效.

证明:　设 $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ 是由方程 $x_0 = x_nA^n$ 所决定的递推解. 那么

$$\begin{aligned}x_0D_v &= x_nD_vD_{v^{-1}}A^nD_v\\ &= [\rho(A)^nx_nD_v]\,D_{v^{-1}}\Big(\frac{A}{\rho(A)}\Big)^nD_v\\ &= [\rho(A)^nx_nD_v]\,P^n \quad (\text{由引理 } 9\,(2)).\end{aligned}$$

留意由 (4) 知, $x_0 D_v = \rho(A)^0 x_0 \odot v$. 这样, $\mu_n := \rho(A)^n x_n \odot v$ $(n \geqslant 0)$ 就是递推方程 $\mu_0 = \mu_n P^n$ $(n \geqslant 1)$ 的解. 这便证得 (6), 等价地, 证得 (7). □

在 (6) 式两边右乘向量 $\mathbb{1}$, 得出 $\rho(A)^n x_n v = \mu_n \mathbb{1}$. 特别地, 如取 $x_0 = u$, 则 $\mu_0 = u \odot v$, 归一化条件成为 $uv = \mu_0 \mathbb{1} = 1 = \pi \mathbb{1}$. 留意 μ_n 与 x_n 相差一个指数式主阶 $\rho(A)^n$ 及一常值向量因子 ν (参见随后的例 13).

由定理 11 立即得到下述结果. 其中的末项断言是本人与毛永华共同完成的, 留待 §7 (1) 再证.

推论 12 μ_n 含零 (或负) 分量当且仅当 x_n 如此. 命

$$\text{失衡时}: T_{x_0} = \inf\left\{n : \exists j \text{ 使得 } x_n^{(j)} \leqslant 0\right\},$$
$$\text{崩溃时}: T_{x_0}^{+} = \inf\left\{n : \exists j \text{ 使得 } x_n^{(j)} < 0\right\}.$$

类似地可定义 T_{μ_0} 和 $T_{\mu_0}^{+}$. 则我们有 $T_{\mu_0} = T_{x_0}$; $T_{\mu_0}^{+} = T_{x_0}^{+}$. 更进一步有

$$T_{\mu_0} \leqslant T_{\mu_0}^{+} \leqslant T_{\mu_0} + M_{\min} \quad (\text{参见命题 } 4),$$

即两者相差有限. 此估计可达精确 (例 15).

我们已经证明, 华的经济模型的稳定性理论可以转化为马氏链的同样理论. 我们也见到前一理论的各种推广, 如考虑可约情形等. 在马氏链理论中, 有个专题称为 "状态分类", 包括可约、周期等一般情形, 甚至允许矩阵为无限阶. 这个理论似乎 60 多年前便已完成. 只是笔者觉得, 目前我们关于经济模型的研究尚未成熟到需要考虑那么宽广模型的阶段.

作为本节的结束, 我们给出定理 7 关键部分的证明要点 (也见 [1], [2; Chapter 10], 或 [7; §1.1]). 我们的出发点是

马氏链遍历定理 (参见 [7; 定理 1.17 (3)]) 对于每一个不可约、非周期 P, 存在唯一平稳分布 π: $\pi = \pi P$, 并且有 (一致收敛):

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \mathbb{1}\pi. \tag{8}$$

"失衡/崩溃" 断言的证明: 使用推论 12, 只需证: 对于给定的正 (相应地, 非负) 的 μ_0: $\mu_0 \mathbb{1} = 1$, 为使下式

$$\mu_0 = \mu_n P^n \quad [\text{即迭代法}: \mu_{n-1} = \mu_n P]$$

中的每一个解 μ_n 非负, 当且仅当 $\mu_0 = \pi$.

由 $P\mathbb{1} = \mathbb{1}$ 及所给条件立得 $\mu_n \mathbb{1} = 1$ 对一切 $n \geqslant 1$ 成立. 由此及 $\{\mu_n\}$ 非负知: 存在子列 $\{\mu_{n_k}\}$, 它一致收敛于某非负的 $\overline{\mu}$ 且 $\overline{\mu}\,\mathbb{1} = 1$. 由 (8),

$$\mu_0 = \lim_{k\to\infty} \mu_{n_k} P^{n_k} = \overline{\mu}\,\mathbb{1}\pi = \pi.$$

这证得我们的主要结论: $\mu_0=\pi$. 换言之. 若 $\mu_0\neq\pi$, 则不可能每步都有 $\mu_n>0$, 从而 $T_{\mu_0}<\infty$. 相应地, 不可能每步都有 $\mu_n\geqslant 0$, 从而 $T_{\mu_0}^{+}<\infty$. $\square$

此证明本身不用假定 P 可逆, 但需假定解 μ_n 存在 (并不要求唯一). 由引理 9 (2) 及 (8) 易证 [20; 定理 2.11]: $\lim\limits_{n\to\infty}(A/\rho(A))^n=vu$ 且 $uv=1$.

§5.　稳定性分析三例

首先看看华先生在他的系列文章中反复使用的最简单例子.

例 13 (华氏模型)

$$A=\frac{1}{100}\begin{pmatrix}25 & 14\\ 40 & 12\end{pmatrix},\qquad \rho(A)=\frac{1}{200}\big(37+\sqrt{2409}\big).$$

其左、右特征向量分别为

$$u=\left(\frac{5}{7}\big(13+\sqrt{2409}\big),\ 20\right),\qquad v=\left(\frac{1}{80}\big(13+\sqrt{2409}\big),\ 1\right)^{*}.$$

应当指出, 本文的全部计算都是使用 Mathematica v 11.3 完成的. 我们有

$$P=\frac{1}{\rho(A)}D_{v^{-1}}A\,D_v=\begin{pmatrix}\frac{5}{104}\big(-37+\sqrt{2409}\big) & \frac{1}{104}\big(289-5\sqrt{2409}\big)\\ \frac{1}{130}\big(241-3\sqrt{2409}\big) & \frac{3}{130}\big(-37+\sqrt{2409}\big)\end{pmatrix}.$$

从 [1, 7] 已经看到, 使用马氏链想法有利于理解华氏理论模型并证明其基本定理. 现在说明, 这对于计算大有帮助. 其原因是: 对于 A, $\rho(A)$ 常不等于 1, 因而在迭代计算 $\{x_n\}$ 时可能增长或下降很快. 但对于 P, 因为 $\rho(P)=1$, 此事不会发生. 下面是一数值例证. 当取 $x_0=(44.344,\ 20)$ (3 位小数近似) 时, $T_{x_0}=8$. 依次输出结果如下:

n	1	2	3	4
x_n	$(103.028, 46.4677)$	$(239.375, 107.96)$	$(556.111, 250.868)$	$(1292.85, 582.247)$
n	5	6	7	8
x_n	$(2990.66, 1362.96)$	$(7165.52, 2998.2)$	$(13054.5, 9754.73)$	$(89821.2, \text{-}23501.9)$

然而, 对于 P, 当我们选用 $\mu_0=(34.4118,\ 20)$ 时 (这是上表用于 A 的 x_0 经下段的变换所得到的用于 P 的初值, 未归一化以便与上方比较), 输出结果为

n	1	2	3	4
μ_n	$(34.4118, 20.0001)$	$(34.4122, 19.9996)$	$(34.4092, 20.0026)$	$(34.4303, 19.9815)$
n	5	6	7	8
μ_n	$(34.28, 20.1318)$	$(35.351, 19.0608)$	$(27.7201, 26.6917)$	$(82.0905, \text{-}27.6787)$

两者之间的差别是显著的 (从第 8 次迭代结果看: 89821.2/82.0905 ≈ 1094, 相差千倍). 须知这还是二阶方阵. 对于大方阵, 其差别难以想像. 由定理 11 知这两个表可经简单变换由其一得其二, 但我们是分别算的. 这实际上给出了两种算法等效的一次验证.

为使用 P_α (引理 10) 来计算对于不同的初值 $\{x_0^{(j)}\}_{j=1}^3$ 和不同比例 α (用于定理 7 (2) 而非定理 6 (2) 所用者) 下的 T_{μ_0}, 我们需要将关于 A 或 A_α 的初值 x_0 转化为关于 P 或 P_α 的初值 μ_0. 为此, 使用 $\mu_0 = x_0 \odot v$. 现在, $\nu = (\nu^{(1)}, \nu^{(2)})^*$:

$$\nu^{(1)} = \frac{1}{80}\big(13 + \sqrt{2409}\big) \approx 0.77602, \qquad \nu^{(2)} = 1.$$

而 $\{\mu_0^{(j)}\}_{j=1}^3 = \{(x_0^{(j)} \times \nu^{(1)}, 20)\}_{j=1}^3$ (其中 $x_0^{(j)}$ 为 u 的不同近似):

$$x_0^{(1)} = 44, \quad x_0^{(2)} = 44.344, \quad x_0^{(3)} = 44.34397483.$$

输出结果如下表.

T_{μ_0} \ α / μ_0	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$
$\mu_0^{(1)}$	3	7	10	14	62
$\mu_0^{(2)}$	8	17	23	36	157
$\mu_0^{(3)}$	13	28	38	58	256

$T_{\mu_0} = T_{\mu_0}^+$

这样, 如果作为五年计划, 则除第一行的头一个不合格之外, 其余均可用.

下面是一实际模型. 需要留心通常投入、产出论著上的消费系数矩阵可能是本文所用者的转置. 依马氏链理论看, 左特征向量对应于平稳分布, 乃是刻画系统稳定性的唯一方式. 基于此, 我们使用华先生的模式: 最佳投入为左 (而不是右) 特征向量.

例 14 (1997 年山东省 6 部门投入产出表)

$$A = \begin{pmatrix} 0.106525 & 0.140497 & 10^{-6} & 0.001946 & 0.166163 & 0.004297 \\ 0.10464 & 0.531081 & 0.001836 & 0.02247 & 0.060775 & 0.027266 \\ 0 & 0.606984 & 0.000324 & 0.04405 & 0.029865 & 0.040428 \\ 0.002742 & 0.277311 & 0.015089 & 0.082288 & 0.034568 & 0.061835 \\ 0.013753 & 0.219445 & 0.035205 & 0.06774 & 0.049044 & 0.176096 \\ 0.004744 & 0.219056 & 0.0454 & 0.040897 & 0.018104 & 0.091463 \end{pmatrix},$$

$\rho(A) = 0.651093,$

$v = (0.252791,\ 0.54076,\ 0.561826,\ 0.333735,\ 0.359691,\ 0.295416)^*,$

$$P=\begin{pmatrix} 0.16361 & 0.461601 & 3.41348\cdot 10^{-6} & 0.00394584 & 0.363128 & 0.00771248 \\ 0.0751298 & 0.815676 & 0.00292973 & 0.0212989 & 0.0620879 & 0.0228774 \\ 0 & 0.897299 & 0.000497625 & 0.0401886 & 0.0293662 & 0.0326491 \\ 0.00318995 & 0.690124 & 0.0390138 & 0.126384 & 0.0572215 & 0.0840666 \\ 0.0148452 & 0.506708 & 0.0844566 & 0.0965327 & 0.0753257 & 0.222132 \\ 0.00623491 & 0.615862 & 0.132611 & 0.0709605 & 0.0338554 & 0.140476 \end{pmatrix},$$

记 $\mu=(4.2271,\ 45.7599,\ 1,\ 1.95712,\ 4.98704,\ 2.77413)$ (未归一化的 π). 下面是关于 μ_0 的三种不同取法 $\{\mu_0^{(j)}\}_{j=1}^3$:

μ 的整数部分, 小数点后 3 位, μ 的全 6 位表示

和不同的 α, T_{μ_0} 的计算结果.

T_{μ_0} \ α / μ_0	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$
$\mu_0^{(1)}$	2	3	4	5	21
$\mu_0^{(2)}$	4	10	14	20	81
$\mu_0^{(3)}$	6	13	17	25	104

$T_{\mu_0}=T_{\mu_0}^+$

下例表明 T_{μ_0} 与 $T_{\mu_0}^+$ 可以相当不同.

例 15 (T_{μ_0} 与 $T_{\mu_0}^+$ 的比较) 由下述 A 可算出其 $\rho(A)$, v 和 P 如次.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ 1 & 0 & 4 & & & & \text{\Large 0} & \\ & 4 & 0 & 9 & & & & \\ & & 9 & 0 & 16 & & & \\ & & & 16 & 0 & 25 & & \\ & & & & 25 & 0 & 36 & \\ & \text{\Large 0} & & & & 36 & 0 & 49 \\ & & & & & & 49 & 1 \end{pmatrix},$$

$\rho(A)=63.2144$,

$v=(0.0000135879,\ 0.00085895,\ 0.0135711,\ 0.0949393,\ 0.367462,\ 0.868395,\ 1.26968,\ 1)^*$,

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ 0.000250246 & 0 & 0.99975 & & & & \mathbf{0} & \\ & 0.00400494 & 0 & 0.995995 & & & & \\ & & 0.0203515 & 0 & 0.979649 & & & \\ & & & 0.0653939 & 0 & 0.934606 & & \\ & & & & 0.167347 & 0 & 0.832653 & \\ & & & & & 0.389501 & 0 & 0.610499 \\ & \mathbf{0} & & & & & 0.984181 & 0.0158192 \end{pmatrix}.$$

选取初值

$$\mu_0=(1.1191\cdot 10^{-10},\ 2.50675\cdot 10^{-9},\ 0.000105045,\ 0.0000718535,$$
$$0.0756393,\ 0.00995291,\ 0.891543,\ 0.022688)\ (\text{正向量}).$$

则 $\mu_n=\mu_0P^{-n}$, $n\geqslant 1$ 的输出情况如下表:

μ_1,μ_2	μ_3,μ_4	μ_5,μ_6	μ_7,μ_8	μ_9,μ_{10}	μ_{11},μ_{12}	μ_{13},μ_{14}	μ_{15}
1	2	3	4	5	6	7	含负分量

末尾的 μ_{15} 含负分量. 其它数 k 表示该列非负向量 $\mu_{\#}$ 所含 0 分量的个数. 显然有 $T_{\mu_0}=1$, $T_{\mu_0}^{+}=15$. 可算出 $M_{\min}=14$. 这样, 对于此例我们有 $T_{\mu_0}^{+}=T_{\mu_0}+M_{\min}$. 因此推论 12 的末项断言可达精确. 应当说明, 使用上方的逆矩阵 P^{-1} 来计算 μ_n 时, 如果精度不够, 很可能在远小于 15 的地方出现负分量. 我们这里采用的是反向计算: 先取定 $\mu_{\#}=(1,0,0,0,0,0,0,0)$, 然后使用递推 $\mu_{n-1}=\mu_nP$ 依次算出 $\mu_{\#-1},\mu_{\#-2},\cdots$, 找出第一个分量全正的向量, 并将它重新标记为 μ_0. 本例中, 从 $\mu_{\#}$ 开始, 在第 13 步, 由方程 $\mu_{n\#-14}=\mu_{\#-13}P$ 首次解出正向量 $\mu_{\#-14}$. 于是 $\#=14$. 然后从 μ_0 开始, 倒过来得出序列 $\{\mu_k\}_{k=1}^{14}$, 即是上面表中所用者. 此法用的只是向量与矩阵的乘法, 避免了矩阵求逆所带来的通常较大的误差.

§6. 算法及进一步课题

本文的基石之一是最大特征值及其左、右特征向量的计算. 从系统的稳定性分析可以看出: 我们不仅需要这三个量, 而且还要求较高精度. 因为计算机硬件和软件都已有很大发展, 对于小尺度或对称矩阵, 现在已经不难实现. 然而, 对于非对称矩阵, 依然受到很大限制. 如同在文 [6; 例 9] 中指出, 即使对于并不复杂的矩阵, Mathematica 的 ‘Eigensystem’ 只能算到 11 阶; 而使用 MatLab 的 ‘eig’, 也只能算到 50 阶. 故在该文中我们使用了一种对称化技术并引进了第一、第二拟对称化技术. 对于该例, 我们算到 2043 阶. 对于难得多的非可配称情形, 我们也算到 1700 阶 ([6; 例 13]). 只是对于第二拟对称化技术, 那里只提供例证而未能给出完整的解答, 这正是本小节的主要目标.

先介绍**第一拟对称化技术**. 给定非负不可约 $A=(a_{ij})$. 定义如下 Q 矩阵 (马氏链术语):

$$Q = A - D_{A\mathbb{1}}.$$

由不可约性知, 方程

$$\mu Q = 0 \tag{9}$$

有满足初始条件 $\mu_1 = 1$ 的唯一正解 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_d)$. 有正测度 μ 在手, 我们便可定义 A 的 (第一) **拟对称化** $\widehat{A}$:

$$\widehat{A} = D_{\mu^{1/2}} A\, D_{\mu^{-1/2}}. \tag{10}$$

引进这一概念的重要原因在于: A 关于 μ 可配称, 即

$$D_\mu A = A^* D_\mu \quad [= (D_\mu A)^*]$$

(它是对称性的极重要推广), 当且仅当 $\widehat{A}$ 对称. 这样, 这项技术至少包含了可配称情形, 具有可靠根基. 文 [3; §4] 通过一个简单三对角阵, 说明了对称化技术对于非对称、但可配称矩阵特征对计算的无可替代的威力. 一般地, 我们不能指望 A 可配称, 但 $\widehat{A}$ 常会降低 A 的振幅 (如常, 定义为 $\max A - \min A$). 以下我们以例 14 作为样板, 介绍这两项拟对称化技术及其用法. 为求解 (9) 中的 μ, 将它改写成

$$Q^{*\setminus\{\text{末行}\}}\mu = 0,$$

此处 $Q^{*\setminus\{\text{末行}\}}$ 是从 Q 的转置矩阵删去末行得到的矩阵, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_d)$, $\mu_1 = 1$. 随后, 凡是要用于矩阵变换的量都需留心计算的精度, 以避免造成后续计算太大的累积误差. 此处, 我们把计算精度从 16 位提升为 32 位. 所得结果为:

$$\begin{cases} \mu_1 = 1, \\ \mu_2 = 2.8531814047923121151806660274704, \\ \mu_3 = 0.095584307247837173425720989766 77, \\ \mu_4 = 0.37907469119803191131834390546421, \\ \mu_5 = 0.71948220206801978459472832883 13, \\ \mu_6 = 0.71935840519097400276747664213 67. \end{cases}$$

然后由 (10) 得出 $\widehat{A}$ 如下:

$$\begin{bmatrix} 0.106525 & 0.0831768 & 3.2345\cdot 10^{-6} & 0.00316068 & 0.195895 & 0.00506632 \\ 0.176751 & 0.531081 & 0.010031 & 0.0616461 & 0.121026 & 0.0543017 \\ 0 & 0.111098 & 0.000324 & 0.0221196 & 0.0108854 & 0.0147368 \\ 0.00168822 & 0.10108 & 0.030049 & 0.082288 & 0.0250915 & 0.0448874 \\ 0.0116656 & 0.110197 & 0.0965875 & 0.0933239 & 0.049044 & 0.176111 \\ 0.00402362 & 0.109993 & 0.124548 & 0.056338 & 0.0181024 & 0.091463 \end{bmatrix}.$$

此刻, 我们的主要目标是通过求 $\widehat{A}$ 的右特征向量来计算 A 的右特征向量, 进而计算 $\rho(A)$. 首先想到的是使用幂法. 令 $w_0=\mathbb{1}$,

$$w_n=\widehat{A}\,v_{n-1},\quad n\geqslant 1,\qquad v_n=\frac{w_n}{\|w_n\|},\quad n\geqslant 0.$$

同时计算

$$x_n=\max_{1\leqslant k\leqslant d}\frac{\widehat{A}v_n}{v_n}(k),\qquad y_n=\min_{1\leqslant k\leqslant d}\frac{\widehat{A}v_n}{v_n}(k),\tag{11}$$

此处对任一 A,

$$\frac{Ax}{x}(k)=\frac{(Ax)(k)}{x(k)}.$$

经过三步迭代, 得出

$$\{x_n,y_n\}_{n=1}^3:\{0.7806,0.464414\},\ \{0.683151,0.573173\},\ \{0.662076,0.624656\}$$

及相对误差

$$\{1-y_n/x_n\}_{n=1}^3:0.405055,\ 0.160987,\ 0.0565199.$$

第三步已相当小. 因为幂法再往下走的收敛速度很慢, 所以此时自然以 $x_3=0.662076$ 作为推移, 以

$$v_3=(0.249143,\ 0.860954,\ 0.160753,\ 0.190936,\ 0.28434,\ 0.231385)^*$$

为初值, 使用反幂法以加快收敛进程. 实践中使用 2 次变推移反幂法及 2 次固定推移反幂法 (随后很快会解释这两种反幂法), 得出 $\widehat{A}$ 右特征向量的振幅 (对于正向量 v, 这里使用 $\max v/\min v$) 为 5.35576. 此刻我们要换一思路, 进入

第二拟对称化技术. 回忆幂法与反幂法都是以计算特征向量为中心的. 如果该向量的振幅太大, 这根本就不可能实现. 所以进一步将 $\widehat{A}$ 变换为特征向量尽可能平坦 (即 $\max v/\min v$ 近乎为 1) 的矩阵, 自然对计算有利. 可惜两、三年前写文 [6] 时并未找到合适方法, 只是通过摸索找到针对具体模型的特定变换方法. 其实, 有了前面的准备之后, 问题的解答远非想象中那么困难. 首先, 值得提及一初等结果并重述引理 9 (4) 关于右特征向量的结果如下.

引理 16 设 w 为任一正向量, 命

$$(\overline{A}:=)A_w=D_{w^{-1}}A\,D_w.\tag{12}$$

则 $A_{\mathbb{1}}=A$. 再记 A_w 的最大 (右) 特征对为 $(\rho(A_w),\,g_w)$. 那么, 引理 9 (4) 给出 $g_v=\mathbb{1}$, 此处 v 如前为 A 的最大右正特征向量. 一般地, 我们有

$$\rho(A_w)=\rho(A),\qquad g=g_{\mathbb{1}}=D_w g_w.$$

特别地, 若 $\max\limits_i|w^{(i)}-v^{(i)}|$ 足够小, 则 g_w 为接近于常值的向量.

证明: 只证末项断言. 因为

$$D_w g_w = g = D_v g_v = D_v \mathbb{1},$$

由 (4), 我们有

$$g_w = D_{w^{-1}} D_v \mathbb{1} = D_{w^{-1}\odot v}\,\mathbb{1} = w^{-1}\odot v.$$

由此导出所需断言, 因为 $w^{-1}\odot v$ 是近乎常值的向量. □

若无歧义, 我们常将 (12) 所定义的 A_w 简记为 $\overline{A}$. 现在可以陈述我们的第二拟对称化技术. 假定 w 为 v 的近似解, 则 (12) 中所定义的 $\overline{A}$ 的右特征向量近乎常值向量. 与 (5) 不同, (12) 中略去了因子 $\rho(A)^{-1}$, 因为在此刻应用时, 它还不够精确, 所以故事还需继续. 回到我们的模型. 留心上面 $\widehat{A}$ 的右特征向量的近似值 v_3 并不平坦, 所以我们将引理 16 应用于 $A=\widehat{A}$ 及 $w=h$, 这里 h 是上述 v_3 的完整输出

$$\begin{aligned} h = (&0.2491428826805199,\ 0.860953851076968,\ 0.16075295283055344,\\ &0.1909361045560679,\ 0.2843399664827692,\ 0.2313848869722673). \end{aligned}$$

目标是平滑右特征向量而不是矩阵本身. 所得到的 $\overline{A}$ 如下:

$$\begin{bmatrix} 0.106525 & 0.287431 & 2.08697\cdot 10^{-6} & 0.00242226 & 0.22357 & 0.00470521\\ 0.0511483 & 0.531081 & 0.00187294 & 0.0136714 & 0.0399703 & 0.0145938\\ 0 & 0.595013 & 0.000324 & 0.0262728 & 0.0192542 & 0.0212119\\ 0.00220288 & 0.455781 & 0.0252988 & 0.082288 & 0.037366 & 0.0543965\\ 0.0102216 & 0.333667 & 0.0546062 & 0.0626676 & 0.049044 & 0.143312\\ 0.00433242 & 0.409268 & 0.0865285 & 0.0464895 & 0.0222454 & 0.091463 \end{bmatrix}.$$

此刻, 让我们介绍一下马上要用到的两种反幂法: 变动或固定推移的反幂法. 先讲前者. 给定矩阵 A、推移初值 z_0 和初值向量 w_0, 命 w_n 为方程

$$(z_{n-1}I - A)w_n = v_{n-1}, \qquad n \geqslant 1$$

的解, 其中 $v_n = w_n/\|w_n\|$ $(n\geqslant 0)$. 再定义 (x_n, y_n) 如 (11). 下一步迭代的 (变动) 推移取为 $z_n = x_n$. 这里, 我们不能介绍很多细节, 只是提及: 综合幂法和上述两种反幂法的优点, 文 [4] 给出了一种新算法, 可快速计算百万阶稀疏矩阵的前 6 个特征对.

应当指出上述反幂法与常见的有根本不同. 后者取 z_n 为 Rayleigh 商 (Av_n, v_n). 它也是一种变动推移的反幂法, 只是可靠性差一些. 固定推移的反幂法顾名思义仅有一处不同: $z_n \equiv z_0$.

分别使用上一步所得到的 x_3 和 $\mathbb{1}$ 作为初始推移和初始向量 (由引理 16, 变换 $\widehat{A}\to\overline{A}$ 保持特征值不变, 但特征向量变成近乎常值向量), 经过两次变动推移的反幂法, 得出

$$\{x_n, y_n\}_{n=1}^2 : \{0.651316,\ 0.650607\},\ \{0.651093,\ 0.651093\},$$

$$\{1-y_n/x_n\}: 0.00108929,\ 4.16016\cdot 10^{-7},$$

$$v_2=(0.388965,\ 0.406711,\ 0.414222,\ 0.412546,\ 0.411337,\ 0.415114)^*.$$

此时结果已很好: x_2 与 y_2 的相对误差仅有阶 10^{-7}. 所输出 $\overline{A}$ 的右特征向量的近似解 v_2 也已很平坦了, 但还不是常值向量, 离我们想要的 P 还有差距. 为了下一步变换到 P, 需要将这个输出结果加细. 变动推移的反幂法已不能用 (会溢出), 所以改用收敛慢一些但更安全的固定推移的反幂法. 经 5 步迭代, 输出如下.

$$\begin{aligned}&\{x_n, y_n\}_{n=1}^5: 5\ \text{对全相同, 都是}\ \{0.651093,\ 0.651093\},\\&\{1-y_n/x_n\}: 7.10543\cdot 10^{-13},\ \text{余下 4 个的主阶相同, 都是}\ 10^{-16},\\&v_5=(0.3889644490497301,\ 0.4067111070719223,\ 0.4142217482991163,\\&\qquad 0.41254630195005726,\ 0.41133749564051797,\ 0.41511454976104367)^*.\end{aligned}$$

这样, 我们有 $\rho(A)=\rho(\overline{A})=0.651093$, 而这里的 v_5 应是 $\overline{A}$ 的最大右特征向量的极好近似 (由上面第二行的相对误差 $(1-y_2/x_2)$ 可见, 其实取第 2 步的 v_2 已足够好了). 如果 v_5 已是 (正) 常值向量, 则 $\overline{A}$ 的最大右特征向量或调和函数已是正常值向量. 因此, 使用一个简单的常数变换, 可从 $\overline{A}$ 立即写出相应的 P, 我们已达到第二拟对称化的目标 (当然, 如要计算关于原先 A 的 P, 还需再算一步, 详见紧接的故事). 因为此刻 v_5 是非常值向量, 我们还需继续. 留心相似变换 $A\to\widehat{A}\to\overline{A}$, 保持谱不变, 若记它们的最大右特征向量分别为 g, $\widehat{g}$, 和 $\overline{g}=v_5$, 则由引理 16 得出

$$g=D_{\mu^{-1/2}}\,\widehat{g},\qquad \widehat{g}=D_h\,v_5,$$

从而

$$g=D_{\mu^{-1/2}}\,D_h\,v_5=D_{\mu^{-1/2}\odot h}\,v_5=\mu^{-1/2}\odot h\odot v_5\ \ (\text{使用 (4)}).$$

然后由 $g=v$ 与 $\rho(A)$, 可以使用公式 (5) 算出 P.

以 $m_v(B)$ 表示关于矩阵 B 最大右特征向量近似解的振幅 (使用 $\max v/\min v$), 则我们依次得到

$$m_v(A)=2.22249,\quad m_v\big(\widehat{A}\big)=5.35576,\quad m_v\big(\overline{A}\big)=1.06723,\quad m_v(P)=1,$$

留心这里的第 2 个大于第 1 个, 这并不奇怪, 因为 $\widehat{A}$ 的作用是尽量拉平矩阵的元素. 这两个矩阵最小元都是 0, 最大元分别为 0.606984 和 0.531081. 虽然是小矩阵, 这里的振幅都不大, 但多少展示出拟对称化技术的效果.

我们注意, A, $\widehat{A}$ 与 $\overline{A}$ 三者有相同的不可约性和非周期性, 因而有相同的 T_{x_0} 和 $T_{x_0}^+$. 所以实际计算稳定性时未必要回到 A, 使用后两者导出的 P, 计算要方便很多, 特别当矩阵很大时如此. 由此可以看出这里所建议的拟对称化技术的重要价值以及更多的灵活用法.

至此, 我们仅以 6 阶小矩阵为例, 介绍拟对称化算法. 自然会问对大矩阵效果如何? 仅使用当时较成熟的第一拟对称化技术, 文 [6; §3 末尾] 已给出随机测试. 使用笔记本电脑花 7 小时, 算了 2326 例 5000 阶方阵, 平均用时 11 秒. 现在有了成熟的第二拟对称化技术, 自然大大提高了算法的有效性. 这样, 关于此模型的算法似乎比较完善了.

华先生理论的核心是: 经济系统的平衡由最大左特征向量决定, 后者完全取决于当前的生产水平. 鉴于系统的高度敏感性, 华先生在文 [13; V, VI] 和书 [20; 第三章 §2, §3] 专门建议了两种调整技术, 值得实践并加以完善. 容易想像这个数学理论对于研究国家或地区、部门的经济平衡会有许多应用 (找出短板, 提供宏观调控的参考依据, 制定规划, 引导创新驱动等), 例如见 [9, 24–27] 等. 但依然有大量问题值得探讨、研究和实践, 特别是使用现在的更新理论, 重新考察先前的探索. 另一方面, 我们也期盼本文能为投入产出模型的分析提供一点有用的工具. 容易想象此领域有无数文献, 仅举一例 [8].

§7.　补充说明和证明

本小节给出两点历史性说明, 同时补充少量证明. 一是关于失衡时 T_{x_0} 与崩溃时 $T^+_{x_0}$; 二是尝试分析华先生发现定理 7 (2) 的历史过程以及笔者的修正.

(1) *失衡时 T_{x_0} 与崩溃时 $T^+_{x_0}$.* 我们在 [1–7] 中, 称前者为崩溃时, 并未使用后者. 原因是在文 [17] 的证明中预先假定每步 “$x_n > 0$”, 然后再导出矛盾, 从而该假定的否定就是存在 “$\leqslant 0$” 的分量. 再说此文基本定理的陈述中 “有不同号支量” 而并非 “有负的支量”. 例如常用的符号函数 sgn 有 $+1$, 0 和 -1 三种. 经查阅, 在 1983 年投稿的包括文 [17] 之后, 华在文 [16, 20] 的证明中, 将前述的 “$x_n > 0$” 修改为 “$x_n \geqslant 0$” (但证法无需修改), 其否定自然就成为 “有负的支量”, 即本文的崩溃时 $T^+_{x_0}$. 同时表明, 两者同时有限, 当然还有 $T_{x_0} \leqslant T^+_{x_0}$. 另一方面, 因为

$$x_{T_{x_0}} = x_{T_{x_0}+M_{\min}} A^{M_{\min}},$$

$A^{M_{\min}}$ 为正矩阵, $x_{T_{x_0}}$ 含有零分量, 故 $x_{T_{x_0}+M_{\min}} \neq 0$ 必定含有负的分量. 这证得 $T^+_{x_0} \leqslant T_{x_0} + M_{\min}$. 于是完成了推论 12 末项断言的证明.

类似地, 因为 A 不可约, 不可能含任何零列, 于是推出 $x_{T_{x_0}+1} \neq 0$ 必定含有零分量, 进而 $x_{T_{x_0}+n}$ 对于任何 $n: 2 \leqslant n \leqslant T^+_{x_0} - T_{x_0} - 1$ 亦如此. 同样证明适用于 “$x_{T^+_{x_0}+n}$ $(n \geqslant 1)$ 含有负分量”.

(2) *关于定理 7 (2) 的历史进程.* 笔者未见到任何文献引用这里所陈述的定理 7 (2), 源于文献 [20] 的结果.

(a) 大约 [20] 完成之前一年半左右, 在文献 [13, 16] (这两篇文章的收稿日期分别是 1983 年 10 月 18 日和 1984 年 5 月 4 日) 中, 带消费的数学模型均写成

$$x^{(\ell)} - \xi^{(\ell)} = x^{(\ell+1)} A, \tag{13}$$

这里的 $x^{(\ell)}$ 等同于我们文中的 x_ℓ, 而 $\xi^{(\ell)}$ 表示用于消费的量.

(b) $\xi^{(\ell)}$ 的具体表达式是大约完成文 [16] 半年之后在文 [18] (收稿日期 1984 年 11 月 22 日) 才给出的:

$$\xi^{(\ell)}=\gamma\big(x^{(\ell+1)}-x^{(\ell)}\big),\qquad \gamma\in(0,1). \tag{14}$$

但此文中, 他同时将 (13) 的左方改写为 $x^{(\ell+1)}-\xi^{(\ell)}$. 笔者注意到文 [18] 有一些后续研究, 特别指出了原文中的一个失误: 基本定理需补充假定所有其它特征值的模小于最大者 $\rho(A)$. 其实, 华先生在随后的文 [22] 已作了更正, 并给出了一个非平凡反例作为附录. 在华先生仙逝前 53 天 (1985 年 4 月 20 日) 完成的文 [19], 只是对已发表的 (I) — (X) 作小结, 后续文章 [22], [6,9,24–27] 全部沿用 [18].

(c) 最后换成本文所述形式源于书 [20; 第三章, §1 末段]. 将 (14) 代入 (13), 导出

$$x^{(\ell)}=x^{(\ell+1)}A_\gamma,\quad A_\gamma=\frac{A+\gamma I}{1+\gamma},\quad \rho(A_\gamma)=\frac{\rho(A)+\gamma}{1+\gamma},\qquad \gamma\in(0,1).$$

此系统的发展速度为 $\rho(A_\gamma)^{-1}$. 通常 $\rho(A_\gamma)<1$. 此时增长速度为

$$\rho(A_\gamma)^{-1}-1=\frac{1-\rho(A)}{\rho(A)+\gamma}\downarrow\frac{1-\rho(A)}{1+\rho(A)}>0,\quad \text{如 }\gamma\uparrow 1.$$

换言之, 此模型对于 $\gamma\in(0,1)$ 拥有一致正的增长速度. 这当然与实际不符. 为使右方趋于零, 当且仅当 $\gamma\uparrow\infty$. 本文取 $\gamma=\alpha(1-\alpha)^{-1}$, $\alpha\in(0,1)$. 然后 A_γ 变成定理 7 (2) 中的 A_α. 此算子来得有点意外但却十分自然: 它是无消费算子 A 与无增长算子 I 的凸组合. 留心通常 γ 是指取出增产部分的比例用于消费, 所以过去一直假定其值小于 1. 可见 A_α 中用于 "消费" 算子 I 的比例 α 与先前增量比例的 γ 用于消费的含义完全不同. 其实, 当 $\alpha\to 1$ 时, 增量 $\to 0$, 从而以其 $\gamma(\alpha)>1$ 的倍数作为消费不仅合理、而且必要, 因为消费总量需要有某种稳定性. 这同时表明: 原理论 (例如 [18]) 只将增产的一定比例 ($\gamma\in(0,1)$) 用于消费并不完全合理. 如同己在例 13, 14 的计算所示, 当 $\alpha=5/6$ ($\Leftrightarrow\gamma(\alpha)=5$) 时, 此系统比 $\alpha\leqslant 1/2$ ($\Leftrightarrow\gamma(\alpha)\leqslant 1$) 时远为稳定. 事实上从 A_α 的表达式可以看出, 系统的稳定性随 α (等价地, $\gamma(\alpha)$) 的增加而增强. 华先生的新方案将原本可能远为复杂的情形转化为相对简单但最基础的无消费情形. 从文 [18,22] 和 [5,6] 不难看出, 新方法大大简化了华先生早先的理论 (原方法需使用更多 A 的谱性质, 现在只用主特征对), 极为难能可贵, 无疑将对未来的发展产生巨大影响.

推论 8 的证明: 简记 $\rho=\rho(A)$. 由定理 7 (2) 知 $\rho(A_\alpha)=(1-\alpha)\rho+\alpha$. 从而关于 A_α 的增长速度为

$$\frac{1}{\rho(A_\alpha)}-1=\frac{1}{(1-\alpha)\rho+\alpha}-1.$$

命右方等于 δ, 解出

$$\alpha=\frac{(1+\delta)^{-1}-\rho}{1-\rho}.$$

然后得出

$$\gamma=\frac{\alpha}{1-\alpha}=\frac{1-(1+\delta)\rho}{\delta}.$$

使用这里的消费倍数 γ 代替 (14) 中的消费比例 $\gamma \in (0,1)$, 由定理 7 (2) 得出所需的第一个断言. 关于第二个断言, 留意 α 和 γ 都是关于 δ 的减函数. 这样, 减小 δ (即降低增长速度) 等价于增加 α 和 γ (即增加消费). $\square$

如上所示, 从 [13] 到 [20] 的一年半左右的时间里, 经历了几次反复修改, 才形成书 [20; 第三章, §1 末段] 所述的最后版本. 王元先生在此书的 "介绍" (前言) 中写道 "直至与我们永别前不久, 才算最后完成了本书的选写". 在此书中, 华先生罕见地未引用他所发表的 10 多篇报导性短文, 反而在 "序言" 开头写下如下令人深思的两段话 (请容许笔者抄录于此):

"序言是在书成之后写的, 但总放在书的前面. 探索也往往如此, 由简单开始, 在实践中, 在思考中不断深化, 不断发展. 新的概念和方法出现, 旧的不断被扬弃或遗忘, 因而思索与实践的宝贵过程反而淹没不见了, 而书上、文章上所见到的是成熟的或作者自以为成熟的结论.

当然, 我不是说体系完备、证明严正的书不必要, 而是说读者往往要花很多的时间和精力, 才能领会这些结果是怎样得来的, 作者为什么如此表达的, 等等."

笔者深感遗憾的是: 虽然从 1988 年冬就开始关注华先生的这一理论, 但只是到前不久, 才见到书 [20]. 两年多以前, 读过 [21] 中王元先生的文章, 该文的参考文献中含有 [20], 可惜并未引起注意, 走了不少弯路.

致谢 作者感谢谢颖超教授、韩东教授、李育强教授和廖仲威副教授对本文初稿的指正和宝贵建议. 乘此机会, 感谢本刊的各位编辑所付出的辛勤劳动、所做出的宝贵奉献.

本文的主题曾在 "运筹千里纵横论坛" 第 24 期 (2021/1) 和 "随机分析与遍历性理论研讨会" (山东大学, 青岛) (2021/12) 报告过, 笔者感谢戴彧虹研究员和赵怀忠教授的邀请.

参 考 文 献

[1] 陈木法. 经济最优化的随机模型 [J]. 应用概率统计, (I): 1992, **8(3)**: 289–294; (II): 1992, **8(4)**: 374–377.

[2] CHEN M F. *Eigenvalues, Inequalities and Ergodic Theory* [M]. London: Springer, 2005.

[3] CHEN M F. Hermitizable, isospectral complex matrices or differential operators [J]. *Front Math China*, 2018, **13(6)**: 1267–1311.

[4] CHEN M F, CHEN R R. Top eigenpairs of large scale matrices [J]. *CSIAM Trans Appl Math*, 2022, **3(1)**: 1–25.

[5] CHEN M F, LI Y. Stochastic model of economic optimization — collapse theorem [J]. *Beijing Shifan Daxue Xuebao*, 1994, **30(2)**: 185–194.

[6] CHEN M F, LI Y S. Improved global algorithms for maximal eigenpair [J]. *Front Math China*, 2019, **14(6)**: 1077–1116.

[7] 陈木法, 毛永华. 随机过程导论 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2007. 英译本: *Introduction to Stochastic Processes* [M]. Singapore: Higher Education Press & World Scientific, 2021.

[8] 董礼华, 陈璋, 杨翠红 (编). 中国投入产出理论与实践 (2016) [M]. 北京: 中国统计出版社, 2018.

[9] 韩东, 胡锡健. 经济和金融数学模型的理论与实践 [M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2003.

[10] 华罗庚. “计划经济大范围最优化数学理论” 简介 [J]. 优选与管理科学, 1984, **1**: 42–46.
[11] 华罗庚. 计划经济大范围最优化的数学理论 (I) — 量综与消耗系数方阵 [J]. 科学通报, 1984, **(12)**: 705–709.
[12] 华罗庚. 计划经济大范围最优化的数学理论 (II) — 消耗系数; (III) — 正特征矢量法的数学证明 [J]. 科学通报, 1984, **(13)**: 769–772.
[13] 华罗庚. 计划经济大范围最优化数学理论 (IV) — 数学模型 (矛盾论的运用); (V) — 论调整; (VI) — 生产能力的上限, 表格 [J]. 科学通报, 1984, **(16)**: 961–965.
[14] 华罗庚. 计划经济大范围最优化的数学理论 (VII) — 论价格 [J]. 科学通报, 1984, **(18)**: 1089–1092.
[15] 华罗庚. 计划经济大范围最优化的数学理论 (VIII) — 论 Brouwer 不动点定理 [J]. 科学通报, 1984, **(21)**: 1281–1282.
[16] HUA L K. On the mathematical theory of globally optimal planned economic systems [J]. *Proc Nat Acad Sci USA*, 1984, **81(20)**: 6549–6553.
[17] 华罗庚. 计划经济大范围最优化的数学理论 (IX) — 基本定理的证明 [J]. 科学通报, 1985, **(1)**: 1–2.
[18] 华罗庚. 计划经济大范围最优化的数学理论 (X) — 生产系统的危机 [J]. 科学通报, 1985, **(9)**: 641–645.
[19] 华罗庚. 计划经济大范围最优化的数学理论 (XI) — 历史回顾与小结 [J]. 科学通报, 1985, **(24)**: 1841–1844.
[20] 华罗庚. 计划经济大范围最优化的数学理论 [M]. 北京: 中国财政经济出版社, 1987.
[21] 杨德庄 (主编). 华罗庚文集 — 应用数学卷 II [M]. 北京: 科学出版社, 2010.
[22] 华罗庚, 华苏. 具有左右二正特征矢量的实方阵的研究 [J]. 数学通报, 1985, **(8)**: 30–33.
[23] MEYER C D. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra* [M]. Philadelphia, PA: SIAM, 2000.
[24] 戎卫东, 杨大力, 戴力群. 华氏经济数学理论及其应用初探 [J]. 内蒙古大学学报 (哲学社会科学版), 1992, **(2)**: 79–90.
[25] 戎卫东, 杨大力, 戴力群, 等. 宏观经济分析的新工具 — 正特征矢量法 [J]. 中国管理科学, 1993, **(1)**: 42–47.
[26] 徐大举, 尹金生, 李爱芹, 等. 直接消耗系数矩阵特征值的经济意义研究 [J]. 中国管理科学, 2010, **18(1)**: 33–38.
[27] 张宝军. 瓶颈产业视角下的中国经济均衡性研究 [J]. 生产力研究, 2012, **(5)**: 10–11+14.

New Progress on L.K. Hua's Optimization Theory of Economics

CHEN Mu-Fa

(*Research Institute of Mathematical Science, Jiangsu Normal University, Xuzhou, 221116, China; School of Mathematical Sciences, Key Laboratory of Mathematics and Complex Systems* (*Ministry of Education*), *Beijing Normal University, Beijing, 100875, China*)

Abstract: The paper consists of three parts. The first one is from the ergodic theorem of Markov chain to L.K. Hua's fundamental theorem on the optimization of economics. The second one is the Hua's revised version and the author's modification of Hua's theorem. The third one is the computational algorithms on the maximal eigenpair of the structure matrix in the economic system. Some examples are illustrated.

Keywords: input-output method; L.K. Hua's model; Markov chain; stability; algorithm
2020 Mathematics Subject Classification: 91Bxx; 60J10; 65F15