ωB-方程在瞬时Q-过程问题中的应用

陈木法　程汉生
（数　学　系）

马尔可夫过程论的一个基本问题是：给定Q-矩阵Q，何时存在相应的Q-过程？若存在时何时唯一？

Q全稳定时，$P(t)$的存在性由W. Feller（1940）和J. Doob（1945）解决。全稳定保守Q-过程的唯一性由W. Feller和G. E. H. Reuter（1957）解决。全稳定非保守的唯一性由侯振挺（1974）解决。

关于瞬时态情形，虽有不少人研究但结果不多。这是由于Q-矩阵含有∞元而致使解决全稳定情形的有力方法——最小解方法失效。目前已知的重要结果只有D. Williams（1976）的全瞬时态的存在定理。

本文利用非标准模型$^*(\hat{R})$来研究Q-过程构造问题。我们引入了Q-矩阵的非标准扩张ωQ-矩阵并较详地研究了ω方程的解的性质，作为应用，我们改进了D. Williams关于单瞬时态的结果。

我们使用的非标准模型主要来自〔1〕、〔2〕和〔3〕。

一般Q-过程构造论中往往借助$P(t)$的拉氏变换来进行研究，本文以后所指Q-过程均为其拉氏变换P_λ[4]。

§1　Q-矩阵的非标准表示

E为任一可列集，$E_n\uparrow E$（$n\to\infty$）诸E_n为有限集。

定义1.1. 给Q-矩阵Q，定义矩阵序列$f=\{{}^nQ\}$，$n=1,2\cdots\cdots$如下：

${}^nQ=(\bar{q}_{ij}^{(n)};\ i,j\in E_n)$ 其中

$\bar{q}_{ij}^{(n)}=q_{ij}\in Q$　若 $i,j\in E_n$　$i\neq j$

$$\bar{q}_{ii}^{(n)}=\begin{cases} q_{ii}\in Q & \text{若} q_{ii}>-\infty \\ -\sum\limits_{j\in E_n,\, j\neq i} q_{ij}-c_i & \text{若} q_{ii}=-\infty \quad \text{且} \sum\limits_{j\in E,\, j\neq i} q_{ij}=\infty \\ -\sum\limits_{j\in E_n,\, j\neq i} q_{ij}-c_i^{(n)}-c_i & \text{若} q_{ii}=-\infty \quad \text{且} \sum\limits_{j\in E,\, j\neq i} q_{ij}<+\infty \end{cases}$$

其中

本文1981年1月28日收到。

$$c_i=\begin{cases}\text{任意非负实数} & \text{若 } q_{ii}=-\infty\\ 0 & \text{若 } q_{ii}>-\infty\end{cases}$$

$0\leqslant c_i^{(n)}\uparrow\infty$ $(n\to\infty)$ 若 $q_{ii}=-\infty$

$c_i^{(n)}=0$ 若$q_{ii}>-\infty$

下面首先研究 $S=\{E_n\}_{n\in N}$ 在${}^*(\hat{R})$ 中扩张的性质。设${}^*E$ 为E在${}^*(\hat{R})$ 中的扩张，由${}^*(\hat{R})$ 与 $\hat{R}$ 初等等价即知S在${}^*(\hat{R})$ 中的扩张具有下述性质：

命题1.1. 1°${}^*S$是由${}^*N$到${}^*P(E)$的函数，即对每一个 $n\in{}^*N$, ${}^*S_n$是E的一个内子集。

2° ${}^*S_n\subset{}^*S_{n+1}$ $\bigcup_{n\in{}^*N}{}^*S_n={}^*E$。即${}^*S_n\uparrow{}^*E$。

3°对任意 $n\in N$, ${}^*S_n=E_n$。

4°对任意 $n\in{}^*N-N$, ${}^*S_n$ 是一个*-有限集。

由于以上性质，我们可以记${}^*S=\{E_n\}_{n\in{}^*N}$。

以下研究$f=\{Q\}_{n\in N}$在${}^*(\hat{R})$ 中扩张的性质。

命题1.2. ${}^*f$ 是矩阵序列$\{{}^*f_n\}_{n\in{}^*N}$，其中${}^*f_n=(\bar{q}_{ij};i,j\in E_n)\bar{q}_{ij}\in{}^*\in\boldsymbol{R}$。

证. 对f有如下形式刻划

$$\forall n\in N)(\exists x\in R_6)[(u,x)\in f\wedge(\forall x'\in R_6)[(n',x)\in f\Rightarrow x=x']\wedge(\forall y_1,y_2\in E_n)(\exists z\in R)[(y_1,y_2,z)\in x\wedge(\forall z'\in R)[(y_1,y_2,z')\in R\Rightarrow z=z']]]$$

在这里，$y\in E_n$ 理解为 $(\exists u\in R_2)[(n,u)\in E\wedge y\in u]$ 将上句子在${}^*(\hat{R})$ 中加以解释即为所需结论。证毕。

以下取定某$\omega\in{}^*N-N$。

定义1.2. 内矩阵 $Q=(q_{ij};i,j\in E_\omega)$。$E_\omega\subset{}^*E$, E_1 为内集合，称Q为 **ωQ-矩阵**，若

$q_{ij}\in{}^*\boldsymbol{R}$ $ij\in E_\omega$

$q_{ii}\leqslant 0$ $i\in E_\omega$; $0\leqslant q_{ij}$ $i\neq j$ $ij\in E_\omega$

$\sum_{j\in E_\omega}q_{ij}\leqslant 0$ $i\in E_\omega$。若此式对$i\in E_\omega$等号成立。则称此矩阵为**第 i 行保守**。

命题1.2. 对于一切 $n\in{}^*N$, ${}^*f_n$ 是 ωQ-矩阵。

证. 对于f有如下形式刻划

$$(\forall u\in R_6)(\forall v\in\boldsymbol{R})(\forall n,i,j\in N)[[f_n=u]\wedge[u_{ij}=v]\Rightarrow[[[i\neq j]\Rightarrow[0\leqslant v]]\wedge[[i=j]\Rightarrow[[0\leqslant -v]]\wedge[\Sigma^2(E_n,i,u)\leqslant 0]]$$

将此式在${}^*(\hat{R})$ 中解释即得所需结论。证毕。

注意：我们引入以下函数符号

$\Sigma(0,u,s)$指称$\sum_{i=1}^{n}a_i$，其中 $s=\{a_n\}$。

$\Sigma^1(0,n,j,u)$ 指称$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}$，其中 $u=\{a_{ij}\}$

注：秩 $(a_1,\cdots\cdots a_n)=\max$ (秩 $a_1,\cdots\cdots a$, 秩 $a_n)+2(n-1)$

$\Sigma^2(0,n,j,u)$ 指称 $\sum_{z=1}^{n} a_{ij}$

$\Sigma^2(E_n,i,u)$ 指称 $\sum_{j\in E_n} a_{ij}$ 等等。

命题1.3. 若 $n\in N$, ${}^*f_n={}^nQ$。

证．因为 ${}^nQ$ 是一有限矩阵，因此可写为一个有限集合，而且若 $(a,b)=\{a,\{a,b\}\}$，则 ${}^*(a,b)=\{a,{}^*\{a,b\}\}=(a,b)$ 对于三元组亦有类似结果，因此由形式句子 $f_n={}^nQ$ 可知 ${}^*f_n={}^*({}^nQ)={}^nQ$。证毕。

以后，在不致混淆时记 $\bar{q}_{ij}\in{}^{\omega}Q$ 为 q_{ij}。

定义1.3. 任取 $\omega\in{}^*N-N$ 矩阵 ${}^{\circ}({}^{\omega}Q)=({}^{\circ}q_{ij}:\bar{q}_{ij}\in{}^{\omega}Q,i,j\in E)$ 称为 ${}^{\omega}Q$ 在 E 上的限制或 ${}^{\omega}Q$ **的标准部份。**

命题1.4. 任意 ${}^{\omega}Q$, $\omega\in{}^*N-N$ 则 ${}^{\circ}({}^{\omega}Q)=Q$。

证．若 $i\neq j$ 或 $i=j$ 而 $q_{ij}>-\infty$ 由 $\{{}^nQ\}$ 的定义知 $\bar{q}_{ij}=q_{ij}$，此时视 $\bar{q}_{ij}$ 和 q_{ij} 为常词 $i,j\in E$，其在 ${}^*(\hat{R})$ 中解释即为 ${}^{\circ}({}^{\omega}Q)\ni{}^{\circ}\bar{q}_{ij}=\bar{q}_{ij}=q_{ij}\in Q$。若 $i=j$ 而 $q_{ii}=-\infty$ 则考虑句子

$$(\forall n\in N)(\forall u\in R_6)[[f_n=u]\Rightarrow[\Sigma^2(E_n,i,u)\leqslant 0]$$

其在 $(\hat{R})$ 中真(因为 $\bar{q}_{ii}+\sum_{j\in E_n\, j\neq i} q_{ij}=\sum_{j\in E_n}\bar{q}_{ij}\leqslant -c_i$(或 $\leqslant -c_i-c_i^{(n)}\leqslant 0$),因此也在 ${}^*(\hat{R})$ 中真，经解释表明：当 $\omega\in{}^*N-N$ 时 $\sum_{j\in E_\omega}\bar{q}_{ij}\leqslant 0$。若 $\sum_{j\in E\, j\neq i} q_{ij}=+\infty$ 则有 $-\bar{q}_{ii}\geqslant\sum_{j\in E_\omega\, j\neq i}\bar{q}_{ij}\geqslant\sum_{j\in E\, j\neq i} q_{ij}$。而若 $\sum_{j\in E\, j\neq i} q_{ij}<\infty$ 时 $-\bar{q}_{ii}\geqslant\sum_{j\in E_\omega\, j\neq i}\bar{q}_{ij}\geqslant\sum_{j\in E\, j\neq i} q_{ij}+c_i^{(n)}$ 此不等式对一切 $n\in N$ 成立，由 $c_i^{(n)}\uparrow\infty$ $(n\to\infty)$ 知在两种情况下都有 ${}^{\circ}(\bar{q}_{ii})=-\infty=q_{ii}$。证毕。

§2. ω方程及其最小解[5]

定义2.1. 线性方程组

$$x_i=\sum_{k\in E_\omega} c_{ik}x_k+b_i\quad i\in E_\omega \tag{1}$$

称为 ω 方程，这里 $\sum_{k\in E_\omega} c_{ik}\leqslant 1$ $i\in E_\omega$。$0\leqslant c_{ij}$, $b_j\in\boldsymbol{R}$, $(c_{ij}:i,j\in E_\omega)$, $(b_i:i\in E_\omega)$ 均为内实体。

定理2.1. (ω 方程最小解的构造性质)

定义 $x_i^{(0)}=0$, $x_i^{(n+1)}=\sum_{k\in E_\omega} c_{ik}x_k^{(n)}+b_i$ 则

$$x_i^*=\sup_{n\in{}^*N}\{x_i^{(n)}\}\quad i\in E_\omega$$

是 ω 方程（1）的最小非负解。

证．$x_i^{(1)}=b_i\geqslant 0=x_i^{(0)}$ 且若假设 $x_i^{(n)}\geqslant x_i^{(n-1)}$ 则

$$x_i^{(n+1)}=\sum_{k\in E_\omega}c_{ik}x_k^{(n)}+b_i\geqslant\sum_{k\in E_\omega}c_{ik}x_k^{(n-1)}+b_i=x_i^{(n)}$$

因此 $x_i^{(n)}\uparrow(n\to\infty)$ $n\in{}^*N$。

以下证明一个等式：任意内 $\{x_i^{(n)}: n\in{}^*N\}$，

$$\sup_{n\in{}^*N}\left\{\sum_{k\in E_m}c_k x_k^{(n)}\right\}=\sum_{k\in E_m}c_k\sup_{n\in{}^*N}\{x_k^{(n)}\} \quad (2)$$

其中 $x_i^{(n)}\uparrow(n\to\infty)n\in{}^*N$ $c_k\geqslant0$，$k\in E_m$，$m\in{}^*N$。

事实上，由 $\hat{R}$ 中的单调收敛定理知，

若 $x_i^{(n)}\uparrow(n\to\infty)n\ni N$，$c_k\geqslant0$ $k\in E_m$ $m\in N$ 则

$$\sup_{n\in N}\left\{\sum_{k\in E_m}c_k x_k^{(n)}\right\}=\sum_{k\in E_m}c_k\sup_{n\in N}\{x_k^{(n)}\}$$

因此，我们有以下形式句子，

$$\begin{aligned}&(\forall x\in F(N\times N,R))(\forall c,y,z,u,v,z'u'\in F(N,R))(\forall i,j,k,m,n\in\\&N)[[[x(k,n+1)\geqslant x(k,n)]\wedge[c(k)\geqslant0]\wedge[u'(i)\\&=u(i)\cdot c(i)]\wedge[z'(j)=c(j)z(j)]\wedge[[x|_k=y]\Rightarrow[u(k)=\sup(N,y)]]\\&\wedge[[x|n=z]\Rightarrow[v(n)=\Sigma(E_m,z')]]]]\Rightarrow[\sup(N,v)=\Sigma(E_m,u')]]\end{aligned} \quad (3)$$

其中 $F(N\times N,R)$ 指称由 $N\times N$ 到 R 的函数集合，${}^*F(N\times N,R)\subset F({}^*N\times{}^*N,{}^*R)$。$x|_k$ 指称实体 x 对 k 的限制，事实上 $x|_k=y$ 是式子 $(\forall p\in N)[x(p,x)=y(y)]$ 的缩写。sup $(\cdot,\cdot)$ 是一个运算符号，其指称取上确界。$\sup(N,v)$ 的解释是 $\sup\limits_{n\in N}\{a_n\}$，$v$ 指称 $\{a_n\}$。

（3）在 ${}^*(\hat{R})$ 中的解释即为（2）。

由此，我们有

$$\begin{aligned}x_i^*&=\sup_{n\in{}^*N}\{x_i^{(n+1)}\}=\sup_{n\in{}^*N}\left\{\sum_{k\in E_\omega}c_{ik}x_k^{(n)}+b_i\right\}\\&=\sum_{k\in E_\omega}c_{ik}\sup_{n\in{}^*N}\{x_i^{(n)}\}+b_i=\sum_{k\in E_\omega}c_{ik}x_k^*+b_i\end{aligned}$$

所以 x_i^* $i\in E_\omega$ 是（1）的非负解。

又若 $\bar{x}_i$ $i\in E_\omega$ 是（1）的非负解，则 $\bar{x}_i\geqslant x_i^{(0)}=0$；若 $\bar{x}\geqslant x_i^{(n)}$ 则

$$x_i^{(n+1)}=\sum_{k\in E_\omega}c_{ik}x_k^{(n)}+b_i\leqslant\sum_{k\in E_\omega}c_{ik}\bar{x}_k+b_i=\bar{x}_i$$

因此对一切 $n\in{}^*N$ $\bar{x}\geqslant x_i^{(n)}$ 故 $\bar{x}_i\geqslant x_i^*$。因此，x_i^* $i\in E_\omega$ 是 ω 方程（1）的最小非负解。证毕。

定理2.2.（ω 方程线性组合定理）

设 G 为有限或 $*$-有限集。$a_s\geqslant0$ $s\in G$。对任一 $s\in G$ 若 $x_i^{(s)*}$ $i\in E_\omega$ 是 ω 方程

$$x_i=\sum_{k\in E_\omega}c_{ik}x_k+b_i^{(s)}\quad i\in E_\omega$$

的最小非负解，则

$$x_i^*=\sum_{s\in G}a_s x_i^{(s)*}\quad i\in E_\omega$$

是ω方程

$$x_i=\sum_{k\in E_\omega}c_{ik}x_k+\sum_{s\in G}a_sb_i^{(s)}\quad i\in$$

的最小非负解。

证．令$x_i^{(s)(0)}=0$

$$x_i^{(s)(n+1)}=\sum_{k\in E_\omega}c_{ik}x_k^{(s)(n)}+b_i^{(s)}\quad i\in E_\omega$$

$x_i^{(0)}=0$

$$x_i^{(n+1)}=\sum_{k\in E_\omega}x_k^{(n)}+\sum_{s\in G}a_s\cdot b_i^{(s)}\quad i\in E_\omega$$

所以$x_i^{(0)}=0=\sum_{s\in G}a_sx_i^{(s)(0)}$。若已证$x_i^{(n)}=\sum_{s\in G}a_sx_i^{(s)(n)}$则

$$x_i^{(n+1)}=\sum_{k\in E_\omega}c_{ik}x_k^{(n)}+\sum_{s\in G}a_s\cdot b_i^{(s)}=\sum_{k\in E_\omega}c_{ik}\left(\sum_{s\in G}a_s\cdot x_k^{(s)(n)}\right)+\sum_{s\in G}a_s\cdot b_i^{(s)}$$

$$=\sum_{s\in G}a_s\left(\sum_{k\in E_\omega}c_{ik}x_k^{(s)(n)}+b_i^{(s)}\right)=\sum_{s\in G}x_i^{(s)(n+1)}$$

于是由$^*N$上归纳法知：对一切$n\in{}^*N$

$$x_i^{(n)}=\sum_{s\in G}a_sx_i^{(s)(n)}\quad i\in E_\omega$$

由定理2.1知

$$x_i^*=\sup_{n\in^*N}\{x_i^{(n)}\}\quad i\in E_\omega$$

$$x_i^{(s)*}=\sup_{n\in^*N}\{x_i^{(s)(n)}\}\quad i\in E_\omega$$

由定理2.1证明中的（2）式我们即有

$$x_i^*=\sum_{s\in G}a_sx_i^{(s)*}$$

所以定理获证。证毕。

定理2.3.（ω方程局部化定理）设G为E_ω的有限或*-有限子集，ω-方程

$$x_i=\sum_{k\in G}c_{ik}x_k+\left(\sum_{k\in E\setminus G}c_{ik}x_k^*+b_i\right)\quad i\in G$$

的最小非负解

$$\bar{x}_i^*=x_i^*\quad i\in E_\omega$$

定理2.4.（ω-方程标准化定理）ω-方程

$$x_i=\sum_{k\in E_\omega}c_{ik}x_k+b_i\quad i\in E_\omega \tag{4}$$

的最小非负解为x_i^* $i\in E_\omega$。

若$c_{ik},b_i\in\boldsymbol{R}$ $i,k\in E$，$\sum_{k\in E_\omega}c_{ik}<1$，$\sum_{k\in E_\omega}c_{ik}+b_i\leqslant 1$ 则

$^\circ(x_i^*)$ $i\in E$ 为方程

$$x_i=\sum_{k\in E}c_{ik}x_k+b_i \quad i\in E \tag{5}$$

的最小非负解，更一般地，（4）任一解

$$0\leqslant\bar{x}_i\leqslant 1 \quad i\in E_\omega$$

的标准部份 ${}^\circ\bar{x}_i$ $i\in E$ 为方程（4）之解。

证．首先证明 $\bar{x}_i$ $i\in E_\omega$ 的标准部份为（5）之解：因为 $\bar{x}_i$ $i\in E_\omega$ 为（4）之解。故有

$$\bar{x}_i=\sum_{k\in E_\omega}c_{ik}\bar{x}_k+b_i=\sum_{k\in E}c_{ik}\bar{x}_k+b_i+\sum_{k\in E_\omega-E_n}c_{ik}\bar{x}_k$$

$$\geqslant\sum_{k\in E_m}c_{ik}\bar{x}_k+b_i$$

这里，诸 E_m 有限且 $E_m\uparrow E(m\to\infty)$ 两边取标准部份有

$${}^\circ\bar{x}_i\geqslant\sum_{k\in E_m}c_{ik}{}^\circ\bar{x}_k+b_i \quad i\in E \quad m\in N$$

可由 $\sum\limits_{i\in E}c_{ik}<1$ 知

$${}^\circ\bar{x}_i\geqslant\sum_{k\in E}c_{ik}{}^\circ\bar{x}_k \quad i\in E \tag{6}$$

另一方面，由于对一切 $m\in N$ 有

$$\bar{x}_i=\sum_{k\in E_\omega}c_{ik}\bar{x}_k+b_i=\sum_{k\in E_m}c_{ik}\bar{x}_k+b_i+\sum_{k\in E_\omega-E_m}c_{ik}\bar{x}_k$$

可知

$${}^\circ\bar{x}_i=\sum_{k\in E_m}c_{ik}{}^\circ\bar{x}_k+b_i+{}^\circ\Big(\sum_{k\in E_\omega-E_m}c_{ik}\bar{x}_k\Big)$$

由于 $\sum\limits_{k\in E}c_{ik}$ 存在且 $\sum\limits_{k\in E}c_{ik}={}^\circ\Big(\sum\limits_{k\in E_\omega}c_{ik}\Big)$ 因此对于任意 $\varepsilon>0$ $\varepsilon\in\boldsymbol{R}$ 总可以找到 $m\in E$ 使

$${}^\circ\Big(\sum_{k\in E_\omega-E_m}c_{ik}\bar{x}_k\Big)\leqslant{}^\circ\Big(\sum_{k\in E_\omega-E_m}c_{ik}\Big)={}^\circ\Big(\sum_{k\in E_\omega}c_{ik}\Big)-\sum_{k\in E_m}c_{ik}<\varepsilon$$

因此有

$${}^\circ\bar{x}_i\leqslant\sum_{k\in E}c_{ik}{}^\circ\bar{x}_k+b_i \quad i\in E \tag{7}$$

由（6）（7）两式可知 ${}^\circ\bar{x}_i$ $i\in E$ 是方程（5）之解。

下面证明（4）的最小非负解 x_i^* $i\in E_\omega$ 的标准部份 ${}^\circ(x_i^*)$ $i\in E$ 是（5）的最小非负解。设

$$\tilde{x}_i^{(0)}=b_i \quad \tilde{x}_i^{(n+1)}=\sum_{k\in E_\omega}c_{ik}\tilde{x}_i^{(n)}+b_i \quad i\in E_\omega \tag{8}$$

$$x_i^{(0)}=b_i \quad x_i^{(n+1)}=\sum_{k\in E}c_{ik}x_i^{(n)}+b_i \quad i\in E$$

利用本定理证明上部份的方法不难证明

$$^{\circ}(\tilde{x}_i^{(n)})=x_i^{(n)} \quad i\in E \tag{9}$$

由（8）知

$$\tilde{x}_i^{(n+1)}-\tilde{x}_i^{(n)}=\sum_{k\in E_\omega}c_{ik}(\tilde{x}_k^{(n)}-\tilde{x}_k^{(n-1)})$$

设

$$L=\sum_{k\in E_\omega}c_{ik}<1 \quad e_{n-1}=\max_{k\in E_\omega}\{\tilde{x}_k^{(n)}-\tilde{x}_k^{(n-1)}\},\ e_0=\max_{k\in E_\omega}\{b_k\}$$

因此

$$\tilde{x}_i^{(n+1)}-\tilde{x}_i^{(n)}\leqslant Le_{n-1} \quad i\in E_\omega$$

故

$$e_n\leqslant Le_{n-1}$$

因此

$$\begin{aligned}0\leqslant\tilde{x}_i^{(n+p)}-\tilde{x}_i^{(n)}&=(\tilde{x}_i^{(n+p)}-\tilde{x}_i^{(n+p-1)})+\cdots\cdots\\&+(\tilde{x}_i^{(n+1)}-\tilde{x}_i^{(n)})\leqslant e_{n+p-1}+\cdots\cdots+e_n\leqslant L^{n+p-1}e_0+\cdots\cdots\\&+L^ne_0\leqslant L^n(1-L^p)(1-L)^{-1}e_0\leqslant L^n(1-L)^{-1}e_0\end{aligned}$$

两边对 p 在 $^*N$ 中取上确界得到

$$\begin{aligned}\sup_{p\in{}^*N}\{\tilde{x}_i^{(n+p)}-\tilde{x}_i^{(n)}\}&=\sup_{p\in{}^*N}\{\tilde{x}_i^{(n+p)}\}-\tilde{x}_i^{(n)}\\&\leqslant L^n(1-L)^{-1}e_0\end{aligned}$$

即

$$0\leqslant\tilde{x}_i^*-\tilde{x}_i^{(n)}\leqslant L^n(1-L)^{-1}e_0$$

所以

$$0\leqslant{}^{\circ}(\tilde{x}_i^*)-\tilde{x}_i^{(n)}\leqslant{}^{\circ}(L^n(1-L)^{-1}e_0) \tag{10}$$

这里

$$\tilde{x}_i^*=\sup_{n\in{}^*N}\{\tilde{x}_i^{(n)}\} \quad i\in E$$

若（5）的最小非负解为

$$x_i^{(n)}\uparrow x_i^*(n\to\infty) \quad i\in E$$

将（10）两边取极限得

$$0\leqslant{}^{\circ}(\tilde{x}_i^*)-x_i^*\leqslant\lim_{n\to\infty}({}^{\circ}L)^n(1-L)^{-1}e_0=0 \quad i\in E$$

所以

$$^{\circ}(\tilde{x}_i^*)=x_i^* \quad i\in E。$$ 证毕。

§3 ωB 方程和 ωF 方程

定义3.1. 任给 ωQ-矩阵 $^{\omega}Q=(q_{ij};\ i,j\in E_\omega)$ 方程

$$u_{ij}(\lambda)=\sum_{k\in E_\omega\ k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}u_{kj}(\lambda)+\frac{\lambda\delta_{ij}}{\lambda+q_i} \tag{1}$$

$\lambda\in{}^*\boldsymbol{R}_+$（正超实数集）$i,j\in E_\omega$

称为 ωB 方程（ω向后方程）。

$$\xi_{ij}(\lambda)=\sum_{k\in E_\omega\ k\neq i}\frac{\xi_{ik}(\lambda)}{\lambda+q_i}q_{kj}+\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_j}\qquad(2)$$

$$\lambda\in{}^*\boldsymbol{R}_+\quad i,j\in E_\omega$$

称为 ωF-方程（ω 向前方程）。

定理3.1.（ωB-方程最小非负解的存在性）ωB-方程存在最小非负解。

证. 只要验证 ωB-方程是 ω 方程即可。由于 ${}^\omega Q$ 为内实体，故$\left\{\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i};i.k\right\}$是内实体且$\left\{\frac{\lambda\delta_{ij}}{\lambda+q_i},i\in E_\omega\right\}$为内实体。又由于

$$\sum_{k\in E_\omega\ k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}+\lambda\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_i}\leqslant\sum_{k\in E_\omega\ k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}+\frac{\lambda}{\lambda+q_i}$$

$$=\frac{1}{\lambda+q_i}\Big(\sum_{k\in E_\omega\ k\neq i}q_{ik}+\lambda\Big)\leqslant1$$

因此，由定理 2.1 知（1）存在最小非负解。证毕。

定理3.2. 若Q-矩阵Q有限，则 ωB 方程的解

$$0\leqslant\bar{x}_i\leqslant1\quad i\in E_\omega$$

的标准部份是此Q-矩阵 B 方程的解。而且 ωB 方程最小非负解的标准部份是相应 B 方程的解。

证. 只要验证定理 2.4 的条件即可，事实上由于 $\lambda>0$ 故

$$\sum_{k\in E_\omega\ k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}<1$$ 证毕。

定理3.3. Q-矩阵 Q 的 ωB-方程非负最小解为

$$(\bar{u}_{ij}(\lambda);\ i,j\in E_\omega)$$

设 $\bar{p}_{ij}^{\min}(\lambda)=\frac{\bar{u}_{ij}(\lambda)}{\lambda}\quad i,j\in E_\omega$，则

$({}^\circ\bar{p}_{ij}^{\min};\ i,j\in E)$ 是 Q-过程的充要条件是

（a）$\sum_{k\in E_\omega}\bar{p}_{ik}^{\min}(\lambda)\cdot\bar{p}_{kj}^{\min}(\mu)\simeq\sum_{k\in E}{}^\circ\bar{p}_{ik}^{\min}(\lambda)\cdot{}^\circ\bar{p}_{kj}^{\min}(\mu)\quad i,j\in E\quad\lambda,\mu\in\boldsymbol{R}_+$

（b）$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\bar{p}_{ij}^{\min}(\lambda)=1\quad i$ 瞬时

（c）$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(\lambda{}^\circ\bar{p}_{ij}^{\min}(\lambda)-\delta_{ij})=q_{ij}\in Q\quad i,j\in E$

证. 在 Q-过程构造论中有以下结果[5]

"对任意 Q-矩阵 ${}^nQ$ $n\in N$，B 方程

$$u_{ij}=\sum_{k\in E_n\ k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}u_{kj}(\lambda)+\frac{\lambda\delta_{ij}}{\lambda+q_j}\quad i,j\in E_n\ \lambda\in\boldsymbol{R}_+$$

的最小非负解为 $u_{ij}(\lambda)$。若设$p_{ij}^{\min}(\lambda)=\frac{u_{ij}(\lambda)}{\lambda}$ 则 $p_{ij}^{\min}$ 是 Q-过程即：

（i）$p_{ij}^{\min}(\lambda)\geqslant0\quad i,j\in E_n\ \lambda\in\boldsymbol{R}_+$

(ii) $\lambda\sum_{j\in E_n} p_{ij}^{(n)}(\lambda)\leqslant 1 \quad i\in E_n \ \lambda\in \boldsymbol{R}_+$

(iii) $p_{ij}^{(n)}(\lambda)-p_{ij}^{(n)}(\mu)-(\lambda-\mu)\sum_{j\in E_n} p_{ik}^{(n)}(\lambda)\cdot p_{kj}^{(n)}(\mu)=0 \quad i,j\in E_n,\ \mu,\lambda\in \boldsymbol{R}_+$

(iV) $\lim_{\lambda\to\infty}\lambda p_{ij}^{(n)}(\lambda)=\delta_{ij} \quad i,j\in E_n$

(V) $\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(\lambda p_{ij}^{(n)}(\lambda)-\delta_{ij})=q_{ij}\in{}^nQ,\ i,j\in E_n$”。

将上面陈述部分形式化可知

“对任意 ${}^\omega Q\ \ \omega\in{}^*N$ 方程，

$$u_{ij}(\lambda)=\sum_{k\in E_\omega\ (k\neq i)}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}u_{kj}(\lambda)+\frac{\lambda\delta_{ij}}{\lambda+q_i} \quad i,j\in E_\omega\ \lambda\in{}^*\boldsymbol{R}_+ \tag{3}$$

的最小非负解是 $\bar u_{ij}(\lambda)$，那么，$\bar p_{ij}^{(n)}(\lambda)=\dfrac{u_{ij}(\lambda)}{\lambda}$有以下性质

*(i) $\bar p_{ij}^{(n)}(\lambda)\geqslant 0 \quad i\ j\in E_\omega,\ \lambda\in{}^*\boldsymbol{R}_+$

*(ii) $\lambda\sum_{j\in E_\omega}\bar p_{ij}^{(n)}(\lambda)\leqslant 1 \quad i\in E_\omega\ \lambda\in{}^*\boldsymbol{R}_+$

*(iii) $\bar p_{ij}^{(n)}(\lambda)-\bar p_{ij}^{(n)}(\mu)-(\lambda-\mu)\sum_{j\in E_\omega}\bar p_{ik}^{(n)}(\lambda)\bar p_{kj}^{(n)}(\mu)=0 \quad i,j\in E_\omega\ \lambda,\mu\in{}^*\boldsymbol{R}_+$

现在若 $\bar u_{ij}(\lambda)$ 是方程（3）的最小非负解则有

$${}^\circ\bar p_{ij}^{(n)}\geqslant 0 \quad i,j\in E\ \lambda\in \boldsymbol{R}^+ \tag{4}$$

由*(ii) 知

$$\lambda\sum_{j\in E_\omega}\bar p_{ij}^{(n)}(\lambda)\leqslant 1$$

因此对任意 $m\in N\ \ E_m\subset E_\omega$ 有

$$\lambda\sum_{j\in E_m}\bar p_{ij}^{(n)}(\lambda)\leqslant 1$$

故

$$\lambda\sum_{j\in E_m}{}^\circ\bar p_{ij}^{(n)}(\lambda)\leqslant 1$$

所以

$$\lambda\sum_{j\in E}{}^\circ\bar p_{ij}^{(n)}(\lambda)\leqslant 1 \quad i\in E\ \lambda\in \boldsymbol{R}_+ \tag{5}$$

最后，对*(iii) 式取标准部分并应用条件（a）即得

$$\begin{aligned}0&={}^\circ\bar p_{ij}^{(n)}(\lambda)-{}^\circ\bar p_{ij}^{(n)}(\mu)-(\lambda-\mu)\,{}^\circ\Big(\sum_{j\in E_\omega}\bar p_{ik}^{(n)}(\lambda)\cdot\bar p_{kj}^{(n)}(\mu)\Big)\\&={}^\circ\bar p_{ij}^{(n)}(\lambda)-{}^\circ\bar p_{ij}^{(n)}(\mu)-(\lambda-\mu)\sum_{j\in E}{}^\circ\bar p_{ik}^{(n)}(\lambda)\cdot{}^\circ\bar p_{kj}^{(n)}(\mu)\end{aligned} \tag{6}$$

由（4）（5）（6）并条件（b）（c）知

$$({}^\circ\bar p_{ij}^{(n)}(\lambda);\ i,j\in E)\ \lambda\in \boldsymbol{R}_+$$

为 Q-过程。

另一方面，若 $({}^{*}\bar{p}_{ij}^{m}|^{*}(\lambda): i,j\in E)$ 为 Q-过程，则显然有（b）（c）。又比较（6）式和 Q-过程性质（1.10）知（a）成立。证毕。

类似地，我们有如下的

定理3.4. 方程

$$\begin{cases} \lambda u_i(\lambda)-\sum\limits_{j\in E_\omega} q_{ij}u_j(\lambda)=0 \\ 0\leqslant u_i(\lambda)\leqslant 1 \quad (i\in E_\omega) \end{cases} \quad (\lambda>0)$$

只有零解。

§4. ωB-方程在瞬时 Q-过程研究中的应用

问题4.1.（单瞬时的特殊情形）[7]

$$\begin{gathered} Q=(q_{ij}; i,j\in N \ q_{ij}\in \boldsymbol{R}\cup\{\infty\}) \text{ 其中 } q_0\equiv -q_{00}=\infty \\ q_{0j}=1 \ (j\geqslant 1); \ q_{j0}=q_j=-q_{jj} \ (j\geqslant 1); \\ q_{ij}=0 \ (i\geqslant 1, j\geqslant 1, i\neq j), \ 0<q_i<+\infty \ (j\geqslant 1) \\ \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{q_j}<+\infty \end{gathered} \tag{1}$$

取定 $\omega\in{}^{*}N-N$ ${}^{\omega}Q=(q_{ij}; i,j\in E_\omega,\ \bar{q}_{ij}\in{}^{*}\boldsymbol{R}_+)$

$$\bar{q}_0\equiv-\bar{q}_{00}=\sum_{1}^{\omega}1+c=\omega+c \quad c\in \boldsymbol{R}; \ E_\omega=\{1,2,\cdots\cdots\omega\} \text{为*-有限集}$$

由 ${}^{\omega}Q$ 得到 ωB-方程

$$\begin{cases} (\lambda+\omega+c)u_{0j}-\sum\limits_{k=1}^{\omega}u_{kj}(\lambda)=\delta_{0j} \quad j\in E_\omega, \ \lambda\in{}^{*}\boldsymbol{R}_+ \\ -q_iu_{0j}+(\lambda+q_i)u_{ij}=\delta_{ij} \quad i\in E_\omega-\{0\} \ j\in E_\omega \ \lambda\in{}^{*}\boldsymbol{R}_+ \end{cases} \tag{2}$$

为方便起见我们已将 ωB-方程乘以 $\frac{1}{\lambda}$ 因子。通过直接解此方程可得：

$$\begin{gathered} u_{00}=\left(\lambda+c+\sum_{k=1}^{\omega}\frac{1}{\lambda+q_k}\right)^{-1} \\ u_{0j}=u_{00}\frac{1}{\lambda+q_j} \quad j\in E_\omega-\{0\} \\ u_{i0}=\frac{q_iu_{00}}{\lambda+q_i} \end{gathered} \tag{3}$$

若 $i\in E_\omega-\{0\}$，$j\in E_\omega-\{0\}$

$$u_{ij}=\frac{q_iu_{00}}{(\lambda+q_i)(\lambda+q_j)}+\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_i} \tag{4}$$

由 Q 的定义知 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{1}{q_j}<+\infty$，由于 λ 有限故

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda}{\lambda+q_i}=\lambda\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda+q_i}<\lambda\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{q_i}<+\infty$$

若 $\lambda\in\boldsymbol{R}_+$ 则

$${}^{\circ}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda}{\lambda+q_j}\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda}{\lambda+q_j}$$

取上述解（因为只有此唯一解，故也是非负最小解）的标准部分，得

$${}^{\circ}u_{00}=\left(\lambda+c+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda+q_k}\right)^{-1}$$

$${}^{\circ}u_{0j}={}^{\circ}u_{00}\cdot\frac{1}{\lambda+q_j}\quad j=1,2,\cdots\cdots$$

$${}^{\circ}u_{i0}=\frac{q_i}{\lambda+q_i}{}^{\circ}u_{00}\quad i=1,2\cdots\cdots$$

$${}^{\circ}u_{ij}=\frac{q_i}{(\lambda+q_i)(\lambda+q_j)}{}^{\circ}u_{00}+\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_i}\quad i,j=1,2\cdots\cdots$$

应用定理 3.4 可以验证此即 Q-过程。证毕。

问题4.2.（单瞬时态一般情形）

$$Q=(q_{ij};\ i,j\in N,\ q_{ij}\in\boldsymbol{R}\cup\{\infty\})$$
$$q_0\equiv-q_{00}=\infty;\ q_i<\infty\ i\neq0$$
$$\sum_{j\neq0}q_{0j}=\infty;\ \sum_{j\neq i}q_{ij}=q_i\quad i\neq0$$

取 ${}^{\omega}Q=(q_{ij};\ i,j\in E_{\omega},\ q_{ij}\in{}^{*}\boldsymbol{R})$

$$q_0\equiv-q_{00}=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\omega}q_{0j}+c\quad c\in\boldsymbol{R}_+$$

设 $(r_{ij};\ i,j\in E_{\omega})$ 是 ωB 方程

$$u_{ij}=\sum_{k\in E_{\omega}\ k\neq i}\frac{q_{ij}}{\lambda+q_i}u_{kj}+\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_i}\quad i,j\in E_{\omega}\tag{5}$$

的最小非负解。

$(\varphi_{ij};\ i,j\in E_{\omega}-\{0\})$ 是 ωB-方程

$$u_{ij}=\sum_{k\in E_{\omega},\ k\neq0,i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}u_{kj}+\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_i}\quad i,j\in E_{\omega}-\{0\}\tag{6}$$

的最小非负解。

$(z_i;\ i\in E_{\omega}-\{0\})$ 是 ω-方程

$$x_i=\sum_{k\in E_{\omega},\ k\neq i,0}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}x_k+\frac{q_{i0}}{\lambda+q_i}\quad i\in E_{\omega}-\{0\}\tag{7}$$

的最小非负解（通过验证定理 2.1 的条件知最小非负解是存在的）。

由局部化定理知，$(r_{ij};\ i,j\in E_{\omega}-\{0\})$ 是方程

$$u_{ij}=\sum_{k\in E_\omega,\ k\neq 0,i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}\cdot u_{kj}+\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_i}+\frac{q_{i0}}{\lambda+q_i}\cdot r_{ij}$$

的最小非负解。

于是，由线性组合定理知

$$r_{ij}=\varphi_{ij}+z_i\cdot r_{0j}\quad i,j\in E_\omega-\{0\} \tag{8}$$

设 $j\in E_\omega-\{0\}$ 则

$$\begin{aligned}
(\lambda+q_0)r_{0j}&=\sum_{k=1}^{\omega}q_{0k}r_{kj}\\
&=\sum_{k=1}^{\omega}q_{0k}\Bigg(\sum_{\substack{l=0\\ l\neq k}}^{\omega}\frac{q_{kl}}{\lambda+q_k}r_{lj}+\frac{\delta_{kj}}{\lambda+q_k}\Bigg)\\
&=\sum_{k=1}^{\omega}q_{0k}\Bigg(\frac{q_{0k}}{\lambda+q_k}r_{0j}+\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{\omega}\frac{q_{kl}}{\lambda+q_k}r_{lj}+\frac{\delta_{kj}}{\lambda+q_k}\Bigg)\\
&=\sum_{k=1}^{\omega}\frac{q_{0k}q_{k0}}{\lambda+q_k}r_{0j}+\sum_{k=1}^{\omega}q_{0k}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{\omega}\frac{q_{kl}}{\lambda+q_k}r_{lj}+\sum_{k=1}^{\omega}q_{0k}\cdot\frac{\delta_{kj}}{\lambda+q_k}\\
&=\sum_{k=1}^{\omega}\frac{q_{0k}q_{k0}}{\lambda+q_k}r_{0j}+\sum_{k=1}^{\omega}q_{0k}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{\omega}\frac{q_{kl}}{\lambda+q_k}(\varphi_{lj}+z_l\cdot r_{0j})+\sum_{k=1}^{\omega}\frac{q_{0k}}{\lambda+q_k}\delta_{kj}\\
&=\sum_{k=1}^{\omega}\frac{q_{0k}q_{k0}}{\lambda+q_k}r_{0j}+\sum_{k=1}^{\omega}q_{0k}\Bigg(\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{\omega}\frac{q_{kl}}{\lambda+q_k}\varphi_{lj}+\frac{\delta_{kj}}{\lambda+q_k}\Bigg)\\
&\quad+\sum_{k=1}^{\omega}\frac{q_{0k}q_{k0}}{\lambda+q_k}\cdot\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{\omega}q_{kl}z_l\cdot r_{0j}\\
&=\sum_{k=1}^{\omega}\frac{q_{0k}q_{k0}}{\lambda+q_k}r_{0j}+\sum_{k=1}^{\omega}q_{0k}\varphi_{kj}+\sum_{k=1}^{\omega}q_{0k}\Bigg(\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{\omega}\frac{q_{kl}}{\lambda+q_k}z_l\Bigg)\cdot r_{0j}\\
&=\sum_{k=1}^{\omega}\frac{q_{0k}q_{k0}}{\lambda+q_k}r_{0j}+\sum_{k=1}^{\omega}q_{0k}\varphi_{kj}+\sum_{k=1}^{\omega}q_{0k}\Bigg(z_k-\frac{q_{k0}}{\lambda+q_k}\Bigg)\cdot r_{0j}\\
&=\sum_{k=1}^{\omega}q_{0k}\varphi_{kj}+\sum_{k=1}^{\omega}q_{0k}z_k\cdot r_{0j}
\end{aligned}$$

因此

$$r_{0j}\Bigg(\lambda+q_0-\sum_{k=1}^{\omega}q_{0k}z_k\Bigg)=\sum_{k=1}^{\omega}q_{0k}\varphi_{kj}$$

利用 Q 的除第一行外的保守性和定理 3.4 可知

$$z_k = 1 - \lambda \sum_{j=1}^{\omega} \varphi_{kj} \quad k \in E_\omega - \{0\} \tag{9}$$

故

$$r_{0j}\left(\lambda + q_0 - \sum_{k=1}^{\omega} q_{0k} + \lambda \sum_{k=1}^{\omega} \sum_{j=1}^{\omega} q_{0k}\varphi_{kj}\right) = \sum_{k=1}^{\omega} q_{0k}\varphi_{kj}$$

$$r_{0j}\left(\lambda + c + \lambda \sum_{k=1}^{\omega} \sum_{j=1}^{\omega} q_{0k}\varphi_{kj}\right) = \sum_{k=1}^{\omega} q_{0k}\varphi_{kj}$$

记

$$\eta_{0j} = \sum_{k=1}^{\omega} q_{0k}\varphi_{kj} \quad \bar{\rho} = \lambda + c + \lambda \sum_{k=1}^{n} \eta_{0k} \tag{10}$$

则

$$r_{0j} = \bar{\rho}^{-1}\eta_{0j} \quad j \in E_\omega - \{0\} \tag{11}$$

由局部化定理知（r_{i0}；$i \in E_\omega - \{0\}$）是方程

$$u_{i0} = \sum_{k \in E_\omega \quad k \neq i, 0} \frac{q_{ik}}{\lambda + q_i} u_{k0} + \frac{r_{00} q_{i0}}{\lambda + q_i}$$

的最小非负解，比较（7）运用线性组合定理知

$$r_{i0} = z_i \cdot r_{00} \tag{12}$$

在（5）中取 $i=0$ 得

$$(\lambda + q_0) \cdot r_{00} = \sum_{k=1}^{\omega} q_{0k} r_{k0} + 1$$

$$= \sum_{k=1}^{\omega} q_{0k} z_k \cdot r_{00} + 1$$

因此，

$$\left(\lambda + q_0 - \sum_{k=1}^{\omega} q_{0k} z_k\right) \cdot r_{00} = 1$$

由（9）（10）得

$$r_{00} = \bar{\rho}^{-1} \tag{13}$$

由（8）～(13)，并取标准部分我们得到

$$r_{00} = \rho^{-1}$$

$$r_{0j} = r_{00} \cdot \eta_{0j} \quad i, j \in N - \{0\}$$

$$r_{i0} = z_i \cdot r_{00}$$

$$r_{ij} = \varphi_{ij} + z_i \cdot r_{00} \cdot \eta_{0j}$$

其中

$$\rho = \left(\lambda + c + \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \eta_{0k}\right) \quad z_i = 1 - \lambda \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{ij}$$

$$\eta_{0j}=\sum_{k=1}^{\infty}q_{0k}\varphi_{kj},$$

在这里 φ_{ij} 是与方程（6）相应的标准方程的最小非负解，由于标准化定理我们不从符号上区别两者。仿〔6〕可验证上面所得到的是 Q 过程，于是我们得到

定理4.1. 对于保守单瞬时 Q 矩阵，Q 过程总存在。

如进一步假设 $q_{0j}\geqslant\delta>0$ $(j\geqslant1)$，则当 $c=0$ 时，我们的结果即 Wiliams[6]的定理 2 的充分性部分。

感谢王世强教授、严士健教授和侯振挺教授的指导。

参 考 文 献

〔1〕 A. Robinson, Non-Standard analysis.

〔2〕 W. A. Luxemberg, What is Non-Stondard analysis, Amer. Math. Monthly, vol 80.

〔3〕 C. C. Chang and H. Keialer, Model Theory.

〔4〕 侯振挺、郭青峰，齐次可列马尔可夫过程，科学出版社，1978。

〔5〕 D. Williams, A note on the Q-matrices of Markov chains, Z. Wahr., 7 (1967), 116—21.

〔6〕 K. L. Clmng, Markov Chains with Stationary Transition Probabilities, 1967.

THE THEORY OF ωB-EQUATIONS AND IT'S APPLICATION TO Q-PROCESSES WITH A SINGLE INSTANTANEOUS STATE

Chen Mu-fa and Cheng Han-sheng

Abstract

In this paper we set up on the non-standard model $^*(\hat{R})$ the generel theory of ω-matrices and ω-equations. In terms of ωB-equations we study the structure of Q-processes with a single instantaneous state, furthermore we improve J. D. Williams' results.