

生灭矩阵重构三弦乐谱*

陈木法

(北京师范大学数学科学学院; 北京师范大学数学与复杂系统教育部重点实验室, 100875)

摘要: 三弦乐谱可由三对角复矩阵生成, 人们听到的声音由其谱决定, 自然要求此矩阵有实谱. 如同量子力学, 模型描述是复算子, 可观测量是实的. 换言之, 所述的三对角复矩阵应是关于某个测度的复内积空间上的自共轭算子. 熟知, 生灭 Q 矩阵可配称, 自然就是自共轭的. 我们将要介绍最新的一个代表性成果: 对于相当广泛的自共轭三对角复矩阵, 总可以构造出一个生灭 Q 矩阵, 使得两者等谱(简单地讲, 两者有完全相同的特征值). 这个问题浅显易懂, 但我们曾在不同时期, 从概率论、统计物理和计算数学三个不同的角度研究过, 经历了漫长的求索岁月.

本文是根据作者在“International Conference on Probability Theory and Its Applications”(湖南文理学院, 2018/7)的报告整理而成. 共分三部分: 1) 生灭过程的新应用; 2) 从(非对角线元素非负的)实可配称矩阵到复可配称矩阵; 3) 此课题的来源(计算)及其判别准则的应用(统计物理及量子力学).

关键词: 复矩阵; 可配称; 复可配称; 生灭矩阵; 统计物理; 量子力学.

中图分类号: O211.62; O411.1; O177.7

§1. 引言

让我们从有限或可数集 $E = \{k \in \mathbb{Z}_+ : 0 \leq k < N + 1\}$ ($N \leq \infty$) 上的三对角矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -c_0 & b_0 & & & 0 \\ a_1 & -c_1 & b_1 & & \\ & a_2 & -c_2 & b_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & a_N & -c_N \end{pmatrix}, \quad (1)$$

谈起, 它由三列数 (a_k) , $(-c_k)$ 和 (b_k) 生成, 因此, 有时我们将它简记成 $A \sim (a_k, -c_k, b_k)$. 特别地, 如果 (a_k) 和 (b_k) 均为正; 而且当 $k < N$ 时, $c_k = a_k + b_k$, 而当 $N < \infty$ 时, 还有 $c_N \geq a_N$, 则称之为生灭 Q 矩阵. 以这种矩阵为无穷小生成元的随机过程就称为生灭过程. 自此之后, 凡马尔可夫链的无穷小生成元, 均用 Q (而不用 A) 表之. 生灭过程是一类最简单和实用的随机过程, 是我们许多人学习和研究的起点和根据地. 很庆幸我们能够在这次会议上跟大家交流生灭过程的最新(不足半年)应用, 因为这类随机过程是此次会议的主持人之一——杨向群教授的主要工作领域(我所查到的他的论著中, 有 12 篇的标题都含有“生灭过

*本项目获自然科学基金(项目编号: 11771046), 教育部双一流大学建设项目和江苏省高校优势学科建设工程项目资助.

程”)。他是当今国际上对生灭过程研究作出最杰出贡献的概率学家之一。毋需多言, 杨老师的论著对笔者有很大影响。即便挂一漏万, 在这里也要列出其中的三部 [20, 21, 22]。

如本文标题所示, 我们的新应用涉及三弦, 那是我国的一种传统弹拨乐器(见图 1), 起源于秦朝(公元前 214 年)。至今在我国南方(又称南音三弦)、台湾、日本等地广泛流行。



图 1. 三弦与彝族三弦舞

早在 18 世纪人们就知道, 音乐有很好的数学描述, 例如 Fourier 级数. 因此, 三弦乐谱可用复三对角矩阵描述. 音乐的谱是可观测量, 应当是实的. 这与量子力学相似: 算子应是复的以反映波动性, 但谱是物理观测量, 应当是实的. 这样, 自然选用 Hermite 三对角矩阵(共轭对称). 但我们这里使用远为广泛的复可配称(Hermitizable)三对角矩阵. 除去某对 a_{k+1} 和 b_k 同时为零的可分块的情形而外, 一个复三对角矩阵 $A \sim (a_k, -c_k, b_k)$ 复可配称的充要条件是下述两条同时成立:

- (1) (c_k) 为实;
- (2) 对一切 $k: 0 \leq k < N$, $a_{k+1}b_k > 0$, 或等价地 $b_k/\bar{a}_{k+1} > 0$.

随后, 我们将更详细地介绍复可配称性及其判别准则. 这里, 我们先陈述本文的第一个主要目标:

每一复可配称三对角阵(当 $N = \infty$ 时需轻微条件) A 的谱可用一个生灭 Q 矩阵的谱表出. 这正是本文标题的含义, 也是下一节的主题. 在 §3 节中, 我们讨论一般复矩阵的可配称性及其判别准则. 在 §4 节中, 我们先介绍问题的来源: 矩阵的特征值计算. 因为复的特征值给计算带来很大麻烦, 我们力图寻找可操作的尽可能大的具有实谱的矩阵类. 然后介绍复可配称性的两个应用, 一是 30 多年前应用于统计物理, 二是将来可能应用于量子力学.

§2. 生灭过程的新应用

我们先给出复可配称三对角阵 A 的一条重要性质. 定义

$$\mu_0 = 1, \quad \mu_n = \mu_{n-1} \frac{b_{n-1}}{\bar{a}_n}, \quad 1 \leq n < N+1. \quad (2)$$

由可配称性假定, $b_{n-1}/\bar{a}_n > 0$, 可见 (μ_n) 为正. 由定义容易看出如下的复可配称性:

$$\mu_n b_n = \mu_{n+1} \bar{a}_{n+1}.$$

当 $\mu \equiv 1$ 时, 这退化为 Hermite 性质(共轭对称性). 对于生灭 Q 矩阵, 前者称为可配称性, 后者是通常的对称性. 当然, 在讨论生灭过程时, 常假定 $N = \infty$. 此时若 Q 矩阵对称, 则无平稳分布, 过程的极限为零. 对于大多数应用而言, 需有平稳分布. 换言之, 若只处理对称情形, 生灭过程的应用就极为有限, 就不会在随机过程理论中占有那么重要的地位. 由此可以看出, 从对称到可配称有很大的距离. 无疑地, 从 Hermite 到复可配称也有相当的距离.

对于一般的复矩阵 $A = (a_{ij})$, 它称为复可配称的(Hermitizable): 如存在 $(\mu_i > 0)$ 使得对于一切 i, j , 有 $\mu_i a_{ij} = \mu_j \bar{a}_{ji}$. 复矩阵的可配称性等价于它作为算子, 在 $L^2(\mu)$ 上自伴, 从而有实谱. 留意自伴算子是泛函分析的重要论题, 但那里总假定测度 μ 是给定的, 其构造似乎未认真研究过.

今讨论与复可配称三对角阵 $A = (a_{ij})$ 等谱的生灭 Q 矩阵的构造. 为此, 需要如下条件:

$$c_k \geq |a_k| + |b_k|, \quad k \in E. \quad (3)$$

命

$$m = \sup_{k \in E} (-c_k + |a_k| + |b_k|)^+, \quad (4)$$

贯穿全文, 约定 $a_0 = 0$. 如 $N < \infty$, 则此处还置 $b_N = 0$. 当 $m < \infty$ 时, 以 $A^{(m)} := A - mI$ (其中 I 为单位矩阵) 代替 A , 条件 (3) 成立. 当 $m = \infty$ 时, 也许可使用某种逼近程序.

定义 1 (等谱生灭 Q 矩阵的构造) 假定条件 (3) 成立, 并记 $u_k = a_k b_{k-1} (> 0)$. 则定义生灭 Q 矩阵 $Q \sim (\tilde{a}_k, -\tilde{c}_k, \tilde{b}_k)$ 如下.

(1) 命 $\tilde{c}_k = c_k, k \in E$.

(2) 命 $\tilde{b}_0 = c_0 > 0, \tilde{b}_k = c_k - u_k / \tilde{b}_{k-1}$. 详言之,

$$\tilde{b}_k = c_k - \frac{u_k}{c_{k-1} - \frac{u_{k-1}}{c_{k-2} - \frac{u_{k-2}}{\dots c_2 - \frac{u_2}{c_1 - \frac{u_1}{c_0}}}}, \quad 0 \leq k < N.$$

(3) 命 $\tilde{a}_k = c_k - \tilde{b}_k$, $1 \leq k < N$; 命 $\tilde{a}_N = u_N / \tilde{b}_{N-1}$ 如 $N < \infty$.

定理 2 (等谱定理) 定义 1 中所定义的 Q 矩阵 $Q \sim (\tilde{a}_k, -\tilde{c}_k, \tilde{b}_k)$ 是生灭型:

$\tilde{a}_k > 0$, $1 \leq k < N+1$; $\tilde{b}_k > 0$, $0 \leq k < N$; $\tilde{c}_k = \tilde{a}_k + \tilde{b}_k$, $0 \leq k < N$; $\tilde{c}_N \geq \tilde{a}_N$ if $N < \infty$.

它与预先给定的复可配称三对角阵 $A = (a_{ij})$ 等谱.

应当说, 定理 2 来自不易, 经历了漫长的岁月 [4, 9, 5, 7]. 显然, 两个矩阵所包含的变量的个数不对等, 所得结论在直观上并不显然. 定理现在的新证明已经不难. 此处, 我们仅解释两个要点. 其一是 \tilde{b}_k 和 \tilde{a}_k 的正性. 作为例证, 我们考虑 $c_k = |a_k| + |b_k|$ 的特殊情形. 留意 $u_k = |a_k||b_{k-1}| > 0$, 依次可推出

$$\begin{aligned} \tilde{b}_0 &= c_0 = |b_0| > 0, \\ \tilde{b}_1 &= c_1 - \frac{|a_1 b_0|}{\tilde{b}_0} = c_1 - \frac{|a_1 b_0|}{|b_0|} = |b_1| > 0, \\ \tilde{b}_2 &= c_2 - \frac{|a_2 b_1|}{\tilde{b}_1} = c_2 - \frac{|a_2 b_1|}{|b_1|} = |b_2| > 0, \\ &\dots\dots \\ \tilde{a}_N &= \frac{|a_N b_{N-1}|}{\tilde{b}_{N-1}} = \frac{|a_N b_{N-1}|}{|b_{N-1}|} = |a_N| > 0, \quad \text{倘若 } N < \infty. \end{aligned}$$

为在 (3) 式的一般条件下完成 $(\tilde{a}_k, \tilde{b}_k)$ 正性的证明, 还需两步. (a) 证明 (\tilde{b}_k) 关于向量的偏序对每一个变元 c_k 单调非减, 留心 (u_k) 与 (c_k) 无关, 所需结论可用归纳法证之. (b) (\tilde{a}_k) 的正性并不能从恒等式 $c_k = \tilde{a}_k + \tilde{b}_k$ 导出. 而是源自我们的变换 $(a_k, b_k) \rightarrow (\tilde{a}_k, \tilde{b}_k)$ 有一种难得的不变性: $\tilde{a}_k \tilde{b}_{k-1} = a_k b_{k-1} = u_k > 0$ (见 [7; (6)]).

其二是说明等谱性质的准确含义. 由 (2), 我们已算出 A 的配称测度 (μ_k) , 同样有 Q 的配称测度 $(\tilde{\mu}_k)$. 于是有两个复 L^2 空间: $L^2(E, \mu)$ 和 $L^2(E, \tilde{\mu})$. 今定义 E 上的一个函数 h :

$$h_0 = 1, \quad h_{k+1} = h_k \frac{\tilde{b}_k}{b_k}, \quad 0 \leq k < N.$$

再定义从 $L^2(E, \mu)$ 到 $L^2(E, \tilde{\mu})$ 的映射 $f \rightarrow \tilde{f}: \tilde{f} = f/h$. 那么, 此乃两空间之间的等距映射, 而且保持相应的二次型的值不变:

$$\begin{aligned} (Af, f)_\mu &= (Q\tilde{f}, \tilde{f})_{\tilde{\mu}}, \\ \mathcal{D}(A) &:= \{f \in L^2(E, \mu) : f/h \in \mathcal{D}(Q)\}. \end{aligned}$$

最后一行表示算子 A 的定义域是由 Q 的定义域诱导出来的. 映射的等距性及二次型等值构成了所述的等谱的精确含义. 特别地, 如谱离散, 则意味着两算子有完全相同的特征值, 记为 $\{\lambda_j\}$. 相应的特征函数分别记为 $\{g_j\}$ 和 $\{\tilde{g}_j\}$, 后者应为实值. 于是, 由等距性得出

$$\|g_j\|_\mu = \|\tilde{g}_j\|_{\tilde{\mu}}, \quad \text{即} \quad \int_E |g_j|^2 d\mu = \int_E \tilde{g}_j^2 d\tilde{\mu}.$$

更多细节, 请参考 [7].

注意对于生灭过程, 关于它的包括离散谱在内的众多稳定性, 我们有相当完整的理论, 详见 [6] 及其中所引文献. 由上述等谱定理, 我们可将 [6] 中成果立即搬到由 A 所生成的复半群(复动力系统) $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ 上. 这正是我们所说的生灭过程的新应用. 须知这项应用决非平凡, 因为关于生灭过程的研究成果包含了很强的概率直觉, 而且是经过几十年的努力才完成的. 很难想象, 不使用生灭过程的工具, 能够对这类复动力系统得出如同 [6] 那样完整的一套理论. 复情形本身就比实情形艰难得多, 在随后的 §4 中还将看到这类麻烦.

§3. 从(非对角线元素非负的)实可配称矩阵到复可配称矩阵

本节开始讨论一般实或复矩阵 $A = (a_{ij})$ 的可配称问题, 三对角阵是其简单特例. 称实矩阵 A (实)可配称 (symmetrizable), 如

$$\exists(\mu_k > 0): \text{使得 } \mu_i a_{ij} = \mu_j a_{ji}, \quad i, j \in E.$$

称复矩阵 A 复可配称 (complex symmetrizable or Hermitizable), 如

$$\exists(\mu_k > 0): \text{使得 } \mu_i a_{ij} = \mu_j \bar{a}_{ji}, \quad i, j \in E.$$

由定义立知, 当 A 复可配称时, 对每 $i \in E$, a_{ii} 为实. 同时得到矩阵 $A = (a_{ij})$ 复可配称的必要条件:

- 零同性: 对于任意的 i, j , $a_{ij} = 0 \iff a_{ji} = 0$.
- 正值性: 如 $a_{ji} \neq 0$, 则 $a_{ij}/\bar{a}_{ji} > 0$ (等价地, $a_{ij}a_{ji} > 0$).

复可配称的定义仅当 $a_{ij} \neq 0$ 才有意思, 否则等式的两边为零. 此时以 $i \rightarrow j$ 示之. 这是一步之路. 让我们多走几步:

$$i_0 \rightarrow i_1 \rightarrow \cdots \rightarrow i_n.$$

这称为从 i_0 到 i_n 的一条路. 首先, 因为 $i_0 \rightarrow i_1$, 我们有

$$\mu_{i_0} \frac{a_{i_0 i_1}}{\bar{a}_{i_1 i_0}} = \mu_{i_1}.$$

其次, 因为 $i_1 \rightarrow i_2$, 可在上式同边同乘以分数 $a_{i_1 i_2}/\bar{a}_{i_2 i_1}$, 然后再用一次上式, 得出

$$\mu_{i_0} \frac{a_{i_0 i_1}}{\bar{a}_{i_1 i_0}} \cdot \frac{a_{i_1 i_2}}{\bar{a}_{i_2 i_1}} = \mu_{i_1} \frac{a_{i_1 i_2}}{\bar{a}_{i_2 i_1}} = \mu_{i_2}.$$

如此继续, 得到

$$\mu_{i_0} \frac{a_{i_0 i_1}}{\bar{a}_{i_1 i_0}} \frac{a_{i_1 i_2}}{\bar{a}_{i_2 i_1}} \cdots \frac{a_{i_{n-1} i_n}}{\bar{a}_{i_n i_{n-1}}} = \mu_{i_n}. \quad (5)$$

事实上, 这个简单的三步论证, 导出了非常重要的等式 (5). 若将 i_0 视为参考点, 并设 $\mu_{i_0} = 1$, 则此式给出了配称分布 (μ_k) 的算法. 并且得出配称分布的计算与所选择的路无关—此即是“路经无关性”(这是我们后来进一步发展的基石). 其次, 若取 $i_n = i_0$, 则得到下述著名结果.

定理 3 (Kolmogorov 圈形定理 (1936)) 对每一闭路 $i_0 \rightarrow i_1 \rightarrow \cdots \rightarrow i_{n-1} \rightarrow i_n = i_0$, 都有

$$a_{i_0 i_1} a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_{n-1} i_0} = \bar{a}_{i_0 i_{n-1}} \bar{a}_{i_{n-1} i_{n-2}} \cdots \bar{a}_{i_1 i_0}.$$

此定理源于文 [14], 处理的是离散时间马尔可夫链的转移概率矩阵. 如同文 [14] 中所指出的, 问题来源于 Schrödinger [17] (正如 [2] 所述, 文 [17] 融合了 Schrödinger 一生中的主要兴趣: 统计力学与量子力学解释. 因此文 [17] 当然含有量子力学的内蕴). 对于连续时间马尔可夫链 Q 矩阵可配称的类似结果, 已有几本书里作了介绍, 例如 [12, 1]. 应当说, [1; 第 233 至 239 页] 中的许多材料均取自 [10]. 那里的 weakly symmetrizable 与 symmetrizable 后来分别改为 symmetrizable 与 reversible, 也不再假定过程不中断, 以便跟国际上较通行的用法一致. 当年, 由于条件所限, 在完成文 [16, 10] 期间, 根本不可能知道书 [12, 1] 中所引用的文 [14] 和 [13]. 是为憾! 定理 3 的充分性要求验证全部闭路, 这并不实际. 对于无限集, 可能存在无穷多条闭路. 我们早年的进步就是将它简化为“非往返的最小闭路”(见 侯振挺与陈 [16, 10], 这对于后续工作有根本性影响).

定理 4 (陈 [7]) 复矩阵 $A = (a_{ij})$ 复可配称的充要条件是下述两条件同时成立.

- (1) 对于任意的 i, j , 或者 a_{ij} 与 a_{ji} 同时为零, 或者 $a_{ij} a_{ji} > 0$.
- (2) 对非往返的最小闭路, 圈形条件满足.

推论 5 三对角复矩阵 $A \sim (a_k, -c_k, b_k)$ 复可配称的充要条件是下述两条件同时成立.

- (1) (c_k) 为实的.
- (2) 或 a_{i+1} 和 b_i 同时为零, 或 $a_{i+1} b_i > 0$.

我们注意, 若 a_{i+1} 和 b_i 同时为零, 则此矩阵可分块处理, 故常省略此条件. 这就是在 §1 中所陈述的复三对角矩阵复可配称性的判别准则.

在后续文章中, 我们将把 §1 中的主要结论拓广为:

可用生灭 Q 矩阵重构每一复可配称矩阵的谱.

即排除“三对角”条件.

关于复可配称矩阵(算子)的重要性和应用, 留待下节讨论.

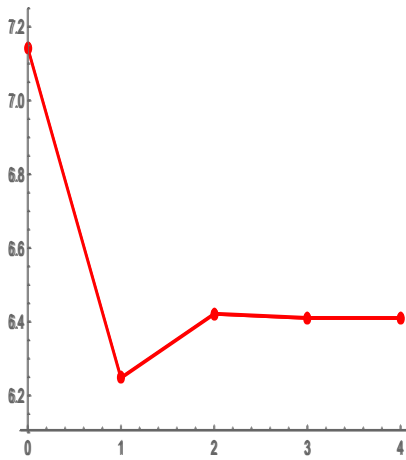


图 2 特征值的逼近

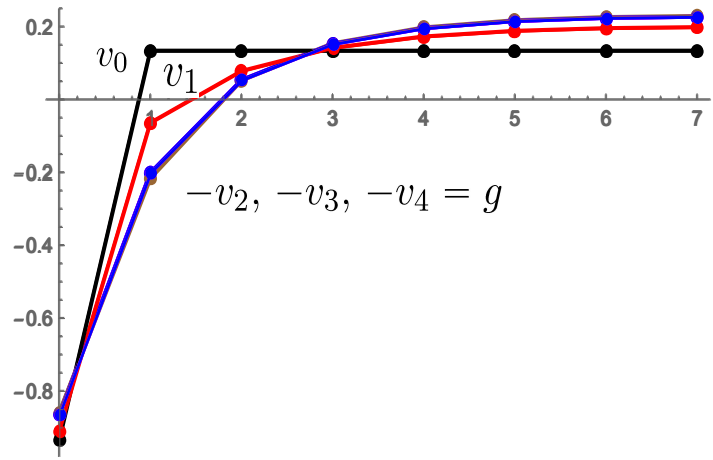


图 3 特征向量的逼近

结果特征值的逼近很快(见图 2):

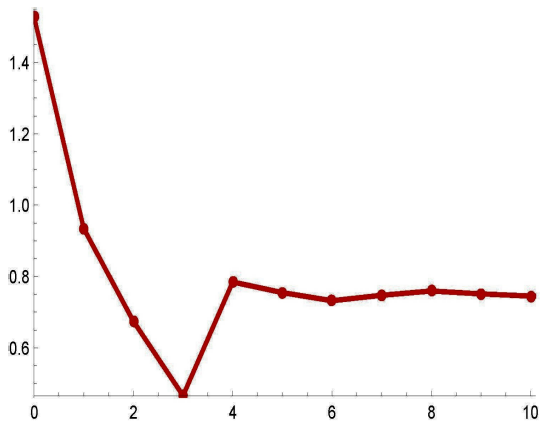
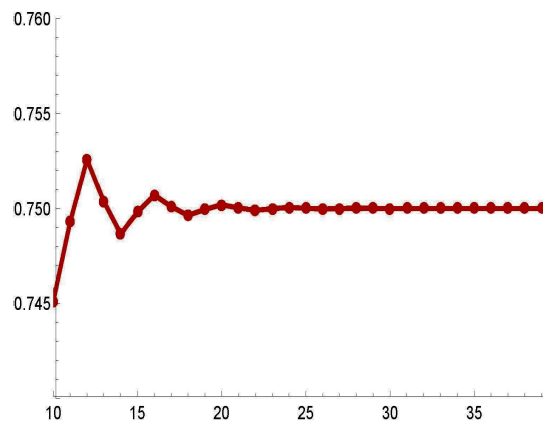
$$\{z_k\}_0^4: \quad 50/7 = \lambda_0, \quad 6.24817, \quad 6.42141, \quad 6.41, \quad 6.40994 = \lambda_1.$$

特征向量的逼近也很快: 初值 v_0 和一步迭代后的 v_1 与随后的 v_2, v_3, v_4 有明显差别, 但后三个几乎重叠(见图 3).

再看复共轭情形. 命

$$Q = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

再命 $A = Q + 2I$. 那么, A 有特征值: $\lambda_0 = 2$, $\lambda_{1\pm} = 0.75 \pm 0.661438i$. 除最大者之外, 另两个特征值为共轭复数. 我们关心的其实部: 0.75. 图 4 和图 5 是特征值实部的逼近. 迭代 39 步才得到 0.75 (精确到 6 位).

图 4 $\operatorname{Re}(z_n): n = 0, \dots, 10$ 图 5 $\operatorname{Re}(z_n): n = 10, \dots, 39$

更甚者, $\{v_n\}$ 根本不收敛, 而是在两(不相关)向量之间循环:

$$(.707107, -4.23422 \cdot 10^{-7}, -.707107)^*, \quad (.408248, -.816497, .498248)^*.$$

下面给出更多测试. 命

$$B = \begin{pmatrix} 4+3i & & & & & & \\ & 4-3i & & & & & 0 \\ & & 3+2i & & & & \\ & & & 3-2i & & & \\ & & & & 2+i & & \\ 0 & & & & & 2-i & \\ & & & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

取 $\lambda = 5 + i$. 它的实部最大, 并且是单特征值. 再命 $A = P^{-1}BP$, 其中

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3+i & 2 & 3 & 1 & 3+i \\ 5 & 4 & 2+i & 4 & 5 & 1 & i \\ 3-i & 2-i & 5 & 1+i & 2 & 1 & 3+i \\ 2 & 4 & 1-i & 2 & i & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & -i & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

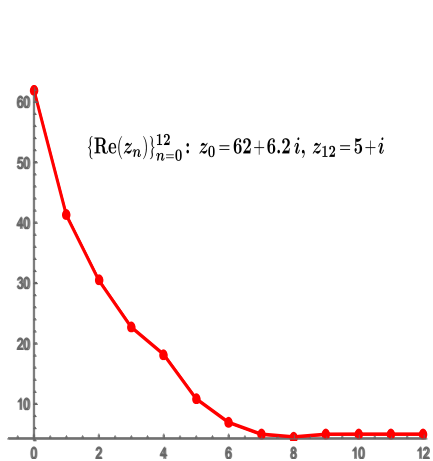


图 6 特征值实部的逼近

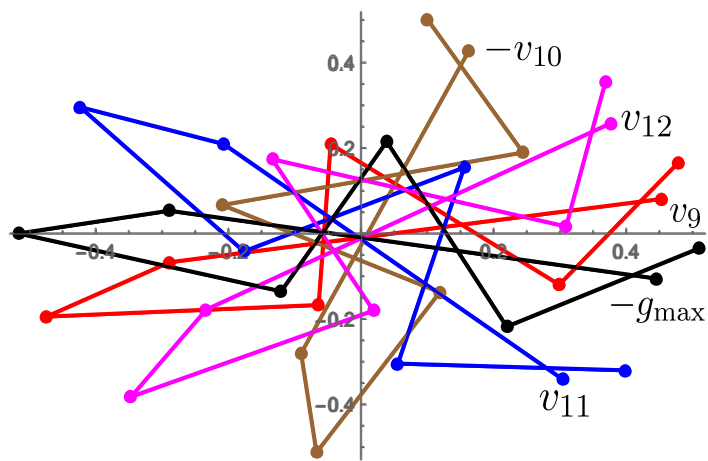


图 7 特征向量的逼近

此时, 迭代近似特征值 $\{z_n\}$ 实部的收敛性不错(见图 6). 但相应近似特征向量 $\{v_n\}_{n=9}^{12}$ 的收敛性就完全看不出来了(见图 7). 图中标出了每个向量的起点(它和终点都位于实轴的正

半轴). 每个向量由 7 个点连接而成. 正因为遇到这些困难, 我们才转去研究: 何时一个复矩阵有实谱? 进而找到复称矩阵的可配称判别准则. 现在回过来看, 这个 $\{v_n\}_{n=9}^{12}$ 的收敛性还是对的. 不妨想一想! 答案是: 因为在复情形, 特征向量可以相差一个复数. 而 v_{12} 和 $-g_{\max}$ 仅相差一个形如 $e^{i\theta}$ 的复因子, 它只是一个旋转. 在图 7 上, 容易看出这个旋转. 由此看出复系统带来 $\{v_n\}_{n=9}^{12}$ 的波动性.

2) 对统计物理的应用

40 多年前, 部分数学家离开公理化路线, 回归自然. 开始探索统计力学的数学基础, 形成随机场的概率与统计物理的交叉学科. 当年, 我们所遇到的一个基本问题是如何区分经典统计物理的平衡态与当年刚刚兴起的非平衡态统计物理. 十分幸运的是, 与侯振挺老师一起, 我们找到了可配称的新工具. 虽然开始阶段, 仅限于可数状态空间, 然而这却是我们走向无穷维不可数空间的基石. 简单地说, 无穷乘积空间的局部, 常是可数集. 基于这些想法, 我们完成了一批论文. 例如严士健、陈 & 丁万鼎 (1982a, b), 唐守正 (1982), 李世取 (1983), 曾文曲等. 详见 [3; Parts III & IV] 及其参考文献.

例如, 考虑自旋空间 $\{-1, +1\}$. 系统的状态空间是 $E = \{-1, +1\}^{\mathbb{Z}^d}$. 不妨限于平面上的格点集 \mathbb{Z}^2 . 系统的组态(想象为一张图片) $x = (x_u) \in E$ 在位置 $u \in \mathbb{Z}^2$ 上有两种状态 $x_u = \pm 1$. 我们用 ${}_u x$ 表示从图片 x 变过来的图片, 它跟组态 x 仅在 u 处发生自旋: $({}_u x)_u = \pm x_u$, 而在其它的位置 $v \neq u$ 上, 它的值不变: $({}_u x)_v = x_v$. 现在, 我们用 $c(u, x) > 0$ 表示从图片 x 跳到图片 ${}_u x$ 的速率 (rate). 我们以此代替马尔可夫链中从一点 i 跳到另一点 j 的描述: $i \rightarrow j$, 速率为 q_{ij} (见图 8). 现在, 任意取定两个位置 u 和 v , 那么, 图片 x 在这两个位置上轮流自旋, 就构成了一条四边形闭路(见图 9). 沿着这个四边形的顺时针方向的四

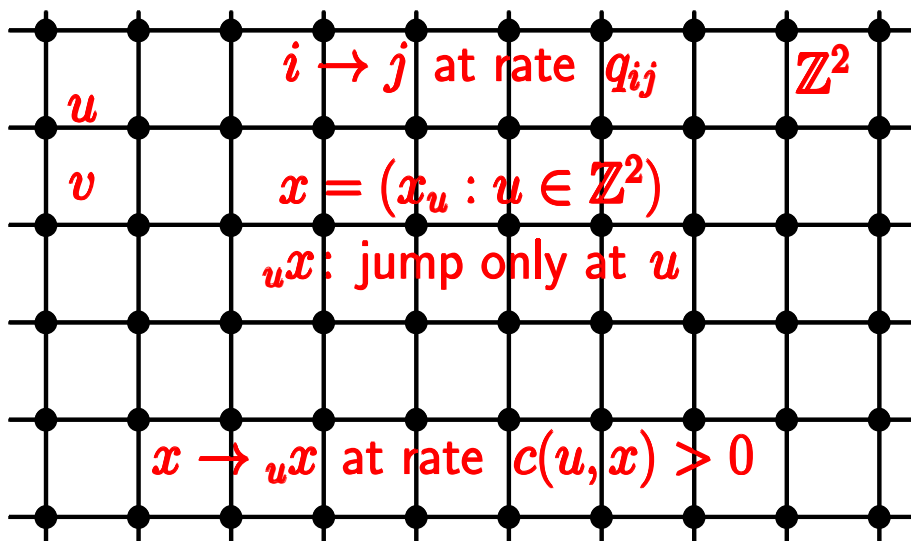


图 8 Ising 模型的演化

个速率的乘积应当等于逆时针方向的四个速率的乘积, 此即是上述可配称性(相应于平稳态统计物理)的圈形条件.

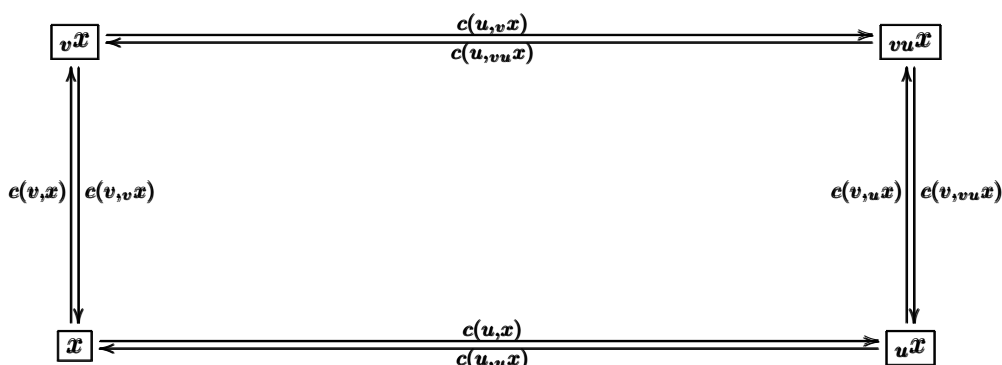


图 9 自旋系统的四边形条件

定理 6 ([3; 定理 11.2 (1)]) 以有限集 S 代替 \mathbb{Z}^d . 则此自旋系统可配称(即属平衡态)当且仅当下述 四边形条件成立

$$c(u, x)c(v, ux)c(u, uvx)c(v, vx) = c(v, x)c(u, vx)c(v, vx)c(u, ux),$$

$$u, v \in S, \quad x = (x_u : u \in S).$$

结论对于 \mathbb{Z}^d 也对, 此时闭路有无穷多.

3) 应用于量子力学的可能性

众所周知, 量子力学可分为矩阵力学和波动力学两部分. 其共性为波、粒两重性. 算子是复的, 但作为可观察量, 谱必须是实的, 对应的特征函数(谱函数)却必定为复的. 这就说明在矩阵力学里, 使用 Hermite 矩阵的天然合理性.

须知 Werner Karl Heisenberg (获 1932 年 Nobel 奖) 的最初发现只是用列表处理, 随后才获知那是数学家所做的矩阵乘法. 他的论文及与 Max Born 和 Pascual Jordan 合作或独立于 1925 年发表的三篇论文, 构成了后来被称为矩阵力学的奠基作. 我们这里所讲的复可配称矩阵, 拥有与 Hermite 矩阵完全相同的实谱、复算子这两大特征, 可见应当会有点用处. 从前面关于对称生灭矩阵和一般(可配称)生灭矩阵的讨论, 足以说明从 Hermite 到 Hermitizable 有着很大的距离. 也许, Hermite 有均匀介质的味道, 倘若如此, 那么 Hermitizable 对非均匀介质应当有用.

波动力学是 Erwin Schrödinger 于 1926 引进的(他因此与 Paul Adrien Maurice Dirac 一起获 1933 年 Nobel 奖). 在很长的历史时期, 因矩阵的谱难于计算, 使得矩阵力学难于发展. 不如以微分算子所表述的波动方程相对容易处理, 波动力学逐渐成为了量子力学的主线. 其实, 早在 1926 年, Schrödinger 就从物理上证明了两种力学等价. 稍后, John von Neumann (1932) [19] 给出了更为严格的数学证明.

近些年来, 随着计算机科学的突飞猛进和符号计算软件的逐步成熟, 矩阵力学有点大梦初醒, 参见 [11, 15, 18, 19]. 其实, 在真正计算时, 微分算子总要离散化, “波动”方程就回到“矩阵”方程. 就数学的整体而言, “连续”与“离散”本是亲姐妹, 一家人.

致谢 值此杨向群教授 80 华诞之际, 仅以此拙文感谢杨老师几十年来的教导、支持和帮助, 并祝杨老师健康长寿.

参 考 文 献

- [1] Anderson, W.J. *Continuous-Time Markov Chains: An Applications-Oriented Approach* [M]. Springer, New York, 1991
- [2] Bergmann, O. A quantum mechanical version of the paper by E. Schrödinger “Über die Umkehrung der Naturgesetze” [J]. *Foundations of Physics* 18(3)(1988), 373–378
- [3] Chen, M.F. (2004). *From Markov Chains to Non-Equilibrium Particle Systems* [M]. World Scientific, Singapore, 2nd Ed. (1st Ed., 1992).
- [4] Chen, M.F. (2010). Speed of stability for birth–death processes [J]. *Front Math China*, 5: 379–515.
- [5] Chen, M.F. (2014). Criteria for discrete spectrum of 1D operators [J]. *Commu. Math. Stat.* 2, 279–309.
- [6] Chen, M.F. Unified speed estimation of various stabilities [J]. *Chin. J. Appl. Prob. Stat.* 32(1) (2016), 1–22
- [7] Chen, M.F. Hermitizable, isospectral complex matrices or differential operators [J]. *Front. Math. China* (2018a),
- [8] Chen, M.F. Computing (sub-)maximal real part of eigenvalues [J]. 2018b. Preprint
- [9] Chen, M.F. and Zhang, X. (2014). *Isospectral operators* [J]. *Commu Math Stat* 2, 17–32.
- [10] Hou, Z.T. and Chen, M.F. Markov processes and field theory (Abstract) [J]. *Kuoxue Tongbao* 25(10)(1980): 807–811. Complete version appeared in [16; pages 194–242](1979).
- [11] Jordan, T.F. *Quantum Mechanics in Simple Matrix Form* [M]. Wiley. Reprint Dover Publ Inc, 2005.
- [12] Kelly, F.P. *Reversibility and Stochastic Networks* [M]. Wiley, New York. 1979.
- [13] Kendall, D.G. Unitary dilations of one-parameter semigroups of Markov transition operators, and the corresponding integral representations for Markov processes with a countable infinity of states [J]. *Proc. London Math. Soc.* 9(3)(1959): 417 – 431.
- [14] Kolmogorov, A.N. Zur Theorie der Markoffschen Ketten [J]. *Math. Ann.* (1936), 155–160. English translation: On the theory of Markov chains [M]. Article 21 in “*Selected Works of A.N. Kolmogorov*”, Vol. II: Probability Theory and Mathematical Statistics, 182–187, edited by A.N. Shirayev. Nauka, Moscow 1986. Translated by G. Undquist. Springer 1992.
- [15] Ludyk, G. *Quantum Mechanics in Matrix Form* (undergraduate lecture notes in physics) [M]. Cham, Switzerland: Springer (2018).
- [16] 钱敏, 侯振挺等. 可逆马尔科夫过程 [M]. 长沙: 湖南科学技术出版社 (1979).
- [17] Schrödinger, E. Über die Umkehrung der Naturgesetze [J]. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl.*, 12 März (1931). 144–153.
- [18] Steeb, W.H. & Hardy, Y. *Quantum Mechanics Using Computer Algebra: Includes Sample Programs in C++, SymbolicC++, Maxima, Maple, and Mathematica* [M]. 2nd ed. Singapore: World Sci. (2010).
- [19] von Neumann, J. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* [M]. Julius Springer 1932 (German edition); Princeton Univ. Press, 1955, 2018 (English edition).

- [20] 王梓坤和杨向群. 生灭过程与马尔可夫链 [M]. 北京: 科学出版社. 1980(中文第一版), New York: Springer, 1992(英文第二版), 北京: 科学出版社, 2005(中文第二版).
- [21] 杨超群(杨向群) (1964). 双边生灭过程. 南开大学学报(自然科学) 5(5): 9–40.
- [22] 杨向群. 可列马尔可夫过程构造论 [M]. 长沙: 湖南科学技术出版社. 1981(中文第一版), 1986(中文第二版); London Wiley. 1990 (英文版).

Reconstructing the Sanxian's Music Score by a Birth-Death Matrix

Mu-Fa Chen

(School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University; Laboratory of Mathematical and Complex Systems (Beijing Normal University), Ministry of Education, Beijing, 100875, China)

Abstract: The Sanxian is a traditional Chinese three-stringed plucked instrument. Its music can be generated by tridiagonal complex matrices. The sound people hear is determined by its spectrum and naturally requires that the matrix has a real spectrum. As in quantum mechanics, the description of the model is a complex operator and the observable measurement is real. In other words, the tridiagonal complex matrix described is a self-adjoint operator on the complex inner product space with respect to a measure. It is well known that the birth–death Q matrix can be matched and naturally self-adjointed. We will introduce the latest representative results: for a fairly wide range of self-adjoint tridiagonal complex matrices, a birth–death Q matrix can always be constructed to make both isospectral (in simple words, both have the same eigenvalues). This problem is simple and easy to understand. But we have studied it from three different perspectives: probability theory, statistical physics and computational mathematics at different times, and have gone through a long time of exploration.

This article is based on the author's report on "International Conference on Probability Theory and Its Applications" (Hunan University of Arts and Science, 2018/7). It consists of three parts: 1) the new application of the birth–death processes; 2) from the real matrices (with non negative off-diagonal element) to the complex matrices; 3) the source of this topic (Computation) and the application of its criterion (Statistical Physics and Quantum Mechanics).

Keywords: Complex matrix; symmetrizable; Hermitizable; birth–death matrix; statistical physics; quantum mechanics.

2010 Mathematics Subject Classification: 60J10; 15A90; 34L05.