第 25 卷 第 2 期 数 学 学 报 Vol. 25, No. 2
1982 年 3 月 ACTA MATHEMATICA SINICA Mar., 1982

有限流出有势 Q 过程*

陈 木 法
（北京师范大学）

在文[1]中，我们建立了一种抽象场，详细地研究了场的有势性．我们应用场论的结果，研究了马氏链、马氏过程、Q 矩阵等的有势性和可逆性．我们也研究了一些 Q 过程（生灭过程、单流出 Q 过程等）的有势性问题．本文主要研究有限流出 Q 过程的有势性和可逆性问题．

先前，我们仅限于讨论不断的过程的有势性，自本文开始，我们将允许过程中断．§1 讨论允许过程中断时的若干一般性结果．§2 和 §3 给出有限流出有势 Q 过程的构造．Williams[8] 给出了有限流出 Q 过程的一般构造，但他将流入解重新调整，这对于讨论有势性是不方便的．Feller[7] 固定流入解给出了同时满足两个微分方程组的 Q 过程的构造，但他的论证有误，仅适用于 $\mathfrak{A}_\lambda > 0$ 的情况．在这里，我们抓住了有势性的特征，直接构造了一切有势 Q 过程．§4 讨论有限流出可配称、可逆 Q 过程的构造．§5 给出有限流出不断的有势 Q 过程的存在准则．我们证明了条件(2.1)是必要的．§6 给出双流出不断的有势(可配称、可逆) Q 过程的唯一性判准；而在非唯一时，我们构造了无穷多个不断的有势(可配称、可逆) Q 过程．§7 给出了一般有限流出有势(可配称、可逆) Q 过程的唯一性判准．从而使有限流出情形得以完满解决．

本文是在严士健老师和侯振挺老师的指导下完成的．杨向群同志给作者指出了 Feller[7] 中的毛病．作者向他们表示衷心的感谢．

§1. 一般结果

设 E 是任一可列集(赋予散拓扑)．$Q=(q_{ij})$ 是一个 Q 矩阵，即

$$0 \leqslant q_{ij} < \infty \quad (i \neq j), \qquad 0 \leqslant q_i = -q_{ii} < \infty \quad (\forall i \in E), \tag{1.1}$$

$$\sum_j q_{ij} \leqslant 0 \qquad (\forall i \in E). \tag{1.2}$$

如果(1.2)中的等号总成立，则称 Q 是保守的．再设 $P(t)=(p_{ij}(t))$ 是以 $Q=(q_{ij})$ 为密度矩阵的 Q 过程．即 $P(t)$ 是定义在 $E \times E$ 上的一族实函数，它满足

$$p_{ij}(t) \geqslant 0, \sum_k p_{ik}(t) \leqslant 1, \tag{1.3}$$

$$p_{ij}(s+t) = \sum_k p_{ik}(s) p_{kj}(t), \tag{1.4}$$

* 1979 年 10 月 22 日收到．1981 年 6 月 10 日收到修改稿．

$$\lim_{t\to 0^+} p_{ij}(t) = p_{ij}(0) = \delta_{ij}, \tag{1.5}$$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{p_{ij}(t) - \delta_{ij}}{t} = q_{ij}, \tag{1.6}$$

此处 $\delta_{ii} = 1$，$\delta_{ij} = 0\ (i \neq j)$．如果 $\sum_k p_{ik}(t) = 1(\forall i, \forall t)$，则称过程 $P(t)$ 不断；否则称为中断的．

定义 1.1　称 $Q = (q_{ij})$ 是零流出的，如果方程

$$\left.\begin{aligned} &\lambda u_\lambda(i) - \sum_j q_{ij} u_\lambda(j) = 0 \\ &0 \leqslant u_\lambda(i) \leqslant 1 \end{aligned}\quad (i \in E,\ \lambda > 0)\right\} \tag{1.7}$$

只有零解．如果方程(1.7)只有有限多个线性独立解，则称 Q 是有限流出的．特别，若它只有一个非零的线性独立解，则称 Q 为单流出的．方程(1.7)的极大非零线性独立解的个数称为它的维数．

周知，维数与 $\lambda > 0$ 无关．

定义 1.2　称过程 $P(t) = (p_{ij}(t))$ 有势（等价地，弱可配称[1]），如果存在 $\Pi = (\pi_i)$，使得

$$\pi_i > 0 \qquad (\forall i \in E), \tag{1.8}$$

$$\pi_i p_{ij}(t) = \pi_j p_{ji}(t) \qquad (\forall i, j \in E, \forall t > 0), \tag{1.9}$$

此时称 Π 为 $P(t)$ 的配称列．如果还有

$$\sum_i \pi_i = 1, \tag{1.10}$$

则称 $P(t)$ 可配称，并称 Π 为 $P(t)$ 的配称分布．

关于中断 Q 过程，文[1]中的结果除极个别而外均可保留．特别，由[1，§ 11]中的定理及其证明可得

定理 1.1　如果 Q 过程 $(p_{ij}(t))$ 有势（可配称），则它的 Q 矩阵有势（可配称）．

定理 1.2　最小 Q 过程 $(p_{ij}^{\min}(t))$ 有势（可配称）的充要条件是它的 Q 矩阵有势（可配称）．

定理 1.3　设 $P(t) = (p_{ij}(t))$ 是弱可配称 Q 过程，则对于某一对 $i, j \in E$，

$$p'_{ij}(t) = \sum_k p_{ik}(t) q_{kj} \tag{1.11}$$

成立的充要条件是

$$p'_{ji}(t) = \sum_k q_{jk} p_{ki}(t). \tag{1.12}$$

由定理 1.1 和定理 1.2 立得下面的有势（可配称）Q 过程的存在准则：

定理 1.4　有势（可配称）Q 过程存在的充要条件是它的 Q 矩阵有势（可配称）．当 Q 矩阵有势（可配称）时，最小 Q 过程就是一个有势（可配称）Q 过程．

下面是有势 Q 过程的一个唯一性判据．

定理 1.5 设 $Q=(q_{ij})$ 保守、弱可配称，并设 $\Pi=(\pi_i)$ 是它的一个配称列，满足条件

$$\sum_i \pi_i \bar{X}_\lambda(i) < \infty, \tag{1.13}$$

这里

$$\bar{X}_\lambda(i) = 1 - \lambda \sum_j p_{ij}^{\min}(\lambda) \tag{1.14}$$

是方程(1.7)的最大解，而

$$p_{ij}^{\min}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} p_{ij}^{\min}(t)\,dt, \tag{1.15}$$

那么，关于 Π 的有势 Q 过程唯一的充要条件是 Q 过程唯一．即最小 Q 过程不断或方程(1.7)只有零解．

证　充分性易证．往证必要性．设方程(1.7)有非零解，即

$$\bar{X}_\lambda \neq 0 \tag{1.16}$$

(注意 $\bar{X}_\lambda$ 对于 $\lambda > 0$ 同时为零或同时不为零)．于是由[5; 定理 3]知

$$p_{ij}(\lambda) = p_{ij}^{\min}(\lambda) + \frac{\bar{X}_\lambda(i)\pi_j \bar{X}_\lambda(j)}{\lambda \sum_k \pi_k \bar{X}_\lambda(k)} \tag{1.17}$$

是一个关于 Π 的有势 Q 过程(我们将 Q 过程 $P(t)$ 的拉氏变换 P_λ 也叫做 Q 过程)，而且是不断的．再由定理 1.2 知，最小 Q 过程也是一个关于 Π 的有势 Q 过程．但由(1.16)和(1.17)知

$$P_\lambda \neq P_\lambda^{\min}, \tag{1.18}$$

故有势 Q 过程非唯一．定理证毕．

注意，若

$$\sum_i \pi_i < \infty, \tag{1.19}$$

则条件(1.13)总满足．因此由定理1.5立得

定理 1.6 设 $Q=(q_{ij})$ 保守、可配称，并设 $\Pi=(\pi_i)$ 是 Q 的一个配称分布，则关于 Π 的可配称 Q 过程唯一的充要条件是 Q 过程唯一，即最小 Q 过程不断或方程(1.7)只有零解．

定义 1.3 称 Q 过程 $P(t)=(p_{ij}(t))$ 可逆，如果存在正分布 $\Pi=(\pi_i)$：

$$\pi_i > 0 \quad (\forall i \in E), \quad \sum_i \pi_i = 1, \tag{1.20}$$

使得条件

(i)
$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \pi_j \qquad (\forall i \in E); \tag{1.21}$$

(ii) $P(t)$ 关于 Π 可配称

同时成立．

命题 1.1 每一个可逆 Q 过程都是不断的．

证　设 $(p_{ij}(t))$ 是一个可逆 Q 过程，它有配称分布 (π_i)．如果存在 $i\in E$ 和 $t>0$，使

$$\sum_j p_{ij}(t) < 1, \tag{1.22}$$

则由(1.4)易见

$$1 > \sum_j p_{ij}(t) > \sum_j p_{ij}(2^m t), \qquad m \geqslant 1. \tag{1.23}$$

由上面两式得

$$\pi_i > \pi_i \sum_j p_{ij}(t) > \pi_i \sum_j p_{ij}(2^m t) = \sum_j \pi_j p_{ji}(2^m t). \tag{1.24}$$

命 $m \to \infty$，利用 (1.20)、条件 (i) 及控制收敛定理，得

$$\pi_i > \pi_i \sum_j p_{ij}(t) \geqslant \sum_j \pi_j \pi_i = \pi_i, \tag{1.25}$$

导致矛盾. 证毕.

对于保守 Q 矩阵，我们已经得到了可逆 Q 过程的存在准则[4].

定理 1.7　设 $Q = (q_{ij})$ 保守，则可逆 Q 过程存在的充要条件是 Q 可配称，并且下述两条件

(i) Q 既约零流出；

(ii) Q 的每一子块非零流出

之一成立.

今设 Q 保守，并命

$$\bar{E} = \{i \in E : \bar{X}_\lambda(i) = 0\} \qquad (\text{与 } \lambda \text{ 无关}), \tag{1.26}$$

$$\hat{E} = E - \bar{E}, \tag{1.27}$$

$$\bar{Q} = (q_{ij} : i, j \in \bar{E}), \tag{1.28}$$

$$\hat{Q} = (q_{ij} : i, j \in \hat{E}), \tag{1.29}$$

对于任一 Q 过程 $P(t) = (p_{ij}(t))$，命

$$\bar{P}(t) = (p_{ij}(t) : i, j \in \bar{E}), \tag{1.30}$$

$$\hat{P}(t) = (p_{ij}(t) : i, j \in \hat{E}), \tag{1.31}$$

由[7;定理 5.2]知

$$\sum_{j \in \bar{E}} p_{ij}^{\min}(t) = 1 \qquad \forall i \in \bar{E}. \tag{1.32}$$

于是对任一 Q 过程 $P(t) = (p_{ij}(t))$ 来说，

$$p_{ij}(t) = p_{ij}^{\min}(t) \qquad i, j \in \bar{E}, \tag{1.33}$$

$$p_{ij}(t) = 0 \qquad i \in \bar{E}, j \in \hat{E}. \tag{1.34}$$

从而当 $i, j \in \hat{E}$ 时，

$$\begin{aligned} p_{ij}(s+t) &= \sum_{k \in \bar{E}} p_{ik}(s) p_{kj}(t) + \sum_{k \in \hat{E}} p_{ik}(s) p_{kj}(t) \\ &= \sum_{k \in \hat{E}} p_{ik}(s) p_{kj}(t). \end{aligned} \tag{1.35}$$

即 $\hat{P}(t)$ 满足(1.4). 由此易见 $\bar{P}(t)$ 和 $\hat{P}(t)$ 都是 Q 过程.

定理 1.8　设 Q 保守，并使用上述记号，则

(i) $\bar{Q}$ 保守;若 Q 有势,则 $\hat{Q}$ 也保守.

(ii) 如果 $P(t)$ 是一个(不断的)有势 Q 过程,则 $\bar{P}(t)$ 和 $\hat{P}(t)$ 也都是(不断的)有势 Q 过程. 反之,

(iii) 如果 Q 有势,且 $\bar{P}(t)=(\bar{p}_{ij}(t):i,j\in\bar{E})$ 和 $\hat{P}(t)=(\hat{p}_{ij}(t):i,j\in\hat{E})$ 是(不断的)有势 Q 过程,则由

$$\tilde{p}_{ij}(t)\triangleq\begin{cases}\bar{p}_{ij}(t) & i,j\in\bar{E},\\ \hat{p}_{ij}(t) & i,j\in\hat{E},\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\tag{1.36}$$

所定义的 $\tilde{P}(t)=(\tilde{p}_{ij}(t):i,j\in E)$ 也是一个(不断的)有势 Q 过程,而且任一 E 上的(不断的)有势 Q 过程必定形如 $\tilde{P}(t)$.

进而,我们有

(iv) 不影响(不断的)有势(可配称、可逆)Q 过程的存在性、唯一性及构造,我们可假定 $\bar{X}_\lambda>0$.

证 若 Q 有势,则

$$q_{ij}=q_{ji}=0,\qquad \forall i\in\bar{E},\forall j\in\hat{E}.\tag{1.37}$$

由此立得 (i). 先不管过程是否中断. (ii) 是显然的. 如果 $\bar{P}(t)$ 和 $\hat{P}(t)$ 都是有势 Q 过程,并且 Q 有势,则由上述事实立知由 (1.36) 所定义的 $\tilde{P}(t)$ 也是一个 Q 过程. 今设 $\bar{P}(t)$ 有配称列 $\bar{\Pi}=(\bar{\pi}_i:i\in\bar{E})$, $\hat{P}(t)$ 有配称列 $\hat{\Pi}=(\hat{\pi}_i:i\in\hat{E})$, 并取

$$\pi_i=\begin{cases}\bar{\pi}_i & i\in\bar{E},\\ \hat{\pi}_i & i\in\hat{E},\end{cases}\tag{1.38}$$

则 $\Pi=(\pi_i)$ 是 Q 的一个配称列. 并且 $\tilde{P}(t)$ 是以 $\Pi=(\pi_i)$ 为配称列的有势 Q 过程.

今设 $P(t)$ 是 E 上的任一有势 Q 过程,则由(1.34)知

$$p_{ij}(t)=0,\qquad i\in\bar{E},\ j\in\hat{E}.\tag{1.39}$$

再由 $P(t)$ 的有势性知

$$p_{ji}(t)=0,\qquad i\in\bar{E},\ j\in\hat{E}.\tag{1.40}$$

故由(1.33),(1.39)和(1.40)知 $P(t)$ 必定形如(1.36)所定义的 $\tilde{P}(t)$.

另一方面,因为 $\bar{P}(t)$ 不断,故 $P(t)$ 不断等价于 $\hat{P}(t)$ 不断. 故 (ii) 和 (iii) 都成立.

为证 (iv),先看有势情形. 注意,Q 有势是存在有势 Q 过程的必要条件. 由此易证所需结论. 把"有势"换成"可配称",重复上述讨论,立知可配称情形 (iv) 成立. 如果 Q 既约零流出,则 $\hat{E}=\varnothing$. 此时可逆 Q 过程存在的充要条件是 Q 可配称,而且存在时必定唯一,它就是 $p^{\min}(t)$. 若 Q 非既约,则可逆 Q 过程的存在导致 $E=\hat{E}$. 从而 (iv)自然成立. 定理证毕.

由定理 1.8(iv) 知,在讨论(不断的)有势(可配称、可逆)Q 过程的构造时,可假定

$$\bar{X}_\lambda(i)>0\qquad(\forall i\in E)\tag{1.41}$$

而不失一般性. 即只须讨论 $\hat{P}(t)$ 的构造便已足够. 因此,在本文后面的构造中,我们常假定(1.41)成立.

因为 $q_i=0$ 导致 $\bar{X}_\lambda(i)=0$, 故条件(1.41)推出我们的 Q 矩阵满足

$$0 < q_i = -q_{ii} < \infty \quad (\forall i \in E). \tag{1.42}$$

§2. 有限流出有势 Q 过程的构造

自本节开始，我们在假定方程(1.7)只有有限多个线性独立解之下，来讨论有势 Q 过程的构造问题. 我们给出直接的构造而不必求助于[6]—[8]中的构造结果. 虽然有几个中间步骤可直接引用[8]，但为读者方便，我们将不这样做.

设 $Q=(q_{ij})$ 保守，满足(1.42)，并且弱可配称，它有配称列 $\Pi=(\pi_i)$. 并假定

$$\sum_i \pi_i \bar{X}_\lambda(i) < +\infty. \tag{2.1}$$

自此以后，除非另有声明，我们的有势性都是关于这个满足(2.1)的配称列 (π_i) 而言的.

设方程(1.7)的极大线性无关解的个数是 $m, 1 \leqslant m < +\infty$. 如同[6]中所述，这等价于说流出边界 $\mathfrak{B}$ 由 m 个点 $\omega^{(a)}(a=1,2,\cdots,m)$ 组成. 我们可选取(1.7)的 m 个线性独立解 $X_\lambda^a(a=1,2,\cdots,m)$[7],[8]，使 X_λ^a 有相同的标准映像 X^a，并且

$$X_\lambda^a(i) \to \begin{cases} 1, & \text{当 } i \to \omega^{(a)} \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } i \to \omega^{(t)} \neq \omega^{(a)} \text{ 时}, \end{cases} \tag{2.2}$$

而且

$$0 < \bar{X} = \sum_{a=1}^m X^a, \tag{2.3}$$

$$0 < \bar{X}_\lambda = \sum_{a=1}^m X_\lambda^a, \tag{2.4}$$

$$\lambda P_\lambda^{\min} X^a = X^a - X_\lambda^a, \tag{2.5}$$

$$X_\lambda^a - X_\mu^a = (\mu-\lambda) P_\lambda^{\min} X_\mu^a = (\mu-\lambda) P_\mu^{\min} X_\lambda^a, \tag{2.6}$$

$$\lambda P_\lambda^{\min} X^0 = X^0, \qquad 0 \leqslant X^0 = 1 - \bar{X}, \tag{2.7}$$

假定 $\bar{X}_\lambda > 0$ 的依据是定理 1.8.

以后，我们也用 Π 表以 $\pi_i(i \in E)$ 为元素的对角矩阵. 这样做并不至于发生混淆. 命

$$\eta_\lambda^a = (\Pi X_\lambda^a)' = X_\lambda^{a\prime} \Pi, \tag{2.8}$$

$$\eta^a = (\Pi X^a)' = X^{a\prime} \Pi. \tag{2.9}$$

矩阵 A' 表 A 的转置. 特别，$X_\lambda^{a\prime}$ 是 X_λ^a 的转置.

引理 2.1 $\eta_\lambda^a(a=1,2,\cdots,m)$ 线性独立，并且满足

(i) $\lambda \eta^a P_\lambda^{\min} = \eta^a - \eta_\lambda^a$, (2.10)

(ii) $\eta_\lambda^a(a=1,2,\cdots,m)$ 是方程

$$\left.\begin{array}{l} \lambda\eta - \eta Q = 0, \\ 0 \leqslant \eta, \sum_i \eta(i) < \infty \quad (\lambda > 0) \end{array}\right\} \tag{2.11}$$

的解.

证 由(2.1)知

$$\sum_i \eta_\lambda^a(i) = \sum_i \pi_i X_\lambda^a(i) \leqslant \sum_i \pi_i \bar{X}_\lambda(i) < \infty. \tag{2.12}$$

又

$$\begin{aligned}\lambda\eta_\lambda^a - \eta_\lambda^a Q &= \lambda X_\lambda^{a\prime}\Pi - X_\lambda^{a\prime}\Pi Q \\ &= \lambda X_\lambda^{a\prime}\Pi - X_\lambda^{a\prime} Q'\Pi \quad (\text{由 } Q \text{ 弱可配称}) \\ &= (\lambda X_\lambda^a - Q X_\lambda^a)'\Pi = 0.\end{aligned}$$

故 (ii) 成立. 又由定理 1.2 知

$$\Pi P_\lambda^{\min} = (P_\lambda^{\min})'\Pi, \tag{2.13}$$

于是由(2.5)得

$$\begin{aligned}\lambda\eta^a P_\lambda^{\min} &= \lambda X^{a\prime}\Pi P_\lambda^{\min} = \lambda X^{a\prime}(P_\lambda^{\min})'\Pi = \lambda(P_\lambda^{\min}X^a)'\Pi \\ &= (X^a - X_\lambda^a)'\Pi = \eta^a - \eta_\lambda^a.\end{aligned}$$

此即是(2.10). 再由 X_λ^a 的线性独立(即 $\forall\lambda > 0$, 线性独立)知

$$\sum_{a=1}^m \alpha_\lambda^a \eta_\lambda^a = 0 \Rightarrow \forall i \in E, \quad \sum_{a=1}^m \alpha_\lambda^a \eta_\lambda^a(i) = 0 \Rightarrow \forall i \in E,$$

$$\sum_{a=1}^m \alpha_\lambda^a X_\lambda^a(i) = 0 \Rightarrow \sum_{a=1}^m \alpha_\lambda^a X_\lambda^a = 0 \Rightarrow \alpha_\lambda^1 = \alpha_\lambda^2 = \cdots = \alpha_\lambda^m = 0.$$

证毕.

我们使用 [7] 中的记号. 若 $u_1, \cdots, u_m$ 是数或向量, 则 $\{u\}_1^m$ 表以 $u^a(a = 1, 2, \cdots, m)$ 为元素的列向量;而 $\{u\}_1^{m\prime}$ 表这个列向量的转置,即以 $u^a(a = 1, 2, \cdots, m)$ 为元素的行向量. 以 M^{ab} 为元素的矩阵用相应的大写德文字母 $\mathfrak{M}$ 表示.

由 Q 保守,每一 Q 过程满足向后方程,易见[8]

定理 2.1 每一 Q 过程形如

$$P_\lambda = P_\lambda^{\min} + \sum_{a=1}^m X_\lambda^a y_\lambda^a, \tag{2.14}$$

其中行向量 y_λ^a 满足

预解条件: $y_\lambda^a - y_\mu^a = (\mu - \lambda) y_\lambda^a P_\mu$, (2.15)

范条件: $0 \leqslant y_\lambda^a$, $\lambda \sum_j y_\lambda^a(j) \leqslant 1$. (2.16)

P_λ 不断,当且仅当

$$\lambda \sum_j y_\lambda^a(j) = 1 \qquad (\forall a, \forall\lambda > 0). \tag{2.17}$$

下面是有势 Q 过程的表现定理.

定理 2.2 设 Q 保守, $m(1 \leqslant m < \infty)$ 流出,再设 Q 弱可配称并且配称列满足(2.1), 则每一个有势 Q 过程必定形如

$$P_\lambda = P_\lambda^{\min} + \{X_\lambda\}_1^{m\prime}\mathfrak{M}_\lambda\{X_\lambda'\Pi\}_1^m \tag{2.18}$$

此处 $\mathfrak{M}_\lambda$ 是某一非负对称 $m \times m$ 矩阵.

为证明定理 2.2,先证明一条简单引理.

引理 2.2 设 $\eta^a(a = 1, 2, \cdots, m)$ 是任意 m 个线性无关的行向量, $V^a(a = 1, 2, \cdots, m)$ 是 m 个列向量. 如果

$$\sum_{a=1}^{m} V^a \eta^a = 0^{1)}, \tag{2.19}$$

则

$$V^a = 0 \quad (a = 1, 2, \cdots, m). \tag{2.20}$$

证　由(2.19)得，对于每一个 i,

$$\sum_{a=1}^{m} v^a(i) \eta^a = 0. \tag{2.21}$$

于是由 η^a 的线性独立性知

$$v^a(i) = 0, \quad a = 1, 2, \cdots, m. \tag{2.22}$$

但 i 任意，故(2.20)成立．证毕．

定理 2.2 的证明　由定理 2.1 及[8, 引理 1]知，在定理 2.2 的假设之下，每一 Q 过程形如

$$P_\lambda = P_\lambda^{\min} + \{Z_\lambda\}_1^{l\prime} \mathfrak{N}_\lambda \{\xi_\lambda\}_1^{\bar{n}}. \tag{2.23}$$

此处 $Z_\lambda^a(a = 1, 2, \cdots, l)$ 是方程(1.7)的解，$\xi_\lambda^b(b = 1, 2, \cdots, \bar{n})$ 满足方程

$$\left.\begin{aligned} &\xi_\mu^b = \xi_\lambda^b A(\lambda, \mu), \\ &0 \leqslant \xi_\lambda^b, \quad \sum_i \xi_\lambda^b(i) < \infty, \quad (\lambda, \mu > 0) \end{aligned}\right\} \tag{2.24}$$

其中

$$A(\lambda, \mu) = I + (\lambda - \mu) P_\mu^{\min} \quad (\lambda, \mu > 0), \tag{2.25}$$

而 $\mathfrak{N}_\lambda$ 是一个 $l \times \bar{n}$ 非负矩阵．当然，还要求 Z_λ^a 和 ξ_λ^b 满足其它一些条件．

现在，因为 $X_\lambda^a(a = 1, 2, \cdots, m)$ 是方程(1.7)的一组极大线性无关解，故存在一个 $l \times m$ 矩阵 $\mathfrak{N}_\lambda^1$，使得

$$\{Z_\lambda\}_1^l = \mathfrak{N}_\lambda^1 \{X_\lambda\}_1^m. \tag{2.26}$$

于是

$$\{Z_\lambda\}_1^{l\prime} = \{X_\lambda\}_1^{m\prime} \mathfrak{N}_\lambda^{1\prime}. \tag{2.27}$$

另一方面，由(2.6)知

$$X_\mu^a = A(\lambda, \mu) X_\lambda^a, \tag{2.28}$$

故

$$\eta_\mu^a = X_\mu^{a\prime} \Pi = X_\lambda^{a\prime} A'(\lambda, \mu) \Pi = X_\lambda^{a\prime} \Pi A(\lambda, \mu) = \eta_\lambda^a A(\lambda, \mu). \tag{2.29}$$

由此及(2.12)知，$\eta_\lambda^a(a = 1, 2, \cdots, m)$ 是方程(2.24)的解．方程

$$\left.\begin{aligned} &\eta_\mu = \eta_\lambda A(\lambda, \mu) \\ &\sum_i |\eta_\lambda(i)| < \infty \quad (\lambda, \mu > 0) \end{aligned}\right\} \tag{2.30}$$

的解显然构成一个向量空间 $\mathscr{L}$．由 $\{\eta_\lambda^a, \xi_\lambda^b: a = 1, 2, \cdots, m; b = 1, 2, \cdots, \bar{n}\}$ 张成一个子空间 $\mathscr{L}_0$．由于 $\eta_\lambda^a(a = 1, 2, \cdots, m)$ 线性无关，故可扩张成 $\mathscr{L}_0$ 的一组基，记作 $\{\eta_\lambda^a: a = 1, 2, \cdots, m, m + 1, \cdots, n\}$．于是存在一个 $\bar{n} \times n$ 矩阵 $\mathfrak{N}_\lambda^2$，使得

1) 此处列向量与行向量的乘法，理解为矩阵乘法．

$$\{\xi_\lambda\}_1^n = \mathfrak{N}_\lambda^2\{\eta_\lambda\}_1^n. \tag{2.31}$$

命

$$\mathfrak{M}_\lambda = \mathfrak{N}_\lambda^{1\prime}\mathfrak{N}_\lambda\mathfrak{N}_\lambda^2, \tag{2.32}$$

则 (2.18) 成为

$$P_\lambda = P_\lambda^{\min} + \{X_\lambda\}_1^{m\prime}\mathfrak{M}_\lambda\{\eta_\lambda\}_1^n. \tag{2.33}$$

此处 $\mathfrak{M}_\lambda$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，$1\leqslant m\leqslant n<+\infty$.

今记

$$\tilde{\eta}_\lambda^1 = \{\eta_\lambda\}_1^m, \quad \tilde{\eta}_\lambda^2 = \{\eta_\lambda\}_{m+1}^n, \tag{2.34}$$

$$\mathfrak{M}_\lambda^1 = \begin{pmatrix} M_\lambda^{11} & \cdots & M_\lambda^{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ M_\lambda^{m1} & \cdots & M_\lambda^{mm} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{M}_\lambda^2 = \begin{pmatrix} M_\lambda^{1,m+1} & \cdots & M_\lambda^{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ M_\lambda^{m,m+1} & \cdots & M_\lambda^{m,n} \end{pmatrix}, \tag{2.35}$$

则

$$\{\eta_\lambda\}_1^n = \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_\lambda^1 \\ \tilde{\eta}_\lambda^2 \end{pmatrix}, \tag{2.36}$$

$$\mathfrak{M}_\lambda = (\mathfrak{M}_\lambda^1, \mathfrak{M}_\lambda^2), \tag{2.37}$$

$$P_\lambda = P_\lambda^{\min} + \{X_\lambda\}_1^{m\prime}(\mathfrak{M}_\lambda^1, \mathfrak{M}_\lambda^2)\begin{pmatrix} \tilde{\eta}_\lambda^1 \\ \tilde{\eta}_\lambda^2 \end{pmatrix}. \tag{2.38}$$

由 P_λ 和 $P_\lambda^{\min}$ 的有势性知

$$\Pi P_\lambda = P_\lambda'\Pi, \quad \Pi P_\lambda^{\min} = (P_\lambda^{\min})'\Pi. \tag{2.39}$$

于是

$$\{\Pi X_\lambda\}_1^{m\prime}(\mathfrak{M}_\lambda^1, \mathfrak{M}_\lambda^2)\begin{pmatrix} \tilde{\eta}_\lambda^1 \\ \tilde{\eta}_\lambda^2 \end{pmatrix} = ([\tilde{\eta}_\lambda^1]', [\tilde{\eta}_\lambda^2]')\begin{pmatrix} \mathfrak{M}_\lambda^{1\prime} \\ \mathfrak{M}_\lambda^{2\prime} \end{pmatrix}\{X_\lambda'\Pi\}_1^m. \tag{2.40}$$

此处

$$[\tilde{\eta}_\lambda^1]' = (\eta_\lambda^{1\prime}, \eta_\lambda^{2\prime}, \cdots, \eta_\lambda^{m\prime}). \tag{2.41}$$

$[\tilde{\eta}_\lambda^2]'$ 的意义类同. 于是由(2.7)，(2.34)和(2.40)得

$$[\tilde{\eta}_\lambda^1]'(\mathfrak{M}_\lambda^1, \mathfrak{M}_\lambda^2)\begin{pmatrix} \tilde{\eta}_\lambda^1 \\ \tilde{\eta}_\lambda^2 \end{pmatrix} = ([\tilde{\eta}_\lambda^1]', [\tilde{\eta}_\lambda^2]')\begin{pmatrix} \mathfrak{M}_\lambda^{1\prime} \\ \mathfrak{M}_\lambda^{2\prime} \end{pmatrix}\tilde{\eta}_\lambda^1, \tag{2.42}$$

即

$$([\tilde{\eta}_\lambda^1]'\mathfrak{M}_\lambda^2)\tilde{\eta}_\lambda^2 = \{[\tilde{\eta}_\lambda^1]'\mathfrak{M}_\lambda^{1\prime} + [\tilde{\eta}_\lambda^2]'\mathfrak{M}_\lambda^{2\prime} - [\tilde{\eta}_\lambda^1]'\mathfrak{M}_\lambda^{1\prime}\}\tilde{\eta}_\lambda^1. \tag{2.43}$$

我们可将(2.43)表成

$$\sum_{b=m+1}^{n} V_\lambda^b \eta_\lambda^b = \sum_{a=1}^{m} V_\lambda^a \eta_\lambda^a, \tag{2.44}$$

其中 $V_\lambda^a(a=1,2,\cdots,n)$ 是 E 上的列向量. 于是由 $\eta_\lambda^a(a=1,2,\cdots,n)$ 的线性无关性以及引理 2.2 知

$$V_\lambda^a = 0 \qquad (a=1,2,\cdots,n). \tag{2.45}$$

特别

$$[\tilde{\eta}_\lambda^1]'\mathfrak{M}_\lambda^2 = 0 \tag{2.46}$$

或即

$$\{\Pi X_\lambda\}_1^{m\prime}\mathfrak{M}_\lambda^2 = 0. \tag{2.47}$$

而这等价于

$$\{X_\lambda\}_1^{m\prime}\mathfrak{M}_\lambda^2 = 0. \tag{2.48}$$

最后，由(2.38)得

$$P_\lambda = P_\lambda^{\min} + \{X_\lambda\}_1^{m\prime}\mathfrak{M}_\lambda^1\{\eta_\lambda\}_1^m. \tag{2.49}$$

无妨写成

$$P_\lambda = P_\lambda^{\min} + \{X_\lambda\}_1^{m\prime}\mathfrak{M}_\lambda\{\eta_\lambda\}_1^m. \tag{2.50}$$

此处 $\mathfrak{M}_\lambda$ 是一个 $m\times m$ 矩阵．因为 P_λ 是一个 Q 过程，故由 (2.2) 和 (2.16) 易证 $\mathfrak{M}_\lambda$ 非负．剩下的只须再证 $\mathfrak{M}_\lambda$ 对称．

记

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_\lambda = \mathfrak{M}_\lambda - \mathfrak{M}_\lambda', \tag{2.51}$$

则由 (2.50)，(2.39)，(2.34) 和 (2.7) 得

$$[\tilde{\eta}^1]'\widetilde{\mathfrak{M}}_\lambda\tilde{\eta}_\lambda^1 = 0. \tag{2.52}$$

即

$$\sum_{b=1}^m\left(\sum_{a=1}^m \widetilde{M}_\lambda^{ab}\eta_\lambda^{a\prime}\right)\eta_\lambda^b = 0. \tag{2.53}$$

由 $\eta_\lambda^b(b=1,2,\cdots,m)$ 的线性无关性和引理 2.2 知

$$\sum_{a=1}^m \widetilde{M}_\lambda^{ab}\eta_\lambda^{a\prime} = 0, \qquad b=1,2,\cdots,m. \tag{2.54}$$

再用一次 $\eta_\lambda^a(a=1,2,\cdots,m)$ 的线性无关性，即知

$$\widetilde{M}_\lambda^{ab} = 0, \qquad a,b=1,2,\cdots,m. \tag{2.55}$$

故

$$\mathfrak{M}_\lambda = \mathfrak{M}_\lambda'. \tag{2.56}$$

至此，定理证毕．

推论 2.1　设 Q 有势，且

$$P_\lambda = P_\lambda^{\min} + \{X_\lambda\}_1^{m\prime}\mathfrak{M}_\lambda\{X_\lambda'\Pi\}_1^m. \tag{2.57}$$

是一个 Q 过程，其中 $X_\lambda^a(a=1,2,\cdots,m)$ 是方程(1.7)的一组线性无关解．$\mathfrak{M}_\lambda$ 是 $m\times m$ 矩阵，则 P_λ 成为有势 Q 过程(关于 Π)的充要条件是 $\mathfrak{M}_\lambda$ 对称．

证　必要性在定理 2.1 证明的最后一部分中已证．往证充分性．若 $\mathfrak{M}_\lambda$ 对称，则由

$$(\{\Pi X_\lambda\}_1^{m\prime}\mathfrak{M}_\lambda\{X_\lambda'\Pi\}_1^m)' = \{\Pi X_\lambda\}_1^{m\prime}\mathfrak{M}_\lambda'\{X_\lambda'\Pi\}_1^m = \{\Pi X_\lambda\}_1^{m\prime}\mathfrak{M}_\lambda\{X_\lambda'\Pi\}_1^m \tag{2.58}$$

及 $\Pi P_\lambda^{\min} = (P_\lambda^{\min})'\Pi$ 立知 $\Pi P_\lambda = P_\lambda'\Pi$．故 P_λ 有势．证毕．

以后固定定理 2.2 中的 $\mathfrak{M}_\lambda$，并假定它相应的 P_λ 是一个有势 Q 过程．我们的目的是要进一步刻划 $\mathfrak{M}_\lambda$ 的结构．

本文使用如下记号[7,8]：

$$U_\lambda^{ab} = \lambda\eta_\lambda^a X^b = \lambda\eta^a X_\lambda^b \qquad (a=1,2,\cdots,m), \tag{2.59}$$

$$\tau^a = \lambda\eta_\lambda^a X^0 (\text{与 } \lambda \text{ 无关!}) \qquad (a = 1, 2, \cdots, m), \tag{2.60}$$

$$\xi_\lambda^a = \sum_{b=1}^m M_\lambda^{ab}\eta_\lambda^b \qquad (a = 1, 2, \cdots, m), \tag{2.61}$$

则我们有

引理 2.3

(i) $U_\lambda^{ab} = U_\lambda^{ba}$; (2.62)

(ii) $U_\lambda^{ab} \uparrow U^{ab} (\leqslant +\infty)(\lambda \uparrow \infty)$; (2.63)

(iii) $U_\lambda^{ab} - U_\mu^{ab} = (\lambda - \mu)\langle \eta_\lambda^a, X_\mu^b \rangle$; (2.64)

此处

$$\langle \eta_\lambda^a, X_\mu^b \rangle = \sum_i \eta_\lambda^a(i) X_\mu^b(i); \tag{2.65}$$

(iv) $\sum_{b=1}^m \sum_{c=1}^m M_\lambda^{ab} U_\lambda^{bc} \leqslant 1.$ (2.66)

证 由 (2.5) 和 (2.10) 得

$$\begin{aligned} U_\lambda^{ab} &= \lambda\eta_\lambda^a X^b = \lambda X_\lambda^{a\prime}\Pi X^b = \lambda(X^{a\prime} - \lambda X^{a\prime}(P_\lambda^{\min})')\Pi X^b \\ &= \lambda X^{a\prime}(I - \lambda(P_\lambda^{\min})')\Pi X^b = \lambda X^{a\prime}(\Pi X^b - \lambda(P_\lambda^{\min})'\Pi X^b) \\ &= \lambda X^{a\prime}(\eta^b - \lambda\eta^b P_\lambda^{\min})' = \lambda X^{a\prime}\eta_\lambda^{b\prime} = \lambda\eta_\lambda^b X^a \\ &= U_\lambda^{ba}, \end{aligned} \tag{2.67}$$

故 (2.62) 成立. 又

$$\begin{aligned} &(\lambda - \mu)\langle \eta_\lambda^a, X_\mu^b \rangle \\ &= (\lambda - \mu)\langle \eta_\lambda^a, X^b - \mu P_\mu^{\min} X^b \rangle \\ &= (\lambda - \mu)\langle \eta_\lambda^a, X^b \rangle - \mu(\lambda - \mu)\langle \eta_\lambda^a, P_\mu^{\min} X^b \rangle \\ &= U_\lambda^{ab} - \mu\langle \eta_\lambda^a, X^b \rangle - \mu(\lambda - \mu)\langle \eta_\lambda^a P_\mu^{\min}, X^b \rangle \\ &= U_\lambda^{ab} - \mu[\langle \eta_\lambda^a + (\lambda - \mu)\eta_\lambda^a P_\mu^{\min}, X^b \rangle] \\ &= U_\lambda^{ab} - U_\mu^{ab}, \end{aligned} \tag{2.68}$$

故(2.63)和(2.64)成立. 最后,由(2.3)、(2.7)和定理 2.1 知

$$\begin{aligned} \sum_{b=1}^m \sum_{c=1}^m M_\lambda^{ab} U_\lambda^{bc} &= \lambda \sum_{b=1}^m \sum_{c=1}^m M_\lambda^{ab}\langle \eta_\lambda^b, X^c \rangle \\ &= \lambda \sum_{b=1}^m M_\lambda^{ab}\langle \eta_\lambda^b, \overline{X} \rangle = \langle \lambda\xi_\lambda^a, \overline{X} \rangle \\ &\leqslant \langle \lambda\xi_\lambda^a, 1 \rangle \leqslant 1. \end{aligned}$$

引理得证.

关于 ξ_λ^a 和 $\mathfrak{M}_\lambda$,我们有

引理 2.4

$$\xi_\lambda^a = \sum_{c=1}^m [\delta_{ac} + (\mu - \lambda)\langle \xi_\lambda^a, X_\mu^c \rangle]\xi_\mu^c A(\mu, \lambda); \tag{2.69}$$

$$M_\lambda^{ab} = \sum_{c=1}^m [\delta_{ac} + (\mu - \lambda)\langle \xi_\lambda^a, X_\mu^c \rangle] M_\mu^{cb} \tag{2.70}$$

$$= \sum_{c=1}^{m}\left[\delta_{ac} + \sum_{d=1}^{m} M_{\lambda}^{ad}(U_{\mu}^{dc} - U_{\lambda}^{dc})\right] M_{\mu}^{cb} \tag{2.71}$$

证　由 (2.15) 得

$$\xi_{\lambda}^{a} - \xi_{\mu}^{a} = (\mu - \lambda)\xi_{\lambda}^{a}\left[P_{\mu}^{\min} + \sum_{c=1}^{m} X_{\mu}^{c}\xi_{\mu}^{c}\right]$$

$$= (\mu - \lambda)\xi_{\lambda}^{a}P_{\mu}^{\min} + \sum_{c=1}^{m}(\mu - \lambda)\langle\xi_{\lambda}^{a}, X_{\mu}^{c}\rangle\xi_{\mu}^{c},$$

于是

$$\sum_{c=1}^{m}[\delta_{ac} + (\mu - \lambda)\langle\xi_{\lambda}^{a}, X_{\mu}^{c}\rangle]\xi_{\mu}^{c} = \xi_{\lambda}^{a}A(\lambda, \mu),$$

右乘 $A(\mu, \lambda)$，得

$$\xi_{\lambda}^{a} = \sum_{c=1}^{m}[\delta_{ac} + (\mu - \lambda)\langle\xi_{\lambda}^{a}, X_{\mu}^{c}\rangle]\xi_{\mu}^{c}A(\mu, \lambda).$$

此即是(2.69)．由上式及(2.29)、(2.61)得

$$\sum_{b=1}^{m} M_{\lambda}^{ab}\eta_{\lambda}^{b} = \sum_{c=1}^{m}[\delta_{ac} + (\mu - \lambda)\langle\xi_{\lambda}^{a}, X_{\mu}^{c}\rangle]\sum_{d=1}^{m} M_{\mu}^{cd}\eta_{\mu}^{d}A(\mu, \lambda)$$

$$= \sum_{c=1}^{m}[\delta_{ac} + (\mu - \lambda)\langle\xi_{\lambda}^{a}, X_{\mu}^{c}\rangle]\sum_{d=1}^{m} M_{\mu}^{cd}\eta_{\lambda}^{d},$$

然后由 η_{λ}^{a} 的线性独立性得 (2.70)．再由 (2.64) 得 (2.71)．

当 $\mathfrak{A} < \infty$ 时，有势 Q 过程的构造十分简洁．我们单独加以讨论．

定理 2.3　设 Q 保守、弱可配称，并且配称列 (π_i) 满足 (2.1)．再设 Q 为 $m(1 \leqslant m < \infty)$ 流出的，并且 $\mathfrak{A} < \infty$．

任意选择一个非负、对称的 $m \times m$ 矩阵 $\mathfrak{M}$，并定义 $\mathfrak{S} = \mathfrak{M}\mathfrak{A}$．假定

$$\mathfrak{S}\{1\}_{1}^{m} + \mathfrak{M}\{\tau\}_{1}^{m} \leqslant \{1\}_{1}^{m}, \tag{2.72}$$

并取

$$\mathfrak{M}_{\lambda} = (I - \mathfrak{S} + \mathfrak{M}\mathfrak{A}_{\lambda})^{-1}\mathfrak{M}, \tag{2.73}$$

则由 (2.73) 和 (2.18) 所定义的 P_{λ} 是一个有势 Q 过程．P_{λ} 不断的充要条件是(2.72) 中的等号成立．并且一切(关于 Π 的)有势 Q 过程可用这种方式得到．

证　先证 $\mathfrak{M}_{\lambda}$ 对称等价于 $\mathfrak{M}$ 对称．事实上，$\mathfrak{M}_{\lambda}$ 对称等价于

$$\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}\mathfrak{A}\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}\mathfrak{A}_{\lambda}\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} - \mathfrak{M}\mathfrak{A}'\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}\mathfrak{A}_{\lambda}'\mathfrak{M}',$$

故由引理 2.3 立知它等价于 $\mathfrak{M}$ 对称．

次证范条件等价于 (2.72)．因为

$$\{\xi_{\lambda}\}_{1}^{m} = \mathfrak{M}_{\lambda}\{\eta_{\lambda}\}_{1}^{m},$$

所以范条件等价于

$$\{1\}_{1}^{m} \geqslant \{\lambda\langle\xi_{\lambda}, 1\rangle\}_{1}^{m} = \mathfrak{M}_{\lambda}\{\lambda\langle\eta_{\lambda}, 1\rangle\}_{1}^{m}$$

$$= \mathfrak{M}_{\lambda}\left\{\lambda\left\langle\eta_{\lambda}, X^{0} + \sum_{c=1}^{m} X^{c}\right\rangle\right\}_{1}^{m} = \mathfrak{M}_{\lambda}\{\tau\}_{1}^{m} + \mathfrak{M}_{\lambda}\mathfrak{A}_{\lambda}\{1\}_{1}^{m},$$

即

$$(I-\mathfrak{S}+\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda)^{-1}\mathfrak{M}(\{\tau\}_1^m+\mathfrak{A}_\lambda\{1\}_1^m)\leqslant\{1\}_1^m$$

或

$$\mathfrak{M}(\{\tau\}_1^m+\mathfrak{A}_\lambda\{1\}_1^m)\leqslant(I-\mathfrak{S}+\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda)\{1\}_1^m,$$

$$\mathfrak{S}\{1\}_1^m+\mathfrak{M}\{\tau\}_1^m\leqslant\{1\}_1^m.$$

此即是 (2.72).

现在，如果 P_λ 是任一有势 Q 过程，则由定理 2.2，它必定形如(2.18). 于是由(2.70)知

$$0\leqslant\mathfrak{M}_\lambda\downarrow\qquad(\lambda\uparrow\infty).\tag{2.74}$$

记

$$\mathfrak{M}=\lim_{\lambda\to\infty}\mathfrak{M}_\lambda,\tag{2.75}$$

$\mathfrak{M}_\lambda$ 和 $\mathfrak{M}$ 都是对称的 $m\times m$ 矩阵. 由假设 $\mathfrak{A}<\infty$，在 (2.71) 中命 $\mu\to\infty$，得

$$\mathfrak{M}_\lambda=(I+\mathfrak{M}_\lambda(\mathfrak{A}-\mathfrak{A}_\lambda))\mathfrak{M}$$

或

$$\mathfrak{M}_\lambda\cdot(I-\mathfrak{A}\mathfrak{M}+\mathfrak{A}_\lambda\mathfrak{M})=\mathfrak{M},$$

由对称性得

$$(I-\mathfrak{M}\mathfrak{A}+\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda)\mathfrak{M}_\lambda=\mathfrak{M}.\tag{2.76}$$

如果 $\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda$ 的某一行和为零，则 $\mathfrak{M}\mathfrak{A}$ 的同一行和也是零(注意，若 $\exists\lambda>0$，使 $U_\lambda^{ab}=0$，则 $\forall\lambda>0$, $U_\lambda^{ab}=0$)，故 $I-\mathfrak{M}\mathfrak{A}+\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda$ 的这一行和为 1 而大于零. 如果 $\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda$ 的某一行和大于零，则由范条件易见 $I-\mathfrak{S}+\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda$ 的同一行和不小于 $\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda$ 的这一行和而大于零. 因此，$I-\mathfrak{S}+\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda$ 的每一行和严格大于零. 另一方面，这个矩阵的非对角线元素非正. 故它有非负逆矩阵，于是 $\mathfrak{M}_\lambda$ 形如 (2.73)，必要性得证. 为证充分性，只须再证 ξ_λ^a 满足预解条件(2.15). 为此，先证 $\mathfrak{M}_\lambda$ 满足矩阵方程

$$\mathfrak{M}_\lambda-\mathfrak{M}_\mu=\mathfrak{M}_\lambda(\mathfrak{A}_\mu-\mathfrak{A}_\lambda)\mathfrak{M}_\mu.\tag{2.77}$$

事实上，

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{M}_\lambda(\mathfrak{A}_\mu-\mathfrak{A}_\lambda)\mathfrak{M}_\mu\\
&\quad=(I-\mathfrak{S}+\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda)^{-1}\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_\mu-\mathfrak{A}_\lambda)(I-\mathfrak{S}+\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\mu)^{-1}\mathfrak{M}\\
&\quad=(I-\mathfrak{S}+\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda)^{-1}[(I-\mathfrak{S}+\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\mu)-(I-\mathfrak{S}+\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda)]\\
&\qquad\cdot(I-\mathfrak{S}+\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\mu)^{-1}\mathfrak{M}\\
&\quad=(I-\mathfrak{S}+\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda)^{-1}\mathfrak{M}-(I-\mathfrak{S}+\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\mu)^{-1}\mathfrak{M}\\
&\quad=\mathfrak{M}_\lambda-\mathfrak{M}_\mu.
\end{aligned}\tag{2.78}$$

其次，由 (2.24)

$$\begin{aligned}
(\mu-\lambda)\xi_\lambda^aP_\mu&=(\mu-\lambda)\xi_\lambda^a\left(P_\mu^{\min}+\sum_{c=1}^m X_\mu^c\xi_\mu^c\right)\\
&=(\mu-\lambda)\xi_\lambda^aP_\mu^{\min}+\sum_{c=1}^m(\mu-\lambda)\langle\xi_\lambda^a,X_\mu^c\rangle\xi_\mu^c\\
&=\sum_{t=1}^m M_\lambda^{at}\eta_\lambda^t(\mu-\lambda)P_\mu^{\min}+\sum_{c=1}^m\sum_{b=1}^m M_\lambda^{ab}(U_\mu^{bc}-U_\lambda^{bc})\\
&\quad\cdot\sum_{t=1}^m M_\mu^{ct}\eta_\mu^t
\end{aligned}$$

$$= \sum_{t=1}^{m} M_{\lambda}^{at}(\eta_{\lambda}^{t} - \eta_{\mu}^{t}) + \sum_{t=1}^{m} (M_{\lambda}^{at} - M_{\mu}^{at})\eta_{\mu}^{t}$$

$$= \sum_{t=1}^{m} M_{\lambda}^{at}\eta_{\lambda}^{t} - \sum_{t=1}^{m} M_{\mu}^{at}\eta_{\mu}^{t}$$

$$= \xi_{\lambda}^{a} - \xi_{\mu}^{a},$$

预解条件(2.15)成立. 定理证毕.

§3. 有限流出有势 Q 过程的构造(续)

本节继续§2，讨论 $\mathfrak{A}$ 含有无穷元时有势 Q 过程的构造问题. 此时问题要复杂得多. 已有的结果均不大适用于有势性的研究. 因此. 我们直接给出具体的构造. 显然下面的定理也适用于 $\mathfrak{A}$ 有限的情形，但它显得冗长. 因此我们宁愿在上一节单独加以处理.

首先注意，如果(2.18)的 P_{λ} 是一个有势 Q 过程，并且有两个 ξ_{λ}^{a} 相等（此时称 $\{\xi_{\lambda}^{a}\}$ 是累赘的，否则称为非累赘的），例如 $\xi_{\lambda}^{1} = \xi_{\lambda}^{2}$，则我们可将 X_{λ}^{1} 和 X_{λ}^{2} 去掉，代之以 $X_{\lambda}^{1} + X_{\lambda}^{2}$，并取新的 ξ_{λ}^{1} 为原来的 $\xi_{\lambda}^{1} = \xi_{\lambda}^{2}$，而将问题化成只有 $m-1$ 个边界的情况. 一般地，我们可将 $\omega^{a}(a = 1, 2, \cdots, m)$ 合并成 $\tilde{\omega}^{a}(a \in A)$. 其个数 $|A| \leqslant m$. $X_{\lambda}^{a}(a \in A)$ 仍然满足§2开头的一切条件.

设 $\bar{A} \subset A$，$\bar{A}$ 中元记作 $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \cdots$.

定理 3.1 设 Q 保守、弱可配称，并且配称列 (π_i) 满足(2.1). 再设 Q 是 $m\,(1 \leqslant m < +\infty)$ 流出的，而 $\bigcup_{a \in A} \tilde{\omega}^{a}$ 是它的流出边界的任意一个不交划分，$|A| \leqslant m$.

任取 $\bar{A} \subset A$. 选择一个 $A \times \bar{A}$ 上的矩阵 $\mathfrak{G}$，使得

$$G^{\bar{a}\bar{a}} = 1 \quad (\bar{a} \in \bar{A}), \qquad \sum_{\bar{a} \in \bar{A}} G^{a\bar{a}} \leqslant 1 \quad (a \in A), \tag{3.1}$$

选择 $\bar{A} \times A$ 上的随机矩阵 $\mathfrak{N}$

$$N^{\bar{a}b} \geqslant 0 \quad (\bar{a} \in \bar{A}, b \in A), \qquad \sum_{b \in A} N^{\bar{a}b} = 1 \qquad (\bar{a} \in \bar{A}) \tag{3.2}$$

及 $\bar{A} \times A$ 上的有限矩阵 $\mathfrak{S}$，使

$$+\infty > -S^{\bar{a}c} \geqslant \sum_{t \in A} N^{\bar{a}t} U^{tc} \qquad (c \neq \bar{a} \in \bar{A}, c \in A), \tag{3.3}$$

$$\mathfrak{S}\mathfrak{G}\{1\}_{\bar{A}} \geqslant \mathfrak{N}[\{\tau\}_{A} + \mathfrak{A}(\{1\}_{A} - \mathfrak{G}\{1\}_{\bar{A}})], \tag{3.4}$$

$$\mathfrak{G}[(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_{\lambda} + \mathfrak{S})\mathfrak{G}]^{-1}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}'[\mathfrak{G}'(\mathfrak{A}_{\lambda}\mathfrak{N}' + \mathfrak{S}')]^{-1}\mathfrak{G}'. \tag{3.5}$$

此处约定 $0 \cdot \infty = 0$. $\{u\}_{A}$ 表 A 上元素为 u^{a} 的列向量. 如果 $\mathfrak{A}$ 的第 c 列全有限，则(3.3)对这个 c 和所有的 $\bar{a} \in \bar{A}$，$\bar{a} \neq c$ 成立等号. 最后，取

$$\mathfrak{M}_{\lambda} = \mathfrak{G}[(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_{\lambda} + \mathfrak{S})\mathfrak{G}]^{-1}\mathfrak{N}, \tag{3.6}$$

则由(3.6)和(2.18)所定义的 P_{λ} 是一个有势 Q 过程. 反之，每一个有势 Q 过程可以用这种方式得到. 过程不断的充要条件是

$$\sum_{\bar{a} \in \bar{A}} G^{a\bar{a}} = 1 \qquad (a \in A), \tag{3.7}$$

且

$$\mathfrak{S}\{1\}_A = \mathfrak{N}\{\tau\}_A. \tag{3.8}$$

证 (I) 必要性

设 P_λ 是一个有势 Q 过程，不失一般性可设 $\{\xi_\lambda^a\}$ 非累赘. 我们证明必定存在 $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{N}$ 和 $\mathfrak{S}$, 使之满足(3.1)—(3.6).

首先，由定理 2.2，每一个有势 Q 过程必定形如 (2.18). 因此，可用 (2.61) 定义 $\xi_\lambda^a(a \in A)$，它满足(2.15)，(2.16)、引理 2.3 和引理 2.4. 今设 $\lambda > 0$ 固定，由于集 $\{0\} \cup \{\xi_\lambda^a, a \in A\}$ 的凸包是 l' 中的紧凸集，它的极点可以记作 $\{0\} \cup \{\xi_\lambda^{\bar a} \neq 0, \bar a \in \bar A\}$. 由 Krein-Milman 定理 (Banach 空间的紧凸集是它的极点的凸包)，每一个 $\xi_\lambda^a(a \in A)$ 可以表成

$$\xi_\lambda^a = \sum_{\bar a \in \bar A} G^{a\bar a} \xi_\lambda^{\bar a}. \tag{3.9}$$

此处 $G^{a\bar a} \geqslant 0$, $G^{\bar a\bar a} = 1\ (\bar a \in \bar A)$, 并且 $\sum\limits_{\bar a \in \bar A} G^{a\bar a} \leqslant 1 (a \in A)$. 严格地说，(3.9) 中的 $\mathfrak{G}$ 依赖于 $\lambda > 0$. 但我们可以对任一 $\lambda > 0$ 取定. 因为(3.9)的两边右乘 $I + (\lambda - \mu)P_\mu$ 可得

$$\xi_\mu^a = \sum_{\bar a \in \bar A} G^{a\bar a} \xi_\mu^{\bar a} \qquad (\forall \mu > 0). \tag{3.10}$$

命

$$N_\lambda^{\bar a b} = \frac{M_\lambda^{\bar a b}}{\sum\limits_b M_\lambda^{\bar a b}} \qquad (\bar a \in \bar A,\ b \in A,\ \lambda > 0), \tag{3.11}$$

由 $\xi_\lambda^{\bar a} \neq 0$ 易见 $\sum\limits_b M_\lambda^{\bar a b} \neq 0$, 从而上式有定义. 由上式知 $\sum\limits_{b \in A} N_\lambda^{\bar a b} = 1$，故使用对角线程序，我们可以取子列 $\lambda_n \to \infty$, 使

$$0 \leqslant N_\lambda^{\bar a b} \to N^{\bar a b}, \quad \sum_{b \in A} N^{\bar a b} = 1. \tag{3.12}$$

由(2.71)得

$$\begin{aligned} M_\lambda^{\bar a b} &= \sum_{c \in A} \left[\delta_{\bar a c} + \sum_{d \in A} M_\lambda^{\bar a d}(U_\mu^{dc} - U_\lambda^{dc})\right] M_\mu^{cb} \\ &= \sum_{c \in A}\sum_{d \in A} M_\lambda^{\bar a d} U_\mu^{dc} M_\mu^{cb} + \sum_{c \in A}\left[\delta_{\bar a c} - \sum_{d \in A} M_\lambda^{\bar a d} U_\lambda^{dc}\right] M_\mu^{cb} \\ &\qquad (\bar a \in \bar A,\ b \in A) \end{aligned} \tag{3.13}$$

命

$$S_\lambda^{\bar a c} = \frac{\delta_{\bar a c} - \sum\limits_{d \in A} M_\lambda^{\bar a d} U_\lambda^{dc}}{\sum\limits_{b \in A} M_\lambda^{\bar a b}} \qquad (\bar a \in \bar A,\ c \in A), \tag{3.14}$$

则

$$N_\lambda^{\bar a b} = \sum_c \sum_d N_\lambda^{\bar a d} U_\mu^{dc} M_\mu^{cb} + \sum_c S_\lambda^{\bar a c} M_\mu^{cb}, \qquad (\bar a \in \bar A,\ b \in A), \tag{3.15}$$

从 $\{\lambda_n\}$ 中抽子列 $\{\lambda_n'\}$, 使得 $\mathfrak{S}_\lambda$ 收敛于某个 $\mathfrak{S}$. 往证这样的 $\mathfrak{S}$ 总是有限的. 事实上，若存在 $\bar a \in \bar A$, 使 $S^{\bar a \bar a} = 0$, 则由 (2.66) 得

$$0 \leqslant -S^{\bar{a}c} = \lim_{\lambda'_n \to \infty} \frac{\sum_d M^{\bar{a}d}_{\lambda'_n} U^{dc}_{\lambda'_n}}{\sum_b M^{\bar{a}b}_{\lambda'_n}} \leqslant \lim_{\lambda'_n \to \infty} \frac{\sum_{c \neq d} \sum_d M^{\bar{a}d}_{\lambda'_n} U^{dc}_{\lambda'_n}}{\sum_b M^{\bar{a}b}_{\lambda'_n}}$$

$$\leqslant \lim_{\lambda'_n \to \infty} \frac{\delta_{\bar{a}\bar{a}} - \sum_d M^{\bar{a}d}_{\lambda'_n} U^{d\bar{a}}_{\lambda'_n}}{\sum_b M^{\bar{a}b}_{\lambda'_n}} = S^{\bar{a}\bar{a}} = 0, \qquad (\forall c \in A).$$

若 $S^{\bar{a}\bar{a}} \neq 0$，则充分大的 λ'_n，$S^{\bar{a}\bar{a}}_{\lambda'_n} \neq 0$. 对于这样的 λ，命

$$T^{\bar{a}b}_{\lambda} = -S^{\bar{a}b}_{\lambda} / S^{\bar{a}\bar{a}}_{\lambda}, \qquad b \neq \bar{a} \tag{3.16}$$

此时

$$\sum_{b \neq \bar{a}} T^{\bar{a}b}_{\lambda} = -\sum_{b \neq \bar{a}} S^{\bar{a}b}_{\lambda} / S^{\bar{a}\bar{a}}_{\lambda}$$

$$= \frac{\sum_{c \neq \bar{a}} \sum_t M^{\bar{a}t}_{\lambda} U^{tc}_{\lambda}}{\sum_b M^{\bar{a}b}_{\lambda}} \Bigg/ \frac{1 - \sum_t M^{\bar{a}t}_{\lambda} U^{t\bar{a}}_{\lambda}}{\sum_b M^{\bar{a}b}_{\lambda}} \leqslant 1.$$

因此，我们可从 $\{\lambda'_n\}$ 抽子列 $\{\lambda''_n\}$，使

$$T^{\bar{a}b}_{\lambda''_n} \to T^{\bar{a}b} \geqslant 0, \quad \sum_{b \neq \bar{a}} T^{\bar{a}b} \leqslant 1, \qquad \bar{a} \in \bar{A}. \tag{3.17}$$

如果 $S^{\bar{a}\bar{a}} = \infty$，则用 $S^{\bar{a}\bar{a}}_{\lambda''_n}$（充分大的 λ''_n）除(3.15)两边，固定 μ 并命 $\lambda''_n \to \infty$，便得

$$M^{\bar{a}b}_{\mu} = \sum_{c \neq \bar{a}} T^{\bar{a}c} M^{cb}_{\mu} \qquad (b \in A). \tag{3.18}$$

于是

$$\xi^{\bar{a}}_{\mu} = \sum_b M^{\bar{a}b}_{\mu} \eta^b_{\mu} = \sum_{c \neq \bar{a}} T^{\bar{a}c} \sum_b M^{cb}_{\mu} \eta^b_{\mu} = \sum_{c \neq \bar{a}} T^{\bar{a}c} \xi^c_{\mu}$$

$$= \sum_{c \neq \bar{a}} T^{\bar{a}c} \sum_{\bar{e}} G^{c\bar{e}} \xi^{\bar{e}}_{\mu} = \sum_{\bar{e}} \left(\sum_{c \neq \bar{a}} T^{\bar{a}c} G^{c\bar{e}} \right) \xi^{\bar{e}}_{\mu}.$$

若 $\sum_{c \neq \bar{a}} T^{\bar{a}c} G^{c\bar{a}} < 1$，则由上式得

$$\xi^{\bar{a}}_{\mu} = \sum_{\bar{e} \neq \bar{a}} \left[\left(\sum_{c \neq \bar{a}} T^{\bar{a}c} G^{c\bar{e}} \right) \Big/ \left(1 - \sum_{c \neq \bar{a}} T^{\bar{a}c} G^{c\bar{a}} \right) \right] \xi^{\bar{e}}_{\mu}.$$

但

$$\sum_{\bar{e} \neq \bar{a}} \left[\left(\sum_{c \neq \bar{a}} T^{\bar{a}c} G^{ce} \right) \Big/ \left(1 - \sum_{c \neq \bar{a}} T^{\bar{a}c} G^{c\bar{a}} \right) \right] \leqslant 1,$$

故这与假设 $\xi^{\bar{a}}_{\mu}$ 为极点矛盾. 因此可设

$$\sum_{c \neq \bar{a}} T^{\bar{a}c} G^{c\bar{a}} = 1.$$

由此及(3.17)知 $G^{c\bar{a}} = 1$, $\forall c \neq \bar{a}$. 进而 $G^{c\bar{a}} = 1$, $\forall c$. 于是 $G^{c\bar{e}} = 0$, $\forall \bar{e} \neq \bar{a}$, $\forall c$. 这表明 $\forall c \in A$,

$$\xi_\lambda^c = \sum_{\bar{e}} G^{c\bar{e}} \xi_\lambda^{\bar{e}} = \xi_\lambda^{\bar{a}}.$$

这与 P_λ 非累赘假设相悖. 至此,我们证得 $\mathfrak{S}$ 有限.

在(3.15)中命 λ 沿 $\{\lambda_n''\}$ 趋于 ∞,得

$$\mathfrak{N} = (\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\mu + \mathfrak{S})\mathfrak{M}_\mu = (\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\mu + \mathfrak{S})\mathfrak{G}\bar{\mathfrak{M}}_\mu. \tag{3.19}$$

此处 $\bar{\mathfrak{M}}$ 表 $\mathfrak{M}$ 在 $\bar{A} \times A$ 上的限制. 往证矩阵 $(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\mu + \mathfrak{S})\mathfrak{G}$ 可逆. 先证它的非对角线元素非正. 事实上,由

$$\begin{aligned}
&\sum_c \left[\sum_t M_\lambda^{\bar{a}t}(U_\mu^{tc} - U_\lambda^{tc}) + \delta_{\bar{a}c}\right] G^{c\bar{e}} \\
&\quad = \sum_c \sum_t M_\lambda^{\bar{a}t}(U_\mu^{tc} - U_\lambda^{tc})G^{c\bar{e}} + G^{\bar{a}\bar{e}} \\
&\quad \leqslant 0 \qquad (\bar{a} \neq \bar{e},\ \mu \leqslant \lambda)
\end{aligned}$$

知

$$\begin{aligned}
&[(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\mu + \mathfrak{S})\mathfrak{G}]^{\bar{a}\bar{e}} \\
&= \lim_{\lambda_n'' \to \infty} \sum_c \left(\sum_t N_\lambda^{\bar{a}t} U_\mu^{tc} + S_\lambda^{\bar{a}c}\right) G^{c\bar{e}} \\
&= \lim_{\lambda_n'' \to \infty} \left(\sum_b M_\lambda^{\bar{a}b}\right)^{-1} \left[\sum_t M_\lambda^{\bar{a}t} U_\mu^{tc} + \delta_{\bar{a}c} - \sum_t M_\lambda^{\bar{a}t} U_\lambda^{tc}\right] G^{c\bar{e}} \\
&\leqslant 0 \qquad (\bar{a} \neq \bar{e}).
\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}
&\sum_{\bar{e}} [(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\mu + \mathfrak{S})\mathfrak{G}]_{\bar{a}\bar{e}} \lambda \langle \xi_\lambda^{\bar{a}}, 1\rangle \\
&\quad = \sum_{\bar{e}} [(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\mu + \mathfrak{S})\mathfrak{G}]_{\bar{a}\bar{e}} \lambda \sum_t M_\lambda^{\bar{e}t} \langle \eta_\lambda^t, 1\rangle \\
&\quad = \lambda \sum_t N^{\bar{a}t} \langle \eta_\lambda^t, 1\rangle (\text{由}(3.19)),
\end{aligned}$$

由于 $\forall t,\ \lambda\langle \eta_\lambda^t, 1\rangle > 0,\ \forall \bar{a},\ \sum_t N^{\bar{a}t} = 1$, 所以

$$\sum_{\bar{e}} [(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\mu + \mathfrak{S})\mathfrak{G}]_{\bar{a}\bar{e}} \lambda \langle \xi_\lambda^{\bar{e}}, 1\rangle > 0. \tag{3.20}$$

这样,以

$$[(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\mu + \mathfrak{S})\mathfrak{G}]_{\bar{a}\bar{e}} \lambda \langle \xi_\lambda^{\bar{e}}, 1\rangle$$

为元素的矩阵可逆,并且逆矩阵非负. 进而 $(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\mu + \mathfrak{S})\mathfrak{G}$ 有非负逆矩阵. 于是由(3.19)得到

$$\bar{\mathfrak{M}}_\lambda = [(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\lambda + \mathfrak{S})\mathfrak{G}]^{-1}\mathfrak{N}, \tag{3.21}$$

进而

$$\mathfrak{M}_\lambda = \mathfrak{G}\bar{\mathfrak{M}}_\lambda = \mathfrak{G}[(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\lambda + \mathfrak{S})\mathfrak{G}]^{-1}\mathfrak{N}. \tag{3.22}$$

由(3.11)和(3.14),知,当 $c \neq \bar{a}$ 时,

$$-S_\lambda^{\bar{a}c} = \sum_{d \in A} N_\lambda^{\bar{a}d} U_\lambda^{dc},$$

故当 $\lambda_n'' \to \infty$ 时,应有

$$+\infty > -S^{\bar a c} \geqslant \sum_{d\in A} N^{\bar a d} U^{dc}.$$

此处“$\geqslant$”是因约定了 $0\cdot\infty=0$．如果 $\mathfrak{A}$ 的 c 列元素有限，则上式应成立等号．

在定理 2.3 证明的开头，我们已经说明范条件等价于

$$\mathfrak{M}_\lambda(\{\tau\}_A + \mathfrak{A}_\lambda\{1\}_A) \leqslant \{1\}_A, \tag{3.23}$$

由此立知

$$\bar{\mathfrak{M}}_\lambda(\{\tau\}_A + \mathfrak{A}_\lambda\{1\}_A) \leqslant \{1\}_{\bar A}. \tag{3.24}$$

反之，若(3.24)成立，则两边左乘 $\mathfrak{G}$，便知(3.23)成立．故范条件也等价于(3.24)．进而，它又等价于

$$[(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\lambda + \mathfrak{S})\mathfrak{G}]^{-1}\mathfrak{N}(\{\tau\}_A + \mathfrak{A}_\lambda\{1\}_A) \leqslant \{1\}_{\bar A}$$

或

$$\mathfrak{S}\mathfrak{G}\{1\}_{\bar A} \geqslant \mathfrak{N}[\{\tau\}_A + \mathfrak{A}_\lambda(\{1\}_A - \mathfrak{G}\{1\}_{\bar A})].$$

命 $\lambda\to\infty$，即知范条件等价于(3.4)．

显然，$\mathfrak{M}_\lambda$ 对称等价于(3.5)成立．

最后由前段所证，过程不断的充要条件是

$$\mathfrak{S}\mathfrak{G}\{1\}_{\bar A} = \mathfrak{N}[\{\tau\}_A + \mathfrak{A}_\lambda(\{1\}_A - \mathfrak{G}\{1\}_{\bar A})].$$

若过程不断，则由(2.17)和(3.9)易见，首先必须(3.7)成立． 于是由上式知(3.8)成立．反之，若(3.7)和(3.8)成立，则上式成立．故过程不断．至此，必要性证毕．

(II) 充分性

范条件和 $\mathfrak{M}_\lambda$ 的对称性在必要性部分已经证明． 故我们只须再证明在定理的条件下矩阵 $(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\lambda + \mathfrak{S})\mathfrak{G}$ 可逆，并且 P_λ 满足预解条件．

由(3.3)知

$$-\sum_{c\neq\Delta} S^{\bar a c}G^{c\bar e} \geqslant \sum_{c\neq\Delta}\sum_{t\in A} N^{\bar a t}U^{tc}G^{c\bar e}.$$

注意到 $G^{\bar a\bar e}=0\ (\bar a\neq\bar e)$，便得

$$\begin{aligned}-\sum_{c} S^{\bar a c}G^{c\bar e} &\geqslant \sum_{c}\sum_{t} N^{\bar a t}U^{tc}G^{c\bar e}\\ &\geqslant \sum_{c}\sum_{t} N^{\bar a t}U^{tc}_\lambda G^{c\bar e} \qquad (\bar a\neq\bar e).\end{aligned}$$

此即表明矩阵 $(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\lambda + \mathfrak{S})\mathfrak{G}$ 的非对角线元素非正．另一方面，由(3.4)、(3.2)及 $\mathfrak{A}_\lambda$ 的对角线元素大于零知

$$\begin{aligned}(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\lambda + \mathfrak{S})\mathfrak{G}\{1\}_{\bar A} &= \mathfrak{N}\mathfrak{A}_\lambda\mathfrak{G}\{1\}_{\bar A} + \mathfrak{S}\mathfrak{G}\{1\}_{\bar A}\\ &\geqslant \mathfrak{N}\mathfrak{A}_\lambda\mathfrak{G}\{1\}_{\bar A} + \mathfrak{N}\{\tau\}_A + \mathfrak{N}\mathfrak{A}_\lambda(\{1\}_A - \mathfrak{G}\{1\}_{\bar A})\\ &= \mathfrak{N}\mathfrak{A}_\lambda\{1\}_A + \mathfrak{N}\{\tau\}_A \geqslant \mathfrak{N}\mathfrak{A}_\lambda\{1\}_A > 0.\end{aligned} \tag{3.25}$$

故 $(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\lambda + \mathfrak{S})\mathfrak{G}$ 可逆．

由定理 2.3 的证明中可见，为验证 P_λ 满足预解条件，我们只须证明 $\mathfrak{M}_\lambda$ 满足方程(2.77)．现在，

$$\begin{aligned}&\mathfrak{M}_\lambda(\mathfrak{A}_\mu - \mathfrak{A}_\lambda)\mathfrak{M}_\mu\\ &= \mathfrak{G}[(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\lambda + \mathfrak{S})\mathfrak{G}]^{-1}\mathfrak{N}(\mathfrak{A}_\mu - \mathfrak{A}_\lambda)\mathfrak{G}[(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\mu + \mathfrak{S})\mathfrak{G}]^{-1}\mathfrak{N}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathfrak{G}[(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\lambda + \mathfrak{S})\mathfrak{G}]^{-1}[(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\mu + \mathfrak{S})\mathfrak{G} \\
&\quad - (\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\lambda + \mathfrak{S})\mathfrak{G}][(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\mu + \mathfrak{S})\mathfrak{G}]^{-1}\mathfrak{N} \\
&= \mathfrak{G}[(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\mu + \mathfrak{S})\mathfrak{G}]^{-1}\mathfrak{N} - \mathfrak{G}[(\mathfrak{N}\mathfrak{A}_\mu + \mathfrak{S})\mathfrak{G}]^{-1}\mathfrak{N} \\
&= \mathfrak{M}_\lambda - \mathfrak{M}_\mu. \qquad (3.26)
\end{aligned}
$$

定理证毕.

对于不断情形，定理 2.4 可以叙述得更为简洁. 因为 $\sum_{\bar a\in\bar A} G^{a\bar a} = 1 \quad (a \in A)$，故

$$
\begin{aligned}
\sum_{a\in A} X_\lambda^a \xi_\lambda^a &= \sum_{a\notin\bar A} X_\lambda^a \xi_\lambda^a + \sum_{\bar a\in\bar A} X_\lambda^{\bar a}\xi_\lambda^{\bar a} = \sum_{a\notin\bar A} X_\lambda^a \sum_{\bar a\in\bar A} G^{a\bar a}\xi_\lambda^{\bar a} + \sum_{\bar a\in\bar A} X_\lambda^{\bar a}\xi_\lambda^{\bar a} \\
&= \sum_{\bar a\in\bar A}\left[X_\lambda^{\bar a} + \sum_{a\notin\bar A} X_\lambda^a G^{a\bar a}\right]\xi_\lambda^{\bar a}.
\end{aligned}
$$

若命

$$
\tilde X_\lambda^{\bar a} = X_\lambda^{\bar a} + \sum_{a\notin\bar A} X_\lambda^a G^{a\bar a} \qquad (\bar a \in \bar A), \tag{3.27}
$$

则 $\tilde X_\lambda^{\bar a}(\bar a \in \bar A)$ 也满足 §2 开头的全部条件. 即它也是一族逗留解. 另一方面，由

$$
\xi_\lambda^a = \sum_{\bar a\in\bar A} G^{a\bar a}\xi_\lambda^{\bar a} \qquad (a \in A)
$$

导出

$$
M_\lambda^{ab} = \sum_{\bar a\in\bar A} G^{a\bar a} M_\lambda^{\bar a b} \qquad (a, b \in A).
$$

再由 $\mathfrak{M}_\lambda$ 的对称性得

$$
M_\lambda^{ba} = \sum_{\bar a\in\bar A} G^{a\bar a} M_\lambda^{b\bar a} \qquad (a, b \in A).
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\xi_\lambda^{\bar a} &= \sum_{c\in A} M_\lambda^{\bar a c}\eta_\lambda^c = \sum_{\bar c\in\bar A} M_\lambda^{\bar a\bar c}\eta_\lambda^{\bar c} + \sum_{c\notin A} M_\lambda^{\bar a c}\eta_\lambda^c \\
&= \sum_{\bar c\in\bar A} M_\lambda^{\bar a\bar c}\eta_\lambda^{\bar c} + \sum_{c\notin\bar A}\left(\sum_{\bar c\in\bar A} G^{c\bar c} M_\lambda^{\bar a\bar c}\right)\eta_\lambda^c \\
&= \sum_{\bar c\in\bar A} M_\lambda^{\bar a\bar c}\left[\eta_\lambda^{\bar c} + \sum_{c\notin A} G^{c\bar c}\eta_\lambda^c\right].
\end{aligned}
$$

若命

$$
\tilde\eta_\lambda^{\bar a} = \eta_\lambda^{\bar a} + \sum_{a\notin\bar A} G^{a\bar a}\eta_\lambda^a \qquad (\bar a \in \bar A), \tag{3.28}
$$

则

$$
\tilde\eta_\lambda^{\bar a} = \tilde X_\lambda^{\bar a}\Pi \qquad (\bar a \in \bar A) \tag{3.29}
$$

也满足我们的要求，并且 P_λ 可表成

$$
P_\lambda = P_\lambda^{\min} + \sum_{\bar a\in\bar A}\sum_{\bar b\in\bar A} M_\lambda^{\bar a\bar b}\tilde X_\lambda^{\bar a}\tilde\eta_\lambda^{\bar b}, \tag{3.30}
$$

并且

$$
\tilde\xi_\lambda^{\bar a} = \xi_\lambda^{\bar a} = \sum_{\bar c\in\bar A} M_\lambda^{\bar a\bar c}\tilde\eta_\lambda^{\bar c}. \tag{3.31}
$$

这就化成了 $A=\bar{A}$，且 $\mathfrak{G}$ 为单位矩阵的情形．因此，不失一般性，可取 $\mathfrak{G}$ 为单位矩阵．由此不难证明

定理 3.2 设 Q 保守、弱可配称，并且配称列 (π_i) 满足(2.1)．再设 Q 是 $m(1\leqslant m<\infty)$ 流出的．任取流出边界的一个不交划分，使边界分为 $|A|\leqslant m$ 个部分．

选择 $A\times A$ 上的一个随机矩阵 $\mathfrak{M}$，

$$M^{ab}\geqslant 0\quad (a,b\in A),\qquad \sum_b M^{ab}=1\qquad (a\in A), \tag{3.32}$$

选择 $A\times A$ 上一个有限矩阵 $\mathfrak{S}$，使

$$+\infty>-S^{ab}\geqslant\sum_{t\in A}M^{at}U^{tb}\qquad (a\neq b), \tag{3.33}$$

$$\mathfrak{S}\{1\}_A=\mathfrak{M}\{\pi_A\}, \tag{3.34}$$

$$\mathfrak{M}\mathfrak{S}'=\mathfrak{S}\mathfrak{M}'. \tag{3.35}$$

此处约定 $0\cdot\infty=0$．如果 $\mathfrak{A}$ 的第 b 列全有限，则对于这个 b 和一切 a，(3.33) 式取等号．最后，取

$$\mathfrak{M}_\lambda=(\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda+\mathfrak{S})^{-1}\mathfrak{M}, \tag{3.36}$$

则由(3.36)和(2.18)所定义的 P_λ 是一个不断的有势 Q 过程．反之，每一个不断的有势 Q 过程可用这种方式得到．

§4. 可配称、可逆 Q 过程

本节继续 §2 和 §3，讨论有限流出可配称、可逆 Q 过程的构造．

我们注意，当 Q 可配称时，条件(2.1)自然满足．因此，将定理 2.3、定理 3.1 和定理 3.2 中的"有势"换成"可配称"，便得到可配称 Q 过程的构造定理．这里不再重述．

下面讨论可逆 Q 过程．

对于给定的 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$，称 i 直达 j，如果 $q_{ij}>0$．记作 $i\to j$．如果存在 E 中的 $i_1,i_2,\cdots,i_k$，使 $i\to i_1\to i_2\to\cdots\to i_k\to j$，则称 i 可达 j，并记作 $i\rightsquigarrow j$．如果 $i\rightsquigarrow j$，且 $j\rightsquigarrow i$，则称 i 与 j 互达，并记作 $i\leftrightsquigarrow j$．设 $Q=(q_{ij})$ 零同，即

$$q_{ij}=0\Longleftrightarrow q_{ji}=0,\qquad \forall i,j\in E. \tag{4.1}$$

定义等价关系～：

$$i\sim j\ \text{当且仅当}\ i\leftrightsquigarrow j\ \text{或}\ i=j. \tag{4.2}$$

依此关系将 E 分成等价类 $(E_l: l\in D)$，使得对于每一对 $i,j\in E_l$，$i\neq j$，有 $i\leftrightsquigarrow j$．Q 限于 E_l 得 Q_l．它也是一个 Q 矩阵，称为 Q 的子块．如果 $|D|=1$，即只有一块，则称 Q 是既约的；否则称为可约的．

定理 4.1 设 Q 是保守 Q 矩阵，并且是 $m(0\leqslant m<\infty)$ 流出的．那么

(i) 若 $m=0$，则可逆 Q 过程存在的充要条件是 Q 既约、可配称，而在 Q 既约、可配称时，唯一的可逆 Q 过程是最小 Q 过程．

(ii) 若 $m=1$，则可逆 Q 过程存在的充要条件是 Q 既约、可配称．而在 Q 既约、可配称时，唯一的可逆 Q 过程是

$$P_{ij}(\lambda)=P_{ij}^{\min}(\lambda)+\bar{X}_\lambda(i)\pi_j\bar{X}_\lambda(j)\Big/\lambda\sum_k\pi_k\bar{X}_\lambda(k). \tag{4.3}$$

(iii) 若 $m>1$，且 Q 既约，则可逆 Q 过程存在的充要条件是 Q 可配称．而在 Q 可配称时，定理 3.2 所构造的每一个可配称 Q 过程都是可逆 Q 过程，并且每一个可逆 Q 过程可以用这种方式得到．

(iv) 若 $m>1$，且 Q 可约，则可逆 Q 过程存在的充要条件是 Q 可配称，且 Q 的每一子块非零流出．而在条件满足时，则定理 3.2 所构造的每一个可配称 Q 过程，只要满足

$$\sum_{a\in A}\sum_{b\in A}M_\lambda^{ab}\pi_jX_\lambda^a(i)X_\lambda^b(j)>0 \qquad \forall i\in E_l,\ \forall j\notin E_l,\ \forall l\in D \tag{4.4}$$

就是一个可逆 Q 过程．并且每一个可逆 Q 过程可以用这种方式得到．

证

(i) 见[4]．

(ii) 见[2;定理 2.6.3 和定理 2.6.4]．

(iii) 前一项断言由定理 1.7 推出，往证后一项断言．注意 Q 既约，故由 [3; 系 3.5.1] 易证，对于每一对 $i,j\in E$，

$$P_{ij}^{\min}(\lambda)>0. \tag{4.5}$$

于是

$$P_\lambda\geqslant P_\lambda^{\min}>0. \tag{4.6}$$

由此及 P_λ 的可配称性即知 P_λ 可逆([4，命题 2.2])．

(iv) 前一项断言也由定理 1.7 推出，往证后一项断言．限于每一个子块 Q_l，Q_l 既约，故与 (iii) 一样，有

$$P_{ij}^{\min}(\lambda)>0, \qquad \forall i,j\in E_l,\ \forall l\in D. \tag{4.7}$$

于是

$$P_{ij}(\lambda)\geqslant P_{ij}^{\min}(\lambda)>0, \qquad \forall i,\ j\in E_l,\ \forall l\in D. \tag{4.8}$$

又由(4.4)及 $P_{ij}^{\min}(\lambda)=0,\ i\in E_l,\ j\notin E_l,\ l\in D$ ([3;定理 4.2.1]) 知

$$P_{ij}(\lambda)=\sum_a\sum_b M_\lambda^{ab}\pi_jX_\lambda^a(i)X_\lambda^b(j)>0, \tag{4.9}$$

$$\forall i\in E_l,\ \forall j\notin E_l,\ \forall l\in D.$$

故

$$P_{ij}(\lambda)>0,\ \forall i,\ j\in E. \tag{4.10}$$

于是与 (iii) 一样证得 P_λ 可逆，定理证毕．

命题 4.1 在定理 4.1 的 (iv) 中，如果

$$\mathfrak{M}_\lambda>0, \tag{4.11}$$

则条件(4.4)满足．

证 由 (iv) 中假设知

$$\bar{X}_\lambda>0. \tag{4.12}$$

于是由(2.4)立知

$$\sum_a\sum_b M_\lambda^{ab}X_\lambda^a(i)\pi_jX_\lambda^b(j)>0. \qquad \forall i,\ j\in E \tag{4.13}$$

故条件(4.4)满足，证毕.

§5. 不断的有势 Q 过程的存在准则

自本节开始，我们讨论不断的有势（可配称、可逆）Q 过程的存在、唯一性问题. 本节讨论存在性，后两节讨论唯一性. 鉴于可配称、可逆情形的存在性已解决，本节给出有限流出不断的有势 Q 过程的存在准则.

定理 5.1　设 $Q=(q_{ij})$ 是一个保守、$m(0\leqslant m<\infty)$ 流出 Q 矩阵. 则存在不断的有势 Q 过程的充要条件是 Q 弱可配称且条件 (2.1) 成立.

证　$m=0$ 的情形不足道. 以下设 $m\geqslant 1$. 充分性见[5; 定理 3]. 往证必要性.

由[8; 定理 1 和 §3 引理 1]知，每一个 Q 过程形如

$$P_\lambda=P_\lambda^{\min}+\{X_\lambda\}_1^{m'}\mathfrak{M}_\lambda\{\xi_\lambda\}_1^n, \tag{5.1}$$

此处 $\xi_\lambda^b(b=1,2,\cdots,n)$ 满足(2.24). 如果条件 (2.1) 不满足，则由 (2.3) 知，存在 $X_\lambda^a(1\leqslant a\leqslant m)$ 无妨设是 X_λ^1，使

$$\sum_i \pi_i X_\lambda^1(i)=\infty. \tag{5.2}$$

今设 P_λ 是一个不断的有势 Q 过程，则由 $m\geqslant 1$ 知 $P_\lambda^{\min}$ 中断，从而 $\xi_\lambda^b(b=1,2,\cdots,n)$ 不全为零. 如有某个 ξ_λ^b 为零，不影响 P_λ 的表达式，可将它去掉. 故不失一般性，可假定

$$\xi_\lambda^b\neq 0,\qquad b=1,2,\cdots,n. \tag{5.3}$$

由 P_λ 不断知

$$\begin{aligned}1=\lambda\sum_j P_{ij}(\lambda)&=\lambda\sum_j P_{ij}^{\min}(\lambda)+\lambda\sum_{a=1}^m\sum_{b=1}^n M_\lambda^{ab}X_\lambda^a(i)\sum_j\xi_\lambda^b(j)\\&\geqslant\lambda\sum_{a=1}^m\sum_{b=1}^n M_\lambda^{ab}X_\lambda^a(i)\sum_j\xi_\lambda^b(j),\qquad\forall i\in E.\end{aligned} \tag{5.4}$$

又由 P_λ 有势得

$$\sum_{a=1}^m\sum_{b=1}^n M_\lambda^{ab}\pi_i X_\lambda^a(i)\xi_\lambda^b(j)=\sum_{a=1}^m\sum_{b=1}^n M_\lambda^{ab}\pi_j X_\lambda^a(j)\xi_\lambda^b(i). \tag{5.5}$$

所以

$$\begin{aligned}&\lambda\sum_{a=1}^m\sum_{b=1}^n M_\lambda^{ab}X_\lambda^a(i)\sum_j\xi_\lambda^b(j)\\&\quad=\lambda\pi_i^{-1}\sum_{a=1}^m\sum_{b=1}^n M_\lambda^{ab}\sum_j\pi_j X_\lambda^a(i)\xi_\lambda^b(j),\qquad\forall i\in E.\end{aligned} \tag{5.6}$$

进而得到

$$1\geqslant\lambda\pi_i^{-1}\sum_{b=1}^n M_\lambda^{1b}\sum_j\pi_j X_\lambda^1(j)\xi_\lambda^b(i),\qquad\forall i\in E. \tag{5.7}$$

利用 $\xi_\lambda^b\neq 0$ 及 (5.2) 得

$$M_\lambda^{1b}=0,\qquad b=1,2,\cdots,n. \tag{5.8}$$

这样，我们可将 P_λ 改写成

$$P_\lambda = P_\lambda^{\min} + \{X_\lambda\}_2^{m\prime}\mathfrak{M}_\lambda\{\xi_\lambda\}_1^n. \tag{5.9}$$

再用一次 P_λ 不断性得

$$\lambda^{-1} = C_\lambda(i) = C_\lambda^{\min}(i) + \sum_{a=2}^{m}\sum_{b=1}^{n} M_\lambda^{ab}X_\lambda^a(i)\sum_j \xi_\lambda^b(j). \tag{5.10}$$

命 $i \to \omega^{(1)}$，由 [7;定理6.2]、(2.2)和(2.24)知上式右方趋于零．这便导致矛盾．证毕．

§ 6. 唯一性:双流出情形

本节考虑双流出情形,同时也为研究一般情形的唯一性问题作个准备．

命题 6.1 设

$$P_\lambda = P_\lambda^{\min} + \{X_\lambda\}_1^{m\prime}\mathfrak{M}_\lambda\{X_\lambda'\Pi\}_1^m, \tag{6.1}$$

$$\tilde{P}_\lambda = P_\lambda^{\min} + \{X_\lambda\}_1^{m\prime}\tilde{\mathfrak{M}}_\lambda\{X_\lambda'\Pi\}_1^m \tag{6.2}$$

是两个有势 Q 过程,则 $P_\lambda = \tilde{P}_\lambda$ 的充要条件是 $\mathfrak{M}_\lambda = \tilde{\mathfrak{M}}_\lambda$.

证 充分性显然,往证必要性．设 $P_\lambda = \tilde{P}_\lambda$，则

$$\{X_\lambda\}_1^{m\prime}\mathfrak{M}_\lambda\{X_\lambda'\Pi\}_1^m = \{X_\lambda\}_1^{m\prime}\tilde{\mathfrak{M}}_\lambda\{X_\lambda'\Pi\}_1^m, \tag{6.3}$$

即

$$\{X_\lambda\}_1^{m\prime}(\mathfrak{M}_\lambda - \tilde{\mathfrak{M}}_\lambda)\{\eta_\lambda\}_1^m = 0. \tag{6.4}$$

然后使用定理 2.2 最后一部分证明立知

$$\mathfrak{M}_\lambda = \tilde{\mathfrak{M}}_\lambda. \tag{6.5}$$

命题得证.

现在假设 $Q = (q_{ij})$ 是双流出的,并设 Q 保守、弱可配称,它有配称列 (π_i)，满足

$$\sum_i \pi_i\bar{X}_\lambda(i) < \infty. \tag{6.6}$$

X_λ^a, η_λ^a, U_λ^{ab} 等记号均见 §2，只是此处 $m = 2$.

定理 6.1 设 $Q = (q_{ij})$ 是保守的双流出 Q 矩阵，它有满足(6.6)的配称列 (π_i)．那么,关于 (π_i) 的不断的有势 Q 过程或者唯一,或者有无穷多个．详言之:

(i) 若 $U^{11} = U^{12}(=U^{21}) = \infty$，或者 $U^{22} = U^{12}(=U^{21}) = \infty$，则不断的有势 Q 过程唯一;

(ii) 在其余情况下,有无穷多个不断的有势 Q 过程.

证 (i) 根据定理 2.2，有势 Q 过程必定形如

$$P_\lambda = P_\lambda^{\min} + \{X_\lambda\}_1^{2\prime}\mathfrak{M}_\lambda\{X_\lambda'\Pi\}_1^2, \tag{6.7}$$

于是由条件(i)及定理 3.2 知,它必定形如

$$P_\lambda = P_\lambda^{\min} + \bar{X}_\lambda M_\lambda \bar{X}_\lambda'\Pi. \tag{6.8}$$

但形如(6.8)的不断的有势 Q 过程唯一([5;定理 3])．证得 (i).

(ii) 此时有五种情况可能发生:

(I) $\mathfrak{A} < \infty$;

(II) $U^{11} = \infty$，但 $U^{12} = U^{21} < \infty$，$U^{22} < \infty$;

(III) $U^{22} = \infty$，但 $U^{12} = U^{21} < \infty$，$U^{11} < \infty$;

(IV) $U^{11}=U^{22}=\infty$，但 $U^{12}=U^{21}<\infty$；

(V) $U^{12}=U^{21}=\infty$，但 $U^{11}<\infty$，$U^{22}<\infty$.

因为 (II) 和 (III)对称，故我们只须讨论 (I)、(II)、(IV) 和 (V). 现在分别加以讨论.

(I) $\mathfrak{U}<\infty$.

由假设知

$$\max\{(U^{12}+U^{22}+\tau_2),(U^{11}+U^{12}+\tau_1)\}<\infty, \tag{6.9}$$

故满足

$$0<M<\{(U^{12}+U^{22}+\tau_2)+(U^{11}+U^{12}+\tau_1)\}^{-1} \tag{6.10}$$

的M存在，而且有无穷多个. 任取其中之一，并命

$$M^{11}=\frac{1-M(U^{12}+U^{22}+\tau_2)}{U^{11}+U^{12}+\tau_1}, \tag{6.11}$$

$$M^{22}=\frac{1-M(U^{11}+U^{12}+\tau_1)}{U^{12}+U^{22}+\tau_2}, \tag{6.12}$$

$$\mathfrak{M}=\begin{pmatrix}M^{11} & M\\ M & M^{22}\end{pmatrix}, \tag{6.13}$$

$$\mathfrak{S}=\mathfrak{M}\mathfrak{U}=\begin{pmatrix}M^{11}U^{11}+MU^{12}, & M^{11}U^{12}+MU^{22}\\ MU^{11}+M^{22}U^{12}, & MU^{12}+M^{22}U^{22}\end{pmatrix}, \tag{6.14}$$

则 $\mathfrak{M}$ 是非负对称矩阵，并且由 (6.11)—(6.14) 知

$$\mathfrak{S}\{1\}_1^2+\mathfrak{M}\{\tau\}_1^2$$
$$=\begin{pmatrix}M^{11}(U^{11}+U^{12})+M(U^{12}+U^{22})\\ M(U^{11}+U^{12})+M^{22}(U^{12}+U^{22})\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}M^{11}\tau_1+M\tau_2\\ M\tau_1+M^{22}\tau_2\end{pmatrix}=\{1\}_1^2. \tag{6.15}$$

故定理 2.3 的条件得以满足. 于是，由(6.13)、(6.14)、(2.73)和(6.7)所定义的 P_λ 是一个不断的有势Q过程.

今设 $\tilde{M}$ 满足(6.10)，并仿(6.11)—(6.14)和(2.73)定义 $\tilde{\mathfrak{M}}_\lambda$. 往证

$$\mathfrak{M}_\lambda=\tilde{\mathfrak{M}}_\lambda\Longleftrightarrow\mathfrak{M}=\tilde{\mathfrak{M}}. \tag{6.16}$$

事实上，若 $\mathfrak{M}_\lambda=\tilde{\mathfrak{M}}_\lambda$，即

$$(I-\mathfrak{S}+\mathfrak{M}\mathfrak{U}_\lambda)^{-1}\mathfrak{M}=(I-\tilde{\mathfrak{S}}+\tilde{\mathfrak{M}}\mathfrak{U}_\lambda)^{-1}\tilde{\mathfrak{M}} \tag{6.17}$$

由(6.10)—(6.13)知 $\mathfrak{M}$ 和 $\tilde{\mathfrak{M}}$ 都是可逆的. 于是

$$\mathfrak{M}^{-1}(I-\mathfrak{M}\mathfrak{U}+\mathfrak{M}\mathfrak{U}_\lambda)=\tilde{\mathfrak{M}}^{-1}(I-\tilde{\mathfrak{M}}\mathfrak{U}+\tilde{\mathfrak{M}}\mathfrak{U}_\lambda), \tag{6.18}$$

即

$$\mathfrak{M}^{-1}-\mathfrak{U}+\mathfrak{U}_\lambda=\tilde{\mathfrak{M}}^{-1}-\mathfrak{U}+\mathfrak{U}_\lambda. \tag{6.19}$$

故

$$\mathfrak{M}=\tilde{\mathfrak{M}}. \tag{6.20}$$

反之，则是显然的.

现在，由(6.16)，命题 6.1 以及 $\mathfrak{M}$ 有无穷多个(因为满足(6.10)的M有无穷多个)立知此时不断的有势Q过程有无穷多个.

(II) $U^{11}=\infty$，但 $U^{12}=U^{21}<\infty$，$U^{22}<\infty$.

取

$$-S^{21} > U^{12}, \tag{6.21}$$

由假设，S^{21} 有无穷多种取法．再取

$$\begin{aligned} M^{11} &= \frac{S^{21} - \tau_2 - U^{22}}{2S^{21} + U^{12} - \tau_2 - U^{22}}, \qquad (6.22)\\ M^{12} &= 1 - M^{11}, \\ M^{21} &= 0,\ M^{22} = 1, \\ -S^{12} &= M^{11}U^{12} + M^{12}U^{22}, \\ S^{11} &= \tau_1 - S^{12}, \\ S^{22} &= \tau_2 - S^{21}, \end{aligned}$$

则由(6.21)得

$$2S^{21} + U^{12} - \tau_2 - U^{22} < S^{21} - \tau_2 - U^{22} < -U^{12} - \tau_2 - U^{22} \leqslant 0.$$

从而

$$0 < M^{11} < 1, \quad 0 < M^{12} < 1.$$

又

$$\mathfrak{S}\{1\}_1^2 = \{\tau\}_1^2, \tag{6.23}$$

$$\mathfrak{S}\mathfrak{M}' = \begin{pmatrix} S^{11} & S^{12} \\ S^{21} & S^{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M^{11} & 0 \\ M^{12} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M^{11}S^{11} + M^{12}S^{12} & S^{12} \\ M^{11}S^{21} + M^{12}S^{22} & S^{22} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}\mathfrak{S}' &= \begin{pmatrix} M^{11} & M^{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S^{11} & S^{21} \\ S^{12} & S^{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} M^{11}S^{11} + M^{12}S^{12} & M^{11}S^{21} + M^{12}S^{22} \\ S^{12} & S^{22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

为证 $\mathfrak{M}\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}\mathfrak{M}'$，只须证

$$S^{12} = M^{11}S^{21} + M^{12}S^{22}$$

或

$$-M^{11}U^{12} - (1 - M^{11})U^{22} = M^{11}S^{21} + (1 - M^{11})(\tau_2 - S^{21}).$$

即

$$M^{11}(U^{12} - U^{22} + 2S^{21} - \tau_2) = S^{21} - \tau_2 - U^{22}.$$

此即是 (6.22)．又

$$-S^{12} = \sum_t M^{1t}U^{t2},$$

$$-S^{21} > \sum_t M^{2t}U^{t1}.$$

这样，我们所选择的 $\mathfrak{S}$ 和 $\mathfrak{M}$ 满足定理 3.2 的所有条件，故由它所定义的 P_λ 是一个不断的有势 Ω 过程．因此，为证明有无穷多个不断的有势 Ω 过程存在，如同 (I) 那样，我们只需证明：对于任意选择的另一个 $\tilde{\mathfrak{S}}$，用同样方法定义 $\tilde{\mathfrak{M}}_\lambda$，则有

$$\mathfrak{M}_\lambda = \tilde{\mathfrak{M}}_\lambda \Longleftrightarrow \mathfrak{S} = \tilde{\mathfrak{S}}. \tag{6.24}$$

事实上，如果 $\mathfrak{S} = \tilde{\mathfrak{S}}$，则根据我们的取法，更有 $\mathfrak{M} = \tilde{\mathfrak{M}}$，于是 $\mathfrak{M}_\lambda = \tilde{\mathfrak{M}}_\lambda$．今设 $\mathfrak{M}_\lambda = \tilde{\mathfrak{M}}_\lambda$．由于 $\mathfrak{M}$ 可逆，应有

$$\mathfrak{M}^{-1}(\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda + \mathfrak{S}) = \tilde{\mathfrak{M}}^{-1}(\tilde{\mathfrak{M}}\mathfrak{A}_\lambda + \tilde{\mathfrak{S}}).$$

于是

$$\mathfrak{M}^{-1}\mathfrak{S} = \tilde{\mathfrak{M}}^{-1}\tilde{\mathfrak{S}}.$$

但

$$\mathfrak{M}^{-1}\mathfrak{S} = \frac{1}{M^{11}}\begin{pmatrix} 1 & -M^{12} \\ 0 & M^{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S^{11} & S^{12} \\ S^{21} & S^{22} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{M^{11}}\begin{pmatrix} S^{11} - M^{12}S^{21} & S^{12} - M^{12}S^{22} \\ M^{11}S^{21} & M^{11}S^{22} \end{pmatrix}.$$

同样

$$\tilde{\mathfrak{M}}^{-1}\tilde{\mathfrak{S}} = \frac{1}{\tilde{M}^{11}}\begin{pmatrix} \tilde{S}^{11} - \tilde{M}^{12}\tilde{S}^{21} & \tilde{S}^{12} - \tilde{M}^{12}\tilde{S}^{22} \\ \tilde{M}^{11}\tilde{S}^{21} & \tilde{M}^{11}\tilde{S}^{22} \end{pmatrix}.$$

比较上面两式得 $\tilde{S}^{21} = S^{21}$. 从而 $\tilde{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S}$. 故(6.24)成立.

(IV) $U^{11} = U^{22} = \infty, U^{12} = U^{21} < \infty$.

取

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6.25}$$

$$-S^{12} = -S^{21} = S > U^{12} = U^{21}, \tag{6.26}$$

$$S^{11} = \tau_1 + S, S^{22} = \tau_2 + S, \tag{6.27}$$

然后易证

$$-S^{ab} > \sum_t M^{at}U^{tb} \qquad (a \neq b), \tag{6.28}$$

$$\mathfrak{S}\{1\}_1^2 = \mathfrak{M}\{\tau\}_1^2, \tag{6.29}$$

$\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{S}$ 均对称,故

$$\mathfrak{M}\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}\mathfrak{M}'. \tag{6.30}$$

因而 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{S}$ 满足定理 3.2 的一切条件. 由假设, $\mathfrak{S}$ 有无穷多种取法,所以只须再证

$$\mathfrak{M}_\lambda = \tilde{\mathfrak{M}}_\lambda \Longleftrightarrow \mathfrak{S} = \tilde{\mathfrak{S}}. \tag{6.31}$$

但这可由 $\mathfrak{M} = \tilde{\mathfrak{M}}$ 为单位矩阵立即导出.

(V) $U^{12} = U^{21} = \infty$, $U^{11} < \infty$, $U^{22} < \infty$.

取

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.32}$$

$$-S^{12} = -S^{21} = S > \max\{U^{11}, U^{22}\}, \tag{6.33}$$

$$S^{11} = \tau_2 + S, \quad S^{22} = \tau_1 + S, \tag{6.34}$$

则

$$-S^{ab} > \sum_t M^{at}U^{tb} \qquad (a \neq b). \tag{6.35}$$

再与上述情形作同样处理. 定理证毕.

下面讨论可逆性.

定理 6.2 设 $Q = (q_{ij})$ 是一个保守的双流出 Q 矩阵. 它可配称并有配称分布 (π_i). 那么,可逆 Q 过程存在的充要条件是 Q 既约,或者 Q 虽非既约,但 Q 的每一子块非零流出.

可逆Q过程存在时,或者唯一,或者有无穷多个. 详言之:

(i) 设存在性条件满足. 若 $U^{11} = U^{12}(=U^{21}) = \infty$,或 $U^{22} = U^{12}(=U^{21}) = \infty$,则可逆$Q$过程唯一;

(ii) 设Q既约,并且 $\mathfrak{A}$ 的每一行至多有一个无穷元,则有无穷多个可逆Q过程;

(iii) 设Q可约,但Q的每一子块非零流出,并且 $\mathfrak{A}$ 的每一行至多只有一个无穷元,则有无穷多个可逆Q过程.

证 存在性断言见定理 1.7. 而由定理 6.1 的(i)立得这里的(i). 而由定理 4.1 的(iii)和定理 6.1 的 (ii) 立得这里的 (ii). 为证明 (iii),由命题 4.1,我们只须证明定理 6.1 的 (I)—(V) 所构造的每一个 $\mathfrak{M}_\lambda$ (或 $\bar{\mathfrak{M}}_\lambda$) 是严格正的便已足够.

先看 (I). 我们已经证明

$$(I - \mathfrak{S} + \mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda)^{-1} \geqslant 0, \tag{6.36}$$

逆矩阵每一行不能全为零,而且(6.13)所定义的 $\mathfrak{M} > 0$. 于是 $\mathfrak{M}_\lambda > 0$. 故此时 (I) 中所构造的每一Q过程可逆.

再看 (II). 因为

$$[\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda + \mathfrak{S}]_{21} = S^{21} + \sum_t M^{2t}U_\lambda^{t1} = S^{21} + U_\lambda^{21} \leqslant S^{21} + U^{21} < 0,$$

$$[\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda + \mathfrak{S}]_{22} = S^{22} + \sum_t M^{2t}U_\lambda^{t2} = \tau_2 - S^{21} + U^{22} \geqslant -S^{21} > 0,$$

又 $\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda + \mathfrak{S}$ 的逆矩阵非负,故它的逆矩阵的第 1 列严格正. 顾及 $\mathfrak{M}$ 除 M^{21} 为零外全大于零,因而 $\mathfrak{M}_\lambda$ 严格正.

在 (IV) 和 (V) 中,我们总取 $-S^{ab} > \sum_t M^{at}U^{tb}(a \neq b)$,从而 $\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda + \mathfrak{S}$ 的非对角线元素全不为零. 至于 (IV) 的对角线元素

$$S^{aa} + \sum_{t=1}^{2} M^{at}U_\lambda^{ta} = S^{aa} + U_\lambda^{aa} = \tau^a + S + U_\lambda^{aa} \geqslant S > 0 \qquad a = 1, 2,$$

而 (V) 的对角线元素

$$S^{11} + \sum_{t=1}^{2} M^{1t}U_\lambda^{t1} = S^{11} + U_\lambda^{21} = \tau_2 + S + U_\lambda^{11} \geqslant S > 0,$$

$$S^{22} + \sum_{t=1}^{2} M^{2t}U_\lambda^{t2} = S^{22} + U_\lambda^{22} = \tau_1 + S + U_\lambda^{22} \geqslant S > 0.$$

由这些事实及 $\mathfrak{M}\mathfrak{A}_\lambda + \mathfrak{S}$ 有非负逆知它的逆矩阵严格正. 又 $\mathfrak{M}$ 每行、每列都有非零元(且为正),从而 $\mathfrak{M}_\lambda$ 严格正. 定理证毕.

在结束本节的时候,我们着重指出: 虽然本节假定了维数 $m = 2$,但我们的构造对于$m \geqslant 2$ 的有限流出情形也是适用的. 这只须把m个流出解结合为两组. 甚至于对非有限流出情形,本节结果的充分性部分也是有意义的. 例如,我们有

定理 6.3 设 $Q = (q_{ij})$ 保守,$m \geqslant 2$. 再设Q有配称列 (π_i),满足 (6.6). 如果存在满足条件 (2.2)—(2.7)的两个逗留解 X_λ^1 和 X_λ^2,使得由它们所定义的矩阵 $\mathfrak{A}$ 的每一行至多有一个无穷元,则存在无穷多个不断的有势Q过程.

§7. 唯一性：一般情形

本节在一般的有限流出条件下，研究不断的有势(可配称) Q 过程和可逆 Q 过程的唯一性问题.

下面是不断的有势 Q 过程的存在、唯一性准则：

定理 7.1 设 $Q=(q_{ij})$ 保守、$m(0\leqslant m<\infty)$ 流出，它有配称列 (π_i)，则不断的有势 Q 过程存在、唯一的充要条件是：(π_i) 满足

$$\sum_i \pi_i \bar{X}_\lambda(i)<\infty, \tag{7.1}$$

并且下述两条件之一成立：

(i) $m\leqslant 1$;

(ii) $m\geqslant 2$，但对于 $X_\lambda^a(a=1,2,\cdots,m)$ 的任意划分

$$\widetilde{X}_\lambda^1=\sum_{l=1}^{n} X_\lambda^{k_l},\qquad 1\leqslant k_1<\cdots<k_n\leqslant m, n<m. \tag{7.2}$$
$$\widetilde{X}_\lambda^2=\bar{X}_\lambda-\widetilde{X}_\lambda^1$$

定义

$$\widetilde{U}_\lambda^{ab}=\lambda \widetilde{X}_\lambda^{a\prime}\Pi\widetilde{X}^b\qquad a,b=1,2, \tag{7.3}$$
$$\widetilde{\mathfrak{A}}_\lambda\uparrow\widetilde{\mathfrak{A}}(\lambda\uparrow\infty) \tag{7.4}$$

都有 $\widetilde{\mathfrak{A}}$ 的一行的元素全是无穷.

证　由定理 4.1，我们无妨假定 (π_i) 满足 (7.1). (i) 是显然的. 为证 $m\geqslant 2$ 的情形，只须证明：条件 (ii) 不成立等价于存在无穷多个不断的有势 Q 过程.

若条件 (ii) 不成立，即存在 $\widetilde{X}_\lambda^1$ 和 $\widetilde{X}_\lambda^2$，使 $\widetilde{\mathfrak{A}}$ 的每一行至多有一个无穷元，则由定理 6.3 知此时有无穷多个不断的有势 Q 过程存在.

反之，设 $m\geqslant 2$，且不断的有势 Q 过程非唯一，往证 (ii) 不真. $m=2$ 的情形见定理 6.1. 以下无妨设 $m>2$. 由定理 2.2，每一个有势 Q 过程形如

$$P_\lambda=P_\lambda^{\min}+\{X_\lambda\}_1^{m\prime}\mathfrak{M}_\lambda\{X_\lambda'\Pi\}_1^m, \tag{7.5}$$

其中 $\mathfrak{M}_\lambda$ 是 $m\times m$ 对称矩阵.

命
$$\{\xi_\lambda\}_1^m=\mathfrak{M}_\lambda\{X_\lambda'\Pi\}_1^m, \tag{7.6}$$

无妨设 $\{\xi_\lambda^a\}$ 非累赘. 否则只须变动一下记号而无损于后面的讨论. 然后由定理 3.1 的证明及 P_λ 不断知，存在随机矩阵 $\mathfrak{G}=(G^{ab})$，使得 ξ_λ^a 可通过它的极点表出. 即存在 $\{1,2,\cdots,m\}$ 的一个子集，无妨设是 $\{1,2,\cdots,n\}$，$n\leqslant m$，使得

$$\xi_\lambda^a=\sum_{b=n+1}^{m} G^{ab}\xi_\lambda^b,\qquad a=1,2,\cdots,m, \tag{7.7}$$

其中

$$\begin{gathered}G^{ab}\geqslant 0,\quad G^{aa}=1,\qquad a=1,2,\cdots,n,\\ \sum_{b=1}^{n} G^{ab}=1,\qquad a=1,2,\cdots,m,\end{gathered} \tag{7.8}$$

如果 $n=1$，则 P_λ 又可表成

$$P_\lambda = P_\lambda^{\min} + \bar{X}_\lambda M_\lambda \bar{X}'_\lambda \Pi. \tag{7.9}$$

但形如(7.9)的不断的有势Q过程唯一，故由非唯一假定，可设$n \geqslant 2$.现在，由定理3.2前面的说明知，我们可命

$$\tilde{X}_\lambda^a = X_\lambda^a + \sum_{b=n+1}^{m} X_\lambda^b G^{ba} \quad a = 1, 2, \cdots, n, \tag{7.10}$$

而将P_λ表成

$$P_\lambda = P_\lambda^{\min} + \{\tilde{X}_\lambda\}_1^{n'} \tilde{\mathfrak{M}}_\lambda \{\tilde{X}'_\lambda \Pi\}_1^n. \tag{7.11}$$

此时由(3.31)知$\xi_\lambda^a\, a = 1, 2, \cdots, n$是极点．由$\tilde{X}_\lambda^a$产生矩阵$\tilde{\mathfrak{U}} = (\tilde{U}^{ab}: a, b = 1, 2, \cdots, n)$．我们说，矩阵$\tilde{\mathfrak{U}}$的每一行、每一列至多只有一个无穷元．否则，例如设$\tilde{U}^{11} = \tilde{U}^{12} = \infty$，则由(3.33)知，矩阵$\tilde{\mathfrak{M}}$的第一列元素全为零．再由(3.36)知，矩阵$\tilde{\mathfrak{M}}_\lambda$的第一行、第一列元素也全是零．故由定理5.1的证明可见P_λ中断．是为矛盾．

先假定$\tilde{\mathfrak{U}}$有无穷元存在．无妨设在第一行有无穷元．分两种情况:

(a) $\tilde{U}^{11} = \infty$.

此时由上段的讨论知

$$\tilde{U}^{1b} < \infty, \qquad b = 2, 3, \cdots, n, \tag{7.12}$$

从而

$$\sum_{b=2}^{n} \tilde{U}^{1b} < \infty. \tag{7.13}$$

命

$$\underset{\sim}{X}_\lambda^1 = X_\lambda^1 + \sum_{\substack{m \geqslant c \geqslant n+1 \\ G^{c1}=1}} X_\lambda^c, \tag{7.14}$$

$$\underset{\sim}{X}_\lambda^2 = \sum_{b=2}^{n} X_\lambda^b + \sum_{\substack{m \geqslant d \geqslant n+1 \\ G^{d1}<1}} X_\lambda^d = \bar{X}_\lambda - \underset{\sim}{X}_\lambda^1, \tag{7.15}$$

则由

$$\begin{aligned} \sum_{b=2}^{n} \tilde{U}_\lambda^{1b} &= \lambda \sum_{b=2}^{n} \left[\eta_\lambda^1 + \sum_{c=n+1}^{m} G^{c1} \eta_\lambda^c\right]\left[X^b + \sum_{d=n+1}^{m} X^d G^{db}\right] \\ &= \sum_{b=2}^{n} U_\lambda^{1b} + \sum_{c=n+1}^{m} G^{c1} \sum_{b=2}^{n} U_\lambda^{cb} + \sum_{d=n+1}^{m} U_\lambda^{1d}(1 - G^{d1}) \\ &\quad + \sum_{c=n+1}^{m} G^{c1} \sum_{d=n+1}^{m} U_\lambda^{cd}(1 - G^{d1}) \uparrow \sum_{b=2}^{n} \tilde{U}^{1b} < \infty \\ &\qquad (\lambda \uparrow \infty), \end{aligned} \tag{7.16}$$

易见

$$\sum_{b=2}^{n} U^{1b} < \infty, \tag{7.17}$$

$$\sum_{\substack{m \geqslant c \geqslant n+1 \\ G^{c1}=1}} \sum_{b=2}^{n} U^{cb} < \infty, \tag{7.18}$$

$$\sum_{\substack{m\geqslant d\geqslant n+1\\ G^{d1}<1}} U^{1d}<\infty, \tag{7.19}$$

$$\sum_{\substack{m\geqslant c\geqslant n+1\\ G^{c1}=1}}\ \sum_{\substack{m\geqslant d\geqslant n+1\\ G^{d1}<1}} U^{cd}<\infty. \tag{7.20}$$

从而

$$\underset{\sim}{U}^{21}=\underset{\sim}{U}^{12}=\lim_{\lambda\to\infty}\Bigg(\sum_{b=2}^{n}U_\lambda^{1b}+\sum_{\substack{m\geqslant c\geqslant n+1\\ G^{c1}=1}}\ \sum_{b=2}^{n}U_\lambda^{cb}+\sum_{\substack{m\geqslant d\geqslant n+1\\ G^{d1}<1}}U_\lambda^{1d}+\sum_{\substack{m\geqslant c\geqslant n+1\\ G^{c1}=1}}\ \sum_{\substack{m\geqslant d\geqslant n+1\\ G^{d1}<1}}U_\lambda^{cd}\Bigg)<\infty. \tag{7.21}$$

这样，我们选到逗留解 $\underset{\sim}{X}_\lambda^1$ 和 $\underset{\sim}{X}_\lambda^2$，使得 $\mathfrak{A}$ 的每行、每列至多有一个无穷元．故此时 (ii) 不成立．

(b) $\widetilde{U}^{1k}=\infty$，$k\neq 1$．无妨设 $k=2$，则

$$\widetilde{U}^{1b}<\infty,\qquad b=1,3,4,\cdots,n. \tag{7.22}$$

由对称性，$\widetilde{U}^{21}=\infty$，从而

$$\widetilde{U}^{2b}<\infty,\qquad b=2,3,\cdots,n. \tag{7.23}$$

进而

$$\sum_{a=1}^{2}\sum_{b=3}^{n}\widetilde{U}^{ab}<\infty. \tag{7.24}$$

命

$$\underset{\sim}{X}_\lambda^1=X_\lambda^1+X_\lambda^2+\sum_{\substack{m\geqslant c\geqslant n+1\\ G^{c1}+G^{c2}=1}}X_\lambda^c, \tag{7.25}$$

$$\underset{\sim}{X}_\lambda^2=\sum_{b=3}^{n}X_\lambda^b+\sum_{\substack{m\geqslant d\geqslant n+1\\ G^{d1}+G^{d2}<1}}X_\lambda^d=\bar{X}_\lambda-\underset{\sim}{X}_\lambda^1, \tag{7.26}$$

则由

$$\begin{aligned}\sum_{a=1}^{2}\sum_{b=3}^{n}\widetilde{U}_\lambda^{ab}&=\sum_{a=1}^{2}\sum_{b=3}^{n}U_\lambda^{ab}+\sum_{c=n+1}^{m}(G^{c1}+G^{c2})\sum_{b=3}^{n}U_\lambda^{cb}\\&\quad+\sum_{a=1}^{2}\sum_{d=n+1}^{m}U_\lambda^{ad}(1-G^{d1}-G^{d2})\\&\quad+\sum_{c=n+1}^{m}(G^{c1}+G^{c2})\sum_{d=n+1}^{m}U_\lambda^{cd}(1-G^{d1}-G^{d2})\\&\uparrow\sum_{a=1}^{2}\sum_{b=3}^{n}\widetilde{U}^{ab}<\infty\qquad(\lambda\uparrow\infty),\end{aligned} \tag{7.27}$$

易见

$$\underset{\sim}{U}^{21}=\underset{\sim}{U}^{12}=\lim_{\lambda\to\infty}\Bigg(\sum_{a=1}^{2}\sum_{b=3}^{n}U_\lambda^{ab}+\sum_{\substack{m\geqslant c\geqslant n+1\\ G^{c1}+G^{c2}=1}}\sum_{b=3}^{n}U_\lambda^{cb}$$

$$+\sum_{a=1}^{2}\sum_{\substack{m\geqslant d\geqslant n+1\\ G^{d1}+G^{d2}<1}}U_\lambda^{ad}+\sum_{\substack{m\geqslant c\geqslant n+1\\ G^{c1}+G^{c2}=1}}\sum_{\substack{m\geqslant d\geqslant n+1\\ G^{d1}+G^{d2}<1}}U_\lambda^{cd}\Bigg)<\infty. \tag{7.28}$$

故此时 (ii) 不成立.

最后,如果 $\mathfrak{A}$ 有限,则更易处理. 特别,可同情况 (a) 一样选 $\underset{\sim}{X}_\lambda^1$ 和 $\underset{\sim}{X}_\lambda^2$. (ii) 也不成立. 定理证毕.

由定理 7.1 立即得到

定理 7.2 设 $Q=(q_{ij})$ 保守、$m(0\leqslant m<\infty)$ 流出. 它可配称并有配称分布 (π_i), 则不断的可配称 Q 过程唯一的充要条件是定理 7.1 中的 (i) 或 (ii) 成立.

而由定理 6.2、定理 7.1 和定理 7.2 立得

定理 7.3 设 $Q=(q_{ij})$ 是一个保守、$m(0\leqslant m<\infty)$ 流出 Q 矩阵,则可逆 Q 过程存在唯一的充要条件是:

(i) Q 可配称;

(ii) Q 既约,或 Q 虽非既约但 Q 的每一子块非零流出;

(iii) 定理 7.1 中的条件 (i) 或 (ii) 之一成立

三条件同时成立.

参　考　文　献

[1] 侯振挺、陈木法,马尔可夫过程与场论 (见[2]第六章).
[2] 钱敏、侯振挺等著,可逆马尔可夫过程,湖南科学技术出版社,1979.
[3] 侯振挺、郭青峰,齐次可列马尔可夫过程,科学出版社,北京,1978.
[4] 侯振挺、郭青峰、陈木法,可逆 Q 过程存在准则 (见[2]第二章).
[5] 侯振挺、陈木法,一类 Q 过程的有势性. 北京师范大学学报, **3-4**(1980), 1—10.
[6] 杨超群,柯氏向后微分方程组的边界条件. 数学学报, **16**:4(1966), 429—452.
[7] Feller W., On boundaries and lateral conditions, *Ann. of Math.*, II. Ser., 65 (1957), 527—570.
[8] Williams D., On the construction problem for Markov chains, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie. **3** (1964), 227—246.