第50卷第3期 数 学 进 展 Vol. 50, No. 3
2021年5月 ADVANCES IN MATHEMATICS (CHINA) May, 2021

doi: 10.11845/sxjz.2021001a

量子力学的数学新视角

陈木法

(1. 江苏师范大学数学研究院, 徐州, 江苏, 221116; 2. 北京师范大学数学科学学院, 数学与复杂系统教育部重点实验室, 北京, 100875)

摘要: 在研究算法时遇到如下问题: 除实对称矩阵或复厄米矩阵外, 何种更大的矩阵类具有实谱? 后者是量子力学的两大特征之一, 另一特征是波动性. 闻名于世的量子力学的 "百年大战" 就是围绕着波动方程的解是否存在 "随机性" 展开的. 我们将介绍这几年的探索, 以一个意外结果打开了一个新视角. 须知, 现代数学的多个分支源于量子力学. 可以想象, 新视角所触及的决非仅仅几个小课题.

关键词: 统计物理; 量子力学; 可厄米矩阵; 新谱论
MSC(2020) 主题分类: 81-02; 47B15; 60Jxx
中图分类: O413.1; O411.1; O211.62
文献标识码: A **文章编号:** 1000-0917(2021)05-0321-14

1 背景: 源于算法和量子力学

(1) 源于算法的挑战, 实部最大的特征值

记 $\mathrm{Diag}(v)$ 为以向量 v 为对角线的对角矩阵. 设

$$B = \mathrm{Diag}(4+3\mathrm{i}, 4-3\mathrm{i}, 3+2\mathrm{i}, 3-2\mathrm{i}, 2+\mathrm{i}, 2-\mathrm{i}, 5+\mathrm{i}),$$
$$P = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3+\mathrm{i} & 2 & 3 & 1 & 3+\mathrm{i} \\ 5 & 4 & 2+\mathrm{i} & 4 & 5 & 1 & \mathrm{i} \\ 3-\mathrm{i} & 2-\mathrm{i} & 5 & 1+\mathrm{i} & 2 & 1 & 3+\mathrm{i} \\ 2 & 4 & 1-\mathrm{i} & 2 & \mathrm{i} & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & -\mathrm{i} & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

及 $A = P^{-1}BP$. 当然 A 是 B 的相似变换, 从而两者等谱. 我们关心的是半群 $\{\mathrm{e}^{tA}\}_{t\ge 0}$ 的指数稳定性. 它由 A 的诸特征值的最大实部决定. 使用带推移的逆迭代法 (反幂法)

$$v_n = (z_{n-1}I - A)^{-1} v_{n-1}, \quad n \ge 1,$$

初值为 (v_0, z_0), 第 n 步输出为 (v_n, z_n). 留心此法的要点是求得实部最大特征值的特征向量. 而特征值的计算是特征向量的副产品 (例如使用瑞利 (Rayleigh) 商).

收稿日期: 2021-01-17. 录用日期: 2021-01-29.
基金项目: 国家自然科学基金 (Nos. 11771046, 12090011), 国家重点研发计划 (No. 2020YFA0712900), 教育 "双一流" 建设学科和江苏高校优势学科建设工程.
E-mail: mfchen@bnu.edu.cn

图 1 是从 $z_0 = 62 + 6.2\mathrm{i}$ 和 $v_0 = \frac{1}{\sqrt{7}}\mathbf{1}$ 出发 (此处 $\mathbf{1}$ 为分量为 1 的常值向量而 z_0 取实部较大者以防掉进坑里), 依次得到的 $\{\mathrm{Re}(z_n)\}_{n=0}^{12}$ 的图像. 可以看出: 从 $n = 8$ 开始, $\mathrm{Re}(z_n)$ 就已非常接近于 $\max_j \mathrm{Re}(\lambda_j) = 5$. 因此, 我们当然应有 $v_n \to g_{\max}$.

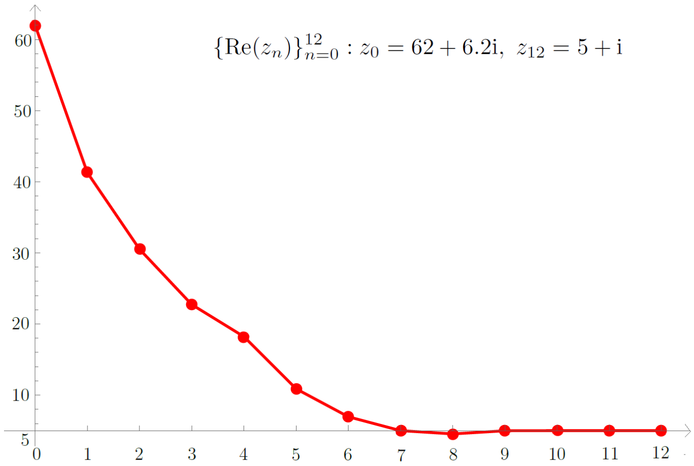

图 1 特征值实部的逼近序列 $\{\mathrm{Re}(z_n)\}_{n=0}^{12}$

但图 2 中的 $\{v_n\}_{n=9}^{12}$ 把我们完全搞晕了:

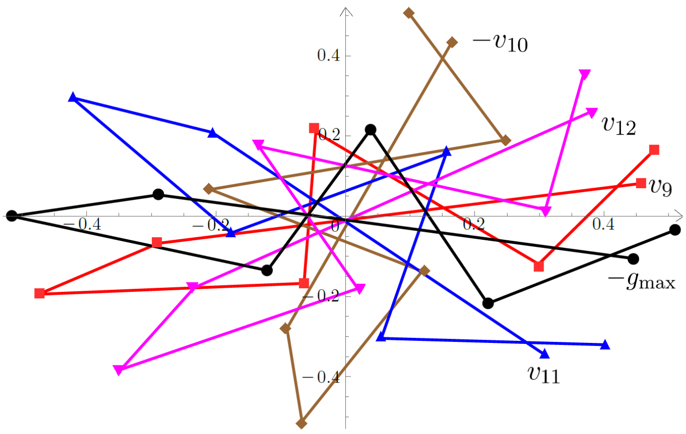

图 2 向量 $\{v_n\}_{n=9}^{12}$ 和 $g_{\max}$, 分别用方形点、菱形点、正三角点、倒三角点和圆点标注

图 2 中的向量 $g_{\max}$ 加了负号, 是为了将它的起点放到右半平面上; 同样地有 $-v_{10}$. 紧靠 $-g_{\max}$ 上方的点是该向量的第 1 个分量, 往左方依逆时针方向走逐次得出其余分量. 如图 2 所示, v_9 已很接近 $-g_{\max}$; 但 $-v_{10}$ 往上跑; v_{11} 往下掉; v_{12} 再回来一点. 看不出 $v_n \to g_{\max}$! 自然要问: $\{v_n\}$ 收敛吗?

(2) 源自量子力学的背景

本节需要稍长篇幅介绍量子力学百年发展史中的几个片段: 矩阵力学、波动力学、两者等价

性、源于量子力学的现代数学分支等, 从中可以体会到所研究课题的意义和价值. 本节包含一些历史文献, 作为旁证之用, 无需细读. 事实上, 粗读之后便可进入下一部分.

(i) 矩阵力学

量子力学主要由德国的海森堡 (Werner Karl Heisenberg) 于 1925 年创立, 当时他不满 24 岁. 他于 7 年后的 1932 年获诺贝尔物理学奖 (后文简称为诺奖), 颁奖词称奖励 "他对于量子力学的创造, 特别地, 这导致了氢的同素异形形式的发现". 回想 "爱因斯坦 (Albert Einstein) 年"——1905 年, 当时 26 岁的爱因斯坦是瑞士伯尔尼专利局的一个小职员. 他写了 1 篇博士论文并向德国《物理年鉴》(*Ann. Physik*) 提交了 4 篇论文, 这些论文包括现代物理中三项成就: 分子运动论、狭义相对论和光量子假说, 乃划时代文献. 其中 "光量子假说" 的论文赢得了 1921 年诺奖.

事实上, 海森堡的诺奖是 1933 年才颁发的. 同年获奖的是奥地利的薛定谔 (Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger) 和英国的狄拉克 (Paul Adrien Maurice Dirac), 颁奖词是 "发现原子理论的新的多产形式". 他们也是量子力学的主要贡献者.

量子力学的先驱有以下三位:

• 普朗克 (Max Planck, 1918 年获诺奖): 于 1900 年提出黑体辐射公式: 辐射频率是 ν 的能量的最小数值 $\varepsilon = \hbar\nu$, 其中 $\hbar$ 为普朗克常数.

• 爱因斯坦: 于 1905 年提出光量子假说.

• 玻尔 (Niels Bohr, 1922 年获诺奖): 于 1913 年提出原子 (结构) 模型, 被称为哥本哈根 (Copenhagen) 学派的教主.

矩阵力学创立于 1925 年, 共有 4 篇奠基性论文, 参见 [38]:

• 海森堡 [21] (1925 年 7 月 29 日投稿).

• 玻恩 (Max Born, 1954 年获诺奖) 和若尔当 (Pascual Jordan) [4] (1925 年 9 月 27 日投稿).

• 狄拉克 [17] (1925 年 11 月 7 日投稿).

• 玻恩、海森堡和若尔当 [3] (1925 年 11 月 16 日投稿).

玻尔模型中许多观点, 如电子的轨道、频率等, 都不是可以直接观察的. 海森堡期望创造一个理论, 只是使用在实验中经常接触到的光谱线的频率、强度、偏极化以及能阶等可观察量. 据说这种想法源于与玻尔的一次 3 小时的郊外散步. 第一篇原创论文 [21] 使用的是列表处理. 他将论文送给他的老师玻恩, 随后外出访学. 玻恩苦思多日, 领悟出前者的几个表实际上是矩阵乘法. 他随后与数学家若尔当合作, 写出上述第二文 [4]. 此文首次使用矩阵. 由此定名为 "矩阵力学". 一个多月后, 他们三人合作完成了第四文 [3]. 这三人的快速合作不难理解, 因为都在德国. 但狄拉克的快速反应 (第三文 [17]) 令人吃惊.

现有矩阵力学所研究的基本物理单元是厄米矩阵, 这是最基本的具有实谱的复矩阵.

(ii) 波动力学

1926 年, 薛定谔在《物理评论》(*Phys. Rev.*) 上发表了 "原子和分子力学的波动理论" ([33], 1926 年 9 月 3 日投稿), 开创了量子力学的第二种形式 —— 波动力学.

薛定谔方程的基本形式为:

$$\mathrm{i}\hbar\dot{\psi}(t) = (-\gamma\Delta + V)\psi(t),$$

此处 $\dot{\psi}$ 是 ψ 关于 t 的导数, 常数 $\gamma = \frac{\hbar^2}{2m}$. 为简单计, 如无特别需要, 以下我们常略去此常数 γ

不写, 这并不会影响主要结论. 如果 V 是实的, 很自然可考虑时空分离解:

$$\psi(t,x) = \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}Et}{\hbar}}\phi.$$

此时, 原方程变为

$$(-\Delta + V)\phi = 2\pi E\phi =: \tilde{E}\phi,$$

其中 ϕ 是与时间无关的定态解. 改记 $\tilde{E}$ 为 E_m, 它是第 m 个特征值 (能级), 相应的特征向量为 ψ_m. 这给出

$$\text{能量 } (\psi_m, (-\Delta + V)\psi_m) = E_m(\psi_m, \psi_m) = E_m,$$

此处使用了归一化:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\psi_m|^2 \mathrm{d}x = 1.$$

简单地说, 将对应于特征值 E_m 的特征向量的模平方 $|\psi_m|^2$ 视为概率密度. 这相当于使用了随特征值流动的概率空间.

(iii) 两种力学的等价性

从提出波动力学的当年开始, 就有多人证明了两种力学的等价性 [5]:

• 薛定谔 [34], 1926 年;

• Carl Eckart[19], 1926 年;

• 狄拉克 [18], 1930 年;

• 冯 · 诺伊曼 (John von Neumann), 1927–1929 年间的多篇论文及总结性专著 [39].

(iv) "百年大战"

1926 年玻恩称 ψ_m 为概率幅 (probability amplitude). 1954 年他获诺奖的颁奖词称奖励 "他在量子力学方面的基础研究, 特别是对波函数的统计解释". 然而, 薛定谔从来没有接受如哥本哈根学派所倡导的那样 "几乎是精神上的" 正统的解释. 爱因斯坦则说: "上帝不掷骰子!"

百年来的研究史证明, 量子力学拥有非常神秘的内蕴, 以至于多位名家都称**无人真懂**量子力学.

• 玻尔说: "如果有人不被量子力学弄晕, 那么他一定不懂量子力学."

• 爱因斯坦说: "我思考量子力学的时间百倍于广义相对论, 但依然不明白."

• 费曼 (Richard Phillips Feynman) 因其于 1949 年引入非常有用的费曼图而闻名于世 (但至今尚无严格理论), 并于 1965 年获诺奖. 他说: "据说世界上只有三个人了解相对论, 我不知道他们是谁. 但是, 我想我可以肯定地说没有人理解量子理论!"

也许, 直至今日, 这种状况并没有改变, 参见 [24].

(v) 量子力学与现代数学

薛定谔出身于统计物理方向, 在文 [35–36] 中, 他曾试图找到一个由经典概率导出的方程, 该方程的特征尽可能接近他的波动方程. 这引发了大量的后续研究. 例如后面将要提及的可逆马尔可夫过程和狄氏型理论, 还有 "薛定谔扩散过程", 见 [2, 30–31] 及书中文献.

与此相关, 还有几类复值随机过程:

• SLE 理论. 一维复值布朗运动 (归功于 P. Lévy). 参见 [25] 及书中文献;

• 多重次调和函数 (plurisubharmonic functions) 的狄氏型. 参见 [20] 及其中文献;

• 复值马尔可夫链与费曼积分. 参见 [23, 第 9 章] 和 [27] 及书中文献;

• 量子概率, 量子随机分析. 参见 [1, 32] 及书中文献.

在量子力学发展的早期, 人们就摸索比厄米矩阵类更大的对象. 一个典型例子是 1934 年引进的若尔当代数, 力图以它代替厄米矩阵类. 有趣的是, 笔者母校的刘绍学老师曾于 1964 年在《数学进展》上发表了一篇关于这种代数的论文. 可见当年若尔当代数方向研究的活跃程度. 1983 年, Efim Zel'manov 证明: 若尔当代数最多只是 27 维的 Albert 代数, 对于量子力学而言当然太小, 所以这一研究思路被卡住了. 去年有位朋友告知, 超弦理论也是卡在 27 维. 不知何因? Zel'manov 还应用若尔当代数解决了 Burnside 问题, 并获 1994 年菲尔兹奖. 关于此代数, 笔者共查到 8 本专著, 其中有 1 本是关于统计的应用. 较新的一本是 [28].

近年来, 还兴起了非厄米量子力学, 例如 $\mathscr{P}\mathscr{T}$ 对称的 (psuedo) 量子力学. 参见 [29] 及书中文献.

仔细想想, 便可发现量子力学对现代数学的巨大影响. 下面列出源于量子力学或受其深度影响的一些数学分支.

• Free 概率, 量子逻辑;
• (复) 偏微分方程, 希尔伯特空间, 谱理论;
• 算子代数: C^* (W, 外尔 (Weyl), 若尔当, 冯・诺伊曼) 代数等;
• 海森堡群, 量子群;
• 非交换几何;
• 量子力学计算;
• 量子 + 几何: 超对称, 超弦.

关于量子计算, MATLAB 最早就是为量子力学设计的. 现在, 差不多每一种重要软件, 如 Mathematica, Maple 等都有专门书籍介绍如何将该软件应用于量子力学. 本文的下一部分将谈到: 现代概率论中的可逆马尔可夫过程及狄氏型理论, 源于科尔莫戈罗夫 (Andrey Nikolayevich Kolmogorov) 于 1936–1937 年的工作, 也植根于量子力学.

因为难于计算, 矩阵力学在很长时期内大多处于沉睡状态. 量子力学研究大多集中于波动力学, 后者有强有力的分析工具支撑. 近些年来, 因为计算的进步, 矩阵力学大有复兴之势. 例如见 [22, 26].

至此, 我们回顾了量子力学对数学的深刻影响, 以及两学科之间互帮互助、协同发展的历史片段. 笔者学习量子力学只是近两年的事, 受到深深的震撼. 所以记录下这小节以供纪念. 记得 Michael Atiyah 以前曾说过: "quantum (量子)" 对他来说依然是 "a big word (一个很大的、难以捉摸的单词)". 他有一个梦想: 建立 "量子与数学的联盟".

2 从厄米矩阵到可厄米矩阵, 判别准则和等谱矩阵

回到摘要中讲的问题: 什么矩阵具有实谱? 笔者想到的是作为矩阵算子, $A = (a_{ij})$ 在某 $L^2(\mu)$ 空间上是自伴的, 那它在此空间上的谱就是实的. 也许你对这个解答会感到失望, 因为大家上大学时早就学过. 但事实并非如此. 实际上, 没有哪一本书告诉你是否存在及如何找出这个测度 μ.

事实上, 这个发展经历了很长时间:

$$\begin{aligned}\text{可逆 (reversible, 1936 年)} &\longrightarrow \text{可配称 (symmetrizable, 1979 年)}\\ &\longrightarrow \text{可厄米 (Hermitizable, 2018 年)}.\end{aligned}$$

1936 年, 科尔莫戈罗夫首先对有限马尔可夫链 (有限非负矩阵) 引进了可逆性概念. 有趣的是: 该文的开头和结尾都引用了薛定谔 1931 年的文章. 1937 年, 他研究扩散过程 (二阶椭圆微分算子) 的可逆性. 这就开辟了现代可逆马尔可夫过程 (或更一般的狄氏型) 的新学科分支. 就可数空间情形, 将 "可逆" 拓广为 "可配称" 的系统工作, 是笔者与侯振挺老师于 1979 年完成的. 直至 2018 年, 所有的研究都限于非对角线元素非负的矩阵. 对于马尔可夫过程而言, 此条件是自动满足的. 因此, 是科尔莫戈罗夫最早将量子力学、确切地说是统计力学引入概率论; 当然, 将概率论与统计力学真正交叉是到 20 世纪 60 年代中叶的事, 参见 [6–7] 及其中所引文献. 然而所有这些研究都限于实的情形. 2018 年, 源于算法研究的需要, 笔者引进了可厄米矩阵工具. 42 年前的 "可配称" 理论是我们进入统计力学的敲门砖, 也是我们在国际上立足的第一个成果. 没想到, 后来找到 "可厄米" 的平行理论, 使我们很自然地进入量子力学.

定义 1[10] (陈木法, 2018 年) 称复矩阵 $A=(a_{ij})$ 可厄米, 如果存在正测度 $\mu=(\mu_k)$ 使得对于每一对 (i,j), 有 $\mu_i a_{ij}=\mu_j \bar{a}_{ji}$ ($\Rightarrow$ 对角线元素为实).

简单地说, 虽然矩阵 (a_{ij}) 非厄米, 但 "配上" 测度 μ 之后, 矩阵 $(\mu_i a_{ij})$ 就成为厄米矩阵了. 退到实的情形, "可厄米" 就成为 "可配称". 当 $\mu_k\equiv 1$ (均匀测度) 时退回实对称或复厄米情形, 这相当于处于均匀介质. 对于无穷 (维、阶) 矩阵, 此时不存在 (平衡态) 统计力学. 因为对于统计力学, $\mu=$Gibbs 态, 必定为概率测度. 同样地, 若 $\mu_k\equiv 1$ 且矩阵无限, 对于马氏过程, 意味着此系统必定走向灭绝, 可见实际应用的价值极为有限. 如同科尔莫戈罗夫所说: 概率论的应用都是通过平稳概率分布来实现的. 所以将 "厄米" 换成 "可厄米" 有极其重要的意义. 遗憾的是: 虽然可配称思想我们已经使用了 42 年, 但在矩阵论、泛函分析、计算数学、物理学中似乎未受太多关注. 就我们所知, 可厄米工具在上述各学科中都是新的, 是值得开垦的新领域. 顺便提及: 最近我们对计算的主要贡献之一就是使用可配称和可厄米理论, 例如见 [10, 14–15].

定理 2[10] (可厄米判别准则) 复矩阵 $A=(a_{ij})$ 可厄米, 当且仅当下述两条件同时成立:

(1) 对每一对 (i,j), 或者 a_{ij} 与 a_{ji} 同为零, 或者 $a_{ij}a_{ji}>0$;

(2) 对每一最小闭路 (故无往返), 圈形条件成立.

此处需要解释上述 (2) 所用到的图结构. 如 $i\neq j$, $a_{ij}\neq 0$, 就记作 $i\to j$. 这样, 就有闭路 $i_0\to i_1\to\cdots\to i_n=i_0$. 所谓最小者乃指它不包含任何一个子闭路. "圈形条件" 说的是对于每一如上的闭路, 都有

$$a_{i_0 i_1}\cdots a_{i_{n-1} i_n}=\bar{a}_{i_n i_{n-1}}\cdots \bar{a}_{i_1 i_0}.$$

即沿此闭路的一个方向诸项 $a_{i_k i_{k+1}}$ 的连乘积等于沿此路反方向诸项连乘积的共轭. 对于非对角线元素非负的特殊情形, 这个圈形条件归功于科尔莫戈罗夫 1936 年的工作. 笔者与侯老师 42 年前的主要贡献是只需验证 "最小闭路"; 很多时候, 甚至只需检查 "四边形" 或 "三角形" 的单一闭路便可. 这使我们能够走得很远, 包括可数无穷维. 例如见 [6, 第 7 章、第 11 章及第 14.5 节].

如何算出测度 μ? 先固定参考点 i_0 并设 $\mu_{i_0}=1$. 然后, 对于每个 $j\neq i_0$, 任选一条路 $i_0\to i_1\to\cdots\to i_n=j$, 则可取

$$\mu_j=\frac{a_{i_0 i_1}}{\bar{a}_{i_1 i_0}}\,\frac{a_{i_1 i_2}}{\bar{a}_{i_2 i_1}}\cdots\frac{a_{i_{n-1} i_n}}{\bar{a}_{i_n i_{n-1}}}.$$

我们还有验证圈形条件和求出厄米化测度 μ 的算法, 见 [12, Algorithm 1].

作为定理 2 的直接应用, 我们来看看三对角/生灭矩阵的特殊情形. 设 $E=\{k\in\mathbb{Z}_+: 0\leq$

$k < N+1\}$ $(N \le \infty)$. 我们设三对角矩阵 T 和生灭矩阵 Q 形式如下:

$$\begin{pmatrix} -c_0 & b_0 & & & 0 \\ a_1 & -c_1 & b_1 & & \\ & a_2 & -c_2 & b_2 & \\ & & \ddots & \ddots & b_{N-1} \\ 0 & & & a_N & -c_N \end{pmatrix},$$

对于 T, $(a_k), (b_k), (c_k)$ 为 3 个复数序列. 对于 Q, 要求: $a_k > 0$, $b_k > 0$, 每行行和为零. 若矩阵有限, 还要求末行行和小于零. 常简记为 $T(\text{或}Q) \sim (a_k, -c_k, b_k)$.

推论 3[10] (三对角矩阵可厄米判别准则) 三对角矩阵 $T \sim (a_k, -c_k, b_k)$ 可厄米, 当且仅当下述两条件同时成立:

(1) 对角线元素为实;

(2) a_{i+1} 与 b_i 同为零, 或者其积为正.

此时,

$$\mu_0 = 1, \quad \mu_n = \mu_{n-1}\frac{b_{n-1}}{\bar{a}_n}, \quad n \ge 1.$$

随后, 我们将略去 "a_{i+1} 与 b_i 同为零" 情形, 因为此时可分块处理.

在继续深入讨论之前, 注意可厄米矩阵 T 与生灭矩阵 Q 之间的差别. 粗略地说, T 由 5 个实数列决定, Q 由 2 个正数列 (等价地, 1 个实数列) 决定. 两者相距甚远. 我们之所以把它们放在一起, 是因为发现了两者之间存在血缘关系: 每一个可厄米的 T 都与某个生灭矩阵 Q 等谱 (有限或无限矩阵), 无妨将后者记作 $\widetilde{Q} \sim (\tilde{a}_k, -\tilde{c}_k, \tilde{b}_k)$. 更 "神" 的是, 我们可用两个已知的正数列 (c_k) 和 $u_k := a_k b_{k-1} = |a_k b_{k-1}|$ 将 $\widetilde{Q}$ 显式地表示出来. 最关键的是下述的单步迭代:

$$\tilde{b}_k = c_k - \frac{u_k}{\tilde{b}_{k-1}}, \quad \tilde{b}_0 = c_0.$$

凡单步迭代总是显式. 此处是连分式

$$\tilde{b}_k = c_k - \cfrac{u_k}{c_{k-1} - \cfrac{u_{k-1}}{c_{k-2} - \cfrac{u_{k-2}}{\ddots\, c_2 - \cfrac{u_2}{c_1 - \cfrac{u_1}{c_0}}}}}, \qquad 1 \le k < N.$$

有了序列 $(\tilde{b}_k)$ 之后, 容易完成 $\widetilde{Q}$ 的构造. 这里需要一点条件: 对每一 k, $c_k \ge |a_k| + |b_k|$. 当矩阵有限时, 只需用 $T + mI$ $(m \gg 1)$ 代替 T. 然后, 令

$$\begin{cases} \tilde{c}_k \equiv c_k; \\ \tilde{a}_k = c_k - \tilde{b}_k, \quad k < N; \quad \tilde{a}_N = \dfrac{u_N}{\tilde{b}_{N-1}}, \quad \text{如 } N < \infty, \end{cases}$$

这里, $\tilde{a}_k$ 的取法只是因为 $\widetilde{Q}$ 行和的要求.

下面是本文称之为 “新视角” 的一个结果.

定理 4[10] (算法) 对于每一个 $T \sim (a_k, -c_k, b_k)$, 只要 $c_k \geq |a_k| + |b_k|$ 对任意 k 成立, 则 T 与如上构造的生灭矩阵 $\widetilde{Q} \sim (\tilde{a}_k, -\tilde{c}_k, \tilde{b}_k)$ 等谱 (对有限矩阵, 即有相同特征值).

此结果似乎简单得让人瞧不起. 是的, 一个好的数学结果不仅需要简洁, 还要求有深刻内涵和根本性 (即处于底层, 从而可扩展). 要看出此结果不简单, 只需想想为何 $\tilde{a}_k$ 和 $\tilde{b}_k$ 为正. 从定义看不出这一点. 此处, 我们再指出一个关键点. 这是笔者和张旭 [16] 于 2014 年找到的一种 h 变换. 给定一个复矩阵或二阶微分算子. 比如说 A, 我们要构造一个等谱算子 $\tilde{A}$. 方法是使用几乎处处调和函数 h: $Ah = 0$ 几乎处处成立. 对于矩阵情形, 它将 A 的所有行和变为零; 对于微分算子情形 (例如薛定谔算子), 它将位势项化为零. 对于目前的三对角矩阵 T, 调和方程乃相对简单的二阶差分方程. 众所周知, 变系数的二阶微分/差分方程并无通解. 所能指望的是寻求特解, 这全靠 “锦囊妙计”. 在 2014–2018 年间, 笔者曾做过两次努力, 一直未能找到 h 的较好的表达式. 现在, 使用上述构造的变换 $T \to \widetilde{Q}$, 我们可写出很简单的表达式:

$$h_0 = 1, \quad h_n = h_{n-1} \frac{\tilde{b}_{n-1}}{b_{n-1}}, \quad n \geq 1.$$

等价地,

$$h_0 = 1, \quad h_n = \prod_{j=0}^{n-1} \tilde{b}_j \Big/ \prod_{j=0}^{n-1} b_j, \quad n \geq 1.$$

此式表面上简单, 却是典型的马后炮. 假如把上述的 $\tilde{b}_k$ 代进去, 容易看出 $\{h_n\}$ 与所给定的 T 的关系实质上极为复杂, 所以难怪之前费尽心力都未能找到形式如此优美的 $\widetilde{Q}$. 应当特别指出: h 变换拥有普适性. 它将给谱理论带来很大困扰的 “位势” 项排除, 代之以标准的随机过程的生成元或二阶椭圆算子 (参见本文第 4 节).

得出这样的结果是非常不容易的. 笔者前后共发表了三个不同证法: 2018 年 [10] 的原证明, 2020 年 [11] 的两个直接证明.

3 离散谱

量子力学只关心离散谱 (分立谱). 对于有限矩阵, 谱总离散. 因而只需考虑无穷矩阵. 本节给出三对角矩阵离散谱的显式判别准则. 由等谱性, 只需写出关于 Q 矩阵情形的判别准则; 使用定理 4 即可得出可厄米 T 的离散谱判别准则.

令 $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \cdots\}$. 设 $\widetilde{Q} \sim (\tilde{a}_k, -\tilde{c}_k, \tilde{b}_k)$. 定义

$$\tilde{\mu}_0 = 1, \quad \tilde{\mu}_k = \frac{\tilde{b}_0 \cdots \tilde{b}_{k-1}}{\tilde{a}_1 \cdots \tilde{a}_k}, \quad k \geq 1.$$

记 $L^2(\tilde{\mu})$ 为 $\mathbb{Z}_+$ 上关于测度 $\tilde{\mu}$ 平方可积的实函数所构成的空间, 其常用内积记为 $(\cdot, \cdot)_{\tilde{\mu}}$. 由第 2 节已知, $\widetilde{Q}$ 可配称, 这等价于由二次型 $(\widetilde{Q}f, g)_{\tilde{\mu}}$ 所定义的算子为自伴 (自共轭). 只是此时需要指定算子的定义域. 我们所关心的有两个. 其一为最大者: 它由满足条件 $(-\widetilde{Q}f, f)_{\tilde{\mu}} < \infty$ 的函数 $f \in L^2(\tilde{\mu})$ 构成. 其二是最小者: 它由具有有限支撑的函数张成. 将两个算子分别记为 $\widetilde{Q}_{\max}$ 和 $\widetilde{Q}_{\min}$. 为读者方便, 我们重述取自 [9, 11] 的下述结果.

定理 5 (1) 设 $\sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{\mu}_k \tilde{b}_k)^{-1} < \infty$. 则 $\mathrm{Spec}(\widetilde{Q}_{\min})(:= \widetilde{Q}_{\min}$ 的谱) 离散当且仅当

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \tilde{\mu}_j \sum_{k=n}^{\infty} \left(\tilde{\mu}_k \tilde{b}_k\right)^{-1} = 0.$$

(2) 设 $\sum_{j=0}^{\infty}\tilde{\mu}_j<\infty$. 则 $\mathrm{Spec}(\widetilde{Q}_{\max})$ 离散当且仅当

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=n+1}^{\infty}\tilde{\mu}_j\sum_{k=0}^{n}\big(\tilde{\mu}_k\tilde{b}_k\big)^{-1}=0.$$

(3) 设 $\sum_{k=0}^{\infty}(\tilde{\mu}_k\tilde{b}_k)^{-1}=\infty=\sum_{j=0}^{\infty}\tilde{\mu}_j$. 则 $\mathrm{Spec}(\widetilde{Q}_{\min})=\mathrm{Spec}(\widetilde{Q}_{\max})$ 非离散. 特别地, 当

$$\sum_{i=0}^{\infty}\tilde{\mu}_i\sum_{j=i}^{\infty}\big(\tilde{\mu}_j\tilde{b}_j\big)^{-1}=\infty$$

时, 结论成立.

通常, 三对角矩阵对应于一维二阶椭圆算子, 两者的故事是平行的. 当然, 使用 h 变换可让我们去掉位势项, 回归通常理论. 所以自然要问, 此时的调和函数 h 是什么? 我们不久前才找到答案 [13]. 更进一步, 对于矩阵情形, 上述的 "三对角" 条件可以去掉. 即每一可厄米矩阵等谱于某个生灭矩阵的谱.

引理 6 复矩阵 $A=(a_{ij})$ 关于 μ 可厄米, 等价地

$$\mathrm{Diag}(\mu)A=A^H\mathrm{Diag}(\mu),\quad A^H:=\bar{A}^*$$

当且仅当

$$\mathrm{Diag}(\mu)^{\frac{1}{2}}A\mathrm{Diag}(\mu)^{-\frac{1}{2}}$$

为厄米矩阵.

由此得知, 关于厄米矩阵的每一理论/算法均可延拓至可厄米矩阵. 非常可贵的是, 我们 [10] 引进了将两者耦合在一起的算法, 又见 [14]. 更进一步, 还有拟配称化算法 [15].

Householder 变换 对于每一个 $m\times m$ 厄米矩阵 H, 存在一个推广的反射阵序列 $\{U_j\}_{j=1}^{m-1}$ 使得 $U:=\prod_{j=1}^{m-1}U_j$ 为酉矩阵且 $T:=UHU^H$ 变成实对称的三对角矩阵.

这样, 我们得到

$$\text{可厄米矩阵 } A\sim\text{ 厄米矩阵 } H\sim\text{ 三对角矩阵 } T\sim\text{ 生灭矩阵 } \widetilde{Q},$$

此处 "$\sim$" 为 "等谱". 更多细节见 [12, §4].

生灭矩阵理论有极丰富的积累, 千页的书恐不足于收入其完整成果. 例如笔者这一辈子写的最长一篇文章, 只讨论生灭过程, 发表出来有 137 页 [8].

从雅可比 (Carl Gustav Jacob Jacobi) 1846 年的论文算起, 矩阵的特征问题已经历了 175 年. 2000 年初, 《科学与工程计算》(*Comput. Sci. Eng.*) 刊出由美国物理研究所 (Amer. Inst. Phys.) 和 IEEE 计算机协会 (IEEE Comput. Soc.) 联合评选发布的 20 世纪的 10 大算法, 其中矩阵特征问题的算法占 3 个, 当中的一个就是刚刚讲的 Householder 变换. 因此, 在这方面的任何进步都来之不易. 现在, 我们已经把复可厄米矩阵 A 在复 $L^2(\mu)$ 上的谱等同于某生灭矩阵 $\widetilde{Q}$ 在实 $L^2(|h|^2\mathrm{d}x)$ 上的谱. 因为有了共同的标架, 可以讨论如上面所做过的离散谱的判别准则等. 更进一步, 我们 [12] 已经完成可厄米矩阵的前面几个特征值的算法, 并已编程. 顺便提及, 基于薛定谔方程, 对于量子化学, 量子计算是一个很成熟的领域. 已有密度泛函理论 (density functional theory, 相关工作获 1998 年诺贝尔化学奖), 有至少 15 种软件 (其中 10 种免费). 我们期盼基于矩阵力学的新想法也能在量子力学计算方面取得更多新进展.

至此, 我们已经做了一件很有意义的工作. 回想前面所述的百年大战, 其实还有 "薛定谔的猫" 等故事. 下面是前面已提到的薛定谔所不接受的 "哥本哈根诠释". 玻尔于 1927 年 9 月提出 "互补性原理": "电子具有波粒二象性, 当你观察它们时呈粒子性, 不观察它们时以波的形式存在. 这称为波、粒对偶, 依赖于你以何种方式观察它." 这是至今为止物理学界所接受的传统解释. 如前所述, 薛定谔至死不能接受, 是因为他觉得这有种心理学的味道. 去年笔者见到一篇文章说 "哥本哈根诠释死掉了". 所以说是 "百年大战", 一点都不假. 大家也已经看到, 按照我们的路子, 波动性无疑源于复结构, 但并非来自随机性. 从这点看, 爱因斯坦是对的. 我们的谱同构, 使用的是某种 "滤波" 技术, 给出了统一的参考标架用于观测. 如同照相, 需要找好位置并排除障碍. 虽然同样用于观察, 但好像不牵涉波粒二象性. 似乎也没有多少争议.

最近的新书 [37, p. 71] 再次强调 $|\psi|^2$ 可观察, 但 ψ 不然. 从 ψ 到 $|\psi|$, 只忽略了因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

现在, 我们可以回到一开头所讲的被特征向量迭代 $\{v_n\}_{n=9}^{12}$ 搞晕的问题. 正是因为这个问题笔者才开始认真思考复矩阵及本文所讲的故事.

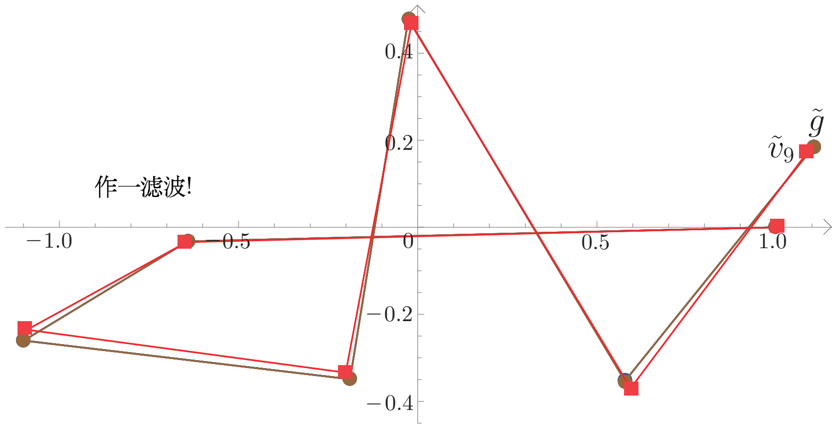

图 3 $\tilde{v}_9$ (方形点); $\tilde{v}_{10}$, $\tilde{v}_{11}$, $\tilde{v}_{12}$ 和 $\tilde{g}$ 几乎重叠 (圆点)

图 2 显示, 诸向量 $\{\tilde{v}_k\}_{k=9}^{12}$ 是在旋转. 旋转即波动, 不会改变模 $\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n}x\| \equiv \|x\|$. 我们现在把旋转去掉: 将每一向量除以它的第一个分量 $\tilde{v} := \frac{v}{v(0)}$. 这样, 5 个向量有共同的起点: 实轴上的 1. 将重整化后的 5 个向量画出来, 得出图 3. 除 $\tilde{v}_9$ 稍许偏离而外, 其余向量已无可见的差别. 事实上, $\tilde{v}_{12}$ 与 $\tilde{g}$ 相差 10^{-14}. 换言之, 这组向量构成一组近似的保角 (共形) 变换. 对于给定的 v_{n-1} 和推移 z_{n-1}, 命

$$w = (z_{n-1}I - A)^{-1}v_{n-1}.$$

当然, w 的辐角常不同于 v_{n-1} 的辐角, 从而迭代过程中, 辐角常在变. 然而通常的归一化程序 $v = \frac{w}{\|w\|}$ 不会改变 w 的辐角.

回到前面所述的变换

$$\text{可厄米矩阵} \to \text{厄米矩阵} \to \text{实对称阵} \to \text{生灭矩阵},$$

首尾两步可能改变长度, 但中间一步是酉变换, 不改变长度, 只改变辐角 (反复多次). 最后当然回到实 L^2 坐标系.

至此, 我们已经给出了波粒二象性的一种比较自然的解释. 最后一步在统一的实 $L^2(|h|^2\mathrm{d}x)$ 上, 这与波动力学的流动空间完全不同! 计算生灭矩阵 $\widetilde{Q}$ 的谱 (观测), 自然无需用到函数 h 的辐

角. 然而在复 $L^2(\mu)$ 上观测可厄米矩阵 A, 当然是在复的世界里, 所使用的 Householder 变换也是复的. 尽管这些变换很复杂, 但依然有计算程序, 属可解模型 [12]. 因此依然没有随机性. 这样, 我们再次认定爱因斯坦的 "上帝不掷骰子" 是对的.

作为本节的结尾, 我们说明这里的 "可厄米" 与第 1 节 (2)(v) 所提及的 "非厄米" 之间的差别. 如果退到实矩阵情形, "可厄米" 即是 "可配称", 这对应于平衡态统计力学; 于是 "非厄米" 对应于非平衡态统计力学. 后者的谱在大多数情况下是复的. 从量子的角度看, 这意味着 "非厄米" 太大, 需加以限制. 这正是第 1 节 (2)(v) 所提及的 "$\mathscr{P}\mathscr{T}$" 对称性的缘由. 本文所引进的 "可厄米", 乃相应于平衡态统计力学, 虽然还不是拥有实谱的最大类, 但可视为 "厄米" 最自然的拓广.

4 微分 (薛定谔、等谱) 算子

(1) 研究薛定谔算子 $L = \frac{1}{2}\Delta + V$ (这是数学写法, 与前面的物理写法相差一负号) 的常用方法是 Feynman-Kac 半群:

$$T_t f(x) = \mathbb{E}_x\left\{\exp\left[\int_0^t V(w_s)\mathrm{d}s\right] f(w_t)\right\},$$

其中 (w_t) 是标准布朗运动, 它常是无界半群. 用它来研究谱性质, 虽有不少工作, 可惜不太成功. 大家知道, 薛定谔算子为量子力学而生, 今年已 95 岁. 近百年来, 献给此算子的文献不计其数. 但对于量子力学所关注的谱离散问题, 据我们所知结果并不多. 例如说, 我们没能找到形如定理 5 的判别准则.

(2) 前面已提及的 h 变换提供了研究薛定谔算子的一种新方法:

和 c 为 ${\Bbb R}^d$ 上的复、而 V 为其上的实函数

$$L = \frac{1}{2}\Delta + V \to \tilde{L} = \frac{1}{2}\Delta + \tilde{b}^h\nabla,$$

其中 h 为调和函数: $Lh = 0$, $h \neq 0$ 几乎处处成立. 这样, $L^2(\mathrm{d}x)$ 上的 L 等谱于 $L^2(\tilde{\mu}) := L^2(|h|^2\mathrm{d}x)$ 上的 $\widetilde{L}$.

现在考虑一般的微分算子. 设 ~~$a_{ij}, b_i, c, V: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, 并记~~ $a = (a_{ij})_{i,j=1}^d$, $b = (b_i)_{i=1}^d$. 定义 $\mathrm{d}\mu = \mathrm{e}^V\mathrm{d}x$ 及 $L = \nabla(a\nabla) + b\cdot\nabla - c$. 首先是可厄米判别准则.

定理 7[13] (陈木法, 李金玉, 2020 年) 考虑 Dirichlet 边界. 算子 L 关于 μ 可厄米当且仅当 $a^H = a$ 及

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}(b) = (\mathrm{Re}(a))(\nabla V),\\
&2\mathrm{Im}(c) = -\big((\nabla V)^* + \nabla^*\big)\big(\mathrm{Im}(a)\nabla V + \mathrm{Im}(b)\big).
\end{aligned}$$

其次是等谱微分算子.

定理 8[13] 用 $\mathscr{D}(L)$ 表示 L 在 $L^2(\mu)$ 中的定义域, 并设 h: $Lh = 0$, $h \neq 0$ 几乎处处成立. 则 $(L, \mathscr{D}(L))$ 与 $(\widetilde{L}, \mathscr{D}(\widetilde{L}))$ 等谱:

$$\begin{cases}\widetilde{L} = \nabla(a\nabla) + \tilde{b}\cdot\nabla,\\ \mathscr{D}(\widetilde{L}) = \big\{\tilde{f} \in L^2(\tilde{\mu}) : \tilde{f}h \in \mathscr{D}(L)\big\};\end{cases}$$

其中

$$\tilde{b} = b + 2\mathrm{Re}(a)\mathbf{1}_{[h\neq 0]}\frac{\nabla h}{h}, \quad \tilde{\mu} := |h|^2\mu.$$

文 [11, 13] 分别给出了复三对角矩阵和一维二阶复微分算子的谱离散判别准则. 显而易见, 此方向尚有大量工作等待完成.

5 结束语

本文将量子力学的基本物理单元从厄米拓展到可厄米 (矩阵或算子), 为观测 (谱) 提供了统一的标架 (生灭矩阵), 这些属量子力学的底层结构. 使用调和函数将带位势项的矩阵或算子的谱转化为不带位势项者, 这为研究带位势项的矩阵或算子的谱理论提供了新途径, 相应地产生了新算法 [12]. 简而言之, 本文提供了可能会有更多应用的量子力学的新架构、新谱论和新算法.

6 后记

许多朋友可能会感到奇怪, 为何笔者关心起远非本行的量子力学. 其实, 笔者几十年的工作有两条主线: 一是寻找刻画相变的数学工具 (由此进入特征值估计), 源于概率论与统计力学的交叉; 二是华罗庚经济最优化理论的随机模型. 前者可参见 [6–7], 后者可参见 [7, 第 10 章] 及其中所引文献. 就个人所知, Roland L'vovich Dobrushin 团队是国际上数学从公理化运动回归自然的开拓者 (20 世纪 60 年代中叶), 我一直非常敬佩他们的胆略. 在我们于统计力学 (着重于非平衡态) 研究方向做了 10 年之后 (1988 年冬), 当有机会首次访问他们的时候, 我忍不住当面请教他: 开始的时候是否学了许多统计力学. 他一听就笑了, 说: "不是的. 因为我们的目标是重新建立统计力学的数学基础, 所以不需要学很多统计力学. 当然, 辛钦的《统计力学的数学基础》小册子对我们帮助很大. 还有, 现在国际上已有不少物理学家也懂数学, 所以也给我们很大的帮助." 可能许多人不熟悉 Dobrushin, 但或许有不少人知道 Yakov Grigor'evich Sinaĭ, 他后来也加入此团队. 本人有幸两次 (1988 年和 1997 年) 在莫斯科大学演讲, 分别由他们俩人主持. 他们后来也都当选为美国科学院的外籍院士 (Dobrushin: 1993 年, Sinaĭ: 1997 年).

2020 年的阿贝尔奖 (Abel Prize) 使我联想到随机数学近些年所获得的重大奖项: 国际数学联合会 (IMU) 将首届应用数学高斯奖 (Carl Friedrich Gauss Prize)) 颁发给伊藤清 (Kiyoshi Itô, 2006 年); 阿贝尔奖先后三次颁发给本领域学者 Sathamangalam Ranga Iyengar Srinivasa Varadhan (2007 年), Ya. G. Sinaĭ (2014 年) 和 Hillel Furstenberg 与 Grigoriĭ Margulis (2020 年). 后两人分别于 1989 年和 2001 年当选美国科学院院士. 该奖至今共颁发了 18 次. 本领域学者占六分之一. 讲到这里, 我特别感激这五位中的前四位, 他们都曾帮过我. 同时, 不禁想起当年交往的同行中, 已有多位当选美国科学院院士. 这次在网上仔细查证了一下, 除上段所述的两位俄罗斯数学家之外, 在美国的竟还有 6 位之多: Varadhan 和他的好友 Daniel W. Stroock (我当年访美的导师) 于 1995 年当选; Rick Durrett (2007 年当选) 曾为我的两本英文专著写过书评, 并且 1987 年曾和我申报过美、中合作项目; Thomas M. Liggett (2008 年当选) 曾为我的第一本英文专著写过书评; 此外还有 Frank L. Spitzer (1981 年当选) 和 Harry Kesten (1983 年当选). 其中 Dobrushin 和 Spitzer 分别是俄、美两学派的领袖. Dobrushin 还和我合作申请了中俄合作项目 (1995 年申报; 1998–99 年执行). 上述 8 人中有 7 人访问过北京师范大学, 其中 Spitzer 于 1984 年、Dobrushin 于 1988 年分别进行了 45 天的访问, 仅有 Sinaĭ 未能成行. 前四位美国院士访问过我国多次. 我曾写过一篇 "感谢老师" 的文章, 发表于 "百年院庆感怀", 两文均可在我的个人主页中找到; 在专著 [6–7] 中还可找到我们之间交往合作的诸多例证. 这些文章追忆了本人在国内外许多老师和朋友们那里所受到的熏陶. 我对这些师友们感激不尽.

致谢 笔者以此题应邀在以下单位作过报告: 江苏师范大学 (2019 年 6 月), 北京师范大学

第十一届优秀大学生数学暑期夏令营 (2019 年 7 月), 中科院数学所 (2020 年 9 月). 笔者衷心感谢以上各单位的资助, 以及谢颖超、苗正科、刘伟、王恺顺、唐仲伟、许孝精和张平教授的邀请和热情接待. 作者还感谢本刊编辑的许多宝贵建议, 提升了本文的可读性.

参考文献

[1] Accardi, L., Lu, Y.G. and Volovich, I., Quantum Theory and Its Stochastic Limit, Berlin: Springer-Verlag, 2002.

[2] Aebi, R., Schrödinger Diffusion Processes, Basel: Birkhäuser Verlag, 1996.

[3] Born, M., Heisenberg, W. and Jordan, P., Zur Quantenmechanik, II, *Z. Physik*, 1926, 35: 557-615 (in German).

[4] Born, M. and Jordan, P., Zur Quantenmechanik, *Z. Physik*, 1925, 34: 858-888 (in German).

[5] Casado, C.M.M., A brief history of the mathematical equivalence between the two quantum mechanics, *Latin-Amer. J. Phys. Educ.*, 2008, 2(2): 152-155.

[6] Chen, M.-F., From Markov Chains to Nonequilibrium Particle Systems, 2nd Ed., Singapore: World Scientific, 2004.

[7] Chen, M.-F., Eigenvalues, Inequalities, and Ergodic Theory, Probability and Its Applications (New York), London: Springer-Verlag London, 2005.

[8] Chen, M.-F., Speed of stability for birth-death processes, *Front. Math. China*, 2010, 5(3): 379-515.

[9] Chen, M.-F., Criteria for discrete spectrum of 1D operators, *Commun. Math. Stat.*, 2014, 2(3/4): 279-309.

[10] Chen, M.-F., Hermitizable, isospectral complex matrices or differential operators, *Front. Math. China*, 2018, 13(6): 1267-1311.

[11] Chen, M.-F., On spectrum of Hermitizable tridiagonal matrices, *Front. Math. China*, 2020, 15(2): 285-303.

[12] Chen, M.-F., Jia, Z.G. and Pang, H.K., Computing top eigenpairs of Hermitizable matrix, *Front. Math. China*, 2021, 16(2): 345-379.

[13] Chen, M.-F. and Li, J.Y., Hermitizable, isospectral complex second-order differential operators, *Front. Math. China*, 2020, 15(5): 867-889.

[14] Chen, M.-F. and Li, Y.S., Development of powerful algorithm for maximal eigenpair, *Front. Math. China*, 2019, 14(3): 493-519.

[15] Chen, M.F. and Li, Y.S., Improved global algorithms for maximal eigenpair, *Front. Math. China*, 2019, 14(6): 1077-1116.

[16] Chen, M.-F. and Zhang, X., Isospectral operators, *Commun. Math. Stat.*, 2014, 2(1): 17-32.

[17] Dirac, P.A.M., The fundamental equations of quantum mechanics, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 1925, 109(752): 642-653.

[18] Dirac, P.A.M., The Principles of Quantum Mechanics, Oxford: Oxford Univ. Press, 1930.

[19] Eckart, C., Operator calculus and the solution of the equation of quantum dynamics, *Phys. Rev.*, 1926, 28(4): 711-726.

[20] Fukushima, M. and Okada, M., On Dirichlet forms for plurisubharmonic functions, *Acta Math.*, 1987, 159(3/4): 171-213.

[21] Heisenberg, W., Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen, *Z. Physik*, 1925, 33: 879-893 (in German).

[22] Jordan, T.F., Quantum Mechanics in Simple Matrix Form, New York: John Wiley & Sons, 1986.

[23] Kolokoltsov, V.N., Markov Processes, Semigroups and Generators, De Gruyter Studies in Mathematics, Book 38, Berlin: Walter de Gruyter, 2011.

[24] Laloë, F., Do We Really Understand Quantum Mechanics? Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2012.

[25] Lawler, G.F., Conformally Invariant Processes in the Plane, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 114, Providence, RI: AMS, 2005.

[26] Ludyk, G., Quantum Mechanics in Matrix Form, Cham: Springer, 2018.

[27] Maslov, V.P., Complex Markov Chains and Functional Feynman Integral, Moscow: Nauka, 1976 (in Russian).

[28] McCrimmon, K., A Taste of Jordan Algebras, New York: Springer-Verlag, 2004.

[29] Moiseyev, N., Non-Hermitian Quantum Mechanics, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2011.

[30] Nagasawa, M., Schrödinger Equations and Diffusion Theory, Monographs in Mathematics, Vol. 86, Basel: Birkhäuser Verlag, 1993.

[31] Nagasawa, M., Stochastic Processes in Quantum Physics, Monographs in Mathematics, Vol. 94, Basel: Birkhäuser Verlag, 2000.

[32] Parthasarathy, K.R., An Introduction to Quantum Stochastic Calculus, Monographs in Mathematics, Vol. 85, Basel: Birkhäuser Verlag, 1992.

[33] Schrödinger, E., An undulatory theory of the mechanics of atoms and molecules, *Phys. Rev.*, 1926, 28(6): 1049-1070.

[34] Schrödinger, E., Über das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinen, *Ann. Physik*, 1926, 384(8): 734-756 (in German).

[35] Schrödinger, E., Über die Umkehrung der Naturgesetze, In: Sitzungsberichte der Preussischen Akad. der Wissenschaften, Physikalisch-Mathematische Klasse, IX, Berlin: Walter de Gruyter, 1931, 144-153 (in German).

[36] Schrödinger, E., Sur la théorie relativiste de l'électron et l'interprétation de la mécanique quantique, *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1932, 2(4): 269-310 (in French).

[37] Siddiqui, S., Quantum Mechanics: A Simplified Approach, Boca Raton, FL: CRC Press, 2019.

[38] Van der Waerden, B.L., Sources of Quantum Mechanics, New York: Dover Publications, 1968.

[39] Von Neumann, J., Mathematical Foundations of Quantum Mechanics, Translated by Robert T. Beyer, Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1955.

A New Mathematical Perspective of Quantum Mechanics

CHEN Mu-Fa

(*1. Research Institute of Mathematical Science, Jiangsu Normal University, Xuzhou, Jiangsu, 221116, P. R. China; 2. School of Mathematical Sciences, Key Laboratory of Mathematics and Complex Systems* (*Ministry of Education*), *Beijing Normal University, Beijing, 100875, P. R. China*)

Abstract: In the study of the algorithm, we encounter the following problems: besides the real symmetric matrices or complex Hermite ones, what is the larger class of matrices having real spectrum? The latter is one of the two characteristics of quantum mechanics; the other one is the volatility. The well-known "centennial war" is about whether the solution of wave equation exists "randomness". We will introduce the explorations of the past few years with an unexpected result. It should be noted that many branches of modern mathematics originate from quantum mechanics. It can be imagined that the new perspective touches on more than just a few small topics.

Keywords: statistical physics; quantum mechanics; Hermitizable matrix, new spectral theory