经济最优化的华-陈新理论

陈彬 谢颖超 杨婷 周勤

摘 要

介绍我国著名数学家华罗庚 (Loo-Keng Hua) 先生 (简称华老) 历经 28 年关于经济优化理论的开创性工作 (1957–1985): 一是给出经济发展速度的最优解——即系统的唯一平衡解; 二是证明了经济稳定性的基本定理 (崩溃定理); 三是在他仙逝前约 50 天写下了带消费的一个新模型. 自 1988 年至今, 陈木法院士一直关注华老的经济优化理论, 作为华氏理论基本数学工具—— 矩阵论的补充, 他于 1979 年引进了随机数学 (马氏链) 的数学工具. 2021 年以来, 他取得以下成果: 唤醒、修正、更新和发展了华老遗著中的模型, 形成新模型 (陈模型), 使之成为经济优化新理论的出发点; 陈理论可用于经济稳定性测试与破产时 (间) 预测; 产品的等级排序和分类; 经济的预测与调整; 产品调控与经济结构优化; 提供可程序化从而可智能化的高效算法. 随机数学工具的引入是陈理论的基石. 陈理论与已有的经济数学论著及 1969–2023 年间诺贝尔经济学奖项无共同之处. 由此可见, 在经济优化方面, 陈理论区别于已有理论的基本特征是: 定量、可计算、可预测、可优化、可程序化, 进而可智能化. 本文给出了新进出版的专著[1] 的理论概要. 特别地，关于经济结构矩阵的不变量 (亦称陈不变量) 在本文首次发表. 可以说“华-陈新理论”是精密科学的数学理论.

1. 引言

上世纪 1960 年代前, 数学处于希尔伯特公理化系统时代, 数学的研究集中于各个分支的基础性构建及解决数学难题; 1960 年代以后, 由于理论数学已有的大多分支已相当成熟, 需要开辟新领域, 数学发展回归庞加莱时代, 即回归自然, 与物理、生物等众多学科融合发展. 大变局出现的标志之一是俄罗斯 Dobrushin 学派创建的概率论与平衡态统计物理交叉的新数学分支——随机场理论. 受其影响, 陈木法院士在上世纪 80 年代带领北京师范大学概率团队构建了概率论与非平衡态统计物理交叉新的研究方向——无穷维反应扩散过程, 出版了《从马氏链到非平衡统计物理》的研究专著 (英文版, World Scientific, Singapore, 第 1 版 1992, 第 2 版 2004)[5]. 1980 年代末, 他们再次扩充研究领域, 在理论数学方面, 开启了稳定性及其速度估计和新谱论的系统研究; 在应用方面传承华罗庚先生的经济优化理论探索. 数学的应用研究突飞猛进, 近年来更进入到诸多领域的第一线, 如天气预报、3D 打印、微创手术、无人机、定点炸弹、机器人及正在蓬勃发展的人工智能, 等等, 引发了多领域的深度变革. 这里的每一项应用都包含数据的收集、存储、快速分析、智能决断和快速实施, 显而易见, 上述每一项应用都有数学支撑.

将数学应用于经济, 为制定国民经济发展规划等提供数学上的分析参考, 建立一整套为国民经济发展服务、有纵深的方法, 这是华老所开创的研究方向, 是交叉研究的典范, 也是我们正在做并将继续做的领域.

2. 投入产出模型和预备知识

(1) 投入产出模型

本文中的"产品"可以是某个行业或若干实际产品合并而成的"部门". 将所关心的产品的**产综** (固定单位: 瓩, 吨...等) 记为

$$x = \left(x^{(1)}, \cdots, x^{(d)}\right),$$

其中 $x^{(i)}$ $(i = 1, \cdots, d)$ 表示第 i 个产品或行业的产量.要了解当前的经济状况, 需要调查如下三种数据

- 去年的投入产综: $x_0 = \left(x_0^{(1)}, \cdots, x_0^{(d)}\right)$;
- 今年的产出产综: $x_1 = \left(x_1^{(1)}, \cdots, x_1^{(d)}\right)$;
- 结构方阵 (消耗系数方阵): $A_0 = \left(a_{ij}^{(0)} : i, j = 1, 2, \cdots, d\right)$.

其中矩阵 A_0 的含义是: 每生产一个单位的 i 类产品, 需消耗 $a_{ij}^{(0)}$ 个单位的 j 类产品. 于是有

$$x_0^{(j)} = \sum_{i=1}^{d} x_1^{(i)} a_{ij}^{(0)},$$

写成矩阵形式:

$$x_0 = x_1 A_0.$$

反过来, 对于给定的 x_0 和 A_0, 要唯一确定 x_1, 需要 A_0 可逆. 先假定所生产出的产品全部用于再生产, 此即

理想化模型或无消费模型

此时有 $x_{n-1} = x_n A_{n-1},\ \ n \geqslant 1$. 从而

$$x_0 = x_1 A_0 = x_2 A_1 A_0 = \cdots = x_n A_{n-1} \cdots A_0.$$

对于时齐情形 $A_n \equiv A$, 我们得到著名的**投入产出模型**:

$$x_0 = x_n A^n, \qquad n \geqslant 1. \tag{2.1}$$

如只是研究稳定性, 即当 $n \to \infty$ 时, 上式右边的极限行为, 则只需用到 A^n 的渐近行为, 不必需要 A 可逆. 但当 A 可逆时, (2.1) 式等价于

$$x_n = x_0 A^{-n}, \qquad n \geqslant 1. \tag{2.2}$$

(2) 矩阵论的两个基本结果

为陈述华罗庚理论的主要定理, 需要用到矩阵论中的两个基本结果. 本节也只涉及两个概念: 不可约性和非周期性. 记 $E=\{1,2,\cdots,d\}$, $A=(a_{ij}:i,j\in E)$, $A^n=\big(a_{ij}^{(n)}:i,j\in E\big)$. 通常, 非负矩阵指其所有元素均非负. 同样定义正矩阵.

定义 2.1 称非负矩阵 $A=(a_{ij})$ 不可约, 如对每一对 $i,j\in E$, 存在互不相同的 $i=i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_m=j$ 使得

$$a_{i_1i_2}>0,\ a_{i_2i_3}>0,\ \ldots,\ a_{i_{m-1}i_m}>0.$$

简单地说, 不可约意指每一对 i,j **互通**, 既存在如上的一条从 i 到 j 的通路, 也存在一条从 j 到 i 的通路. 若以 $a_{ij}>0$ 标记集合 E 中连接两点 i 和 j 之间的**边**, 则 E 中的点连同边构成一个**连通图**. 下述定理是不可约非负矩阵的最重要结果, 它也是此经济优化理论的基石.

定理 2.1 [Perron-Frobenius: 1907, 1912]: 非负不可约矩阵 A 的谱半径 $\rho(A)$ 是正的单重特征值, 其左、右特征向量可取为全正.

$\rho(A)$ 是 A 的最大特征值，也称主特征值. 分别以 u (行向量) 和 v (列向量) 表示 A 相应于 $\rho(A)$ 的左、右正特征向量 (贯穿全文, 特征向量可相差一非零乘积常数):

$$uA=\rho(A)u,\qquad Av=\rho(A)v.$$

也简称 u 和 v 分别为 A 的**左、右主正特征向量**. 如上式所示, 向量的行、列属性常可自动识别, 不必逐一标出.

自此以后, 假定对于每一个 $i\in E$,

$$\big\{n\geqslant 1: a_{ii}^{(n)}>0\big\}\neq\varnothing. \tag{2.3}$$

定义 2.2 点 $i\in E$ 的**周期**定义为集合 (2.3) 中元素的最大公约数, 记之为 d_i. 如 $d_i=1$, 则称 i **非周期**. 当 A 不可约时, 可证一切 i 同周期 (见 [7] 的定理 1.26). 此时称为 A 的周期. 特别地, 如共同周期为 1, 则称 A 非周期.

对于不可约的 A, 只要其对角线含有一个正元素就是非周期的. 此时有如下性质.

性质 2.1 对于非负不可约、非周期矩阵 A, 存在自然数 $M\leqslant(d-1)^2+1$ 使得当 $m\geqslant M$ 时, A^m 为正方阵 (见 [12]例 8.3.4 和习题 8.3.9). 如对角线元素全正, 则结论可加强为 $M\leqslant d-1$ (见 [12] 的 (8.3.5) 式).

记满足条件的最小的 M 为 $M_{\min}$.

性质 2.2 对于非负不可约、非周期 A, 每一个不同于 $\rho(A)$ 的特征值的模均小于 $\rho(A)$.

由以上结果可知, 每一个非负不可约、非周期的矩阵 A 拥有三大要素: 最大正的、也是模最大的特征值 $\rho(A)$, 其对应的最大左特征向量 u 和最大右特征向量 v.

本小节的材料是经典的 (也许除性质 2.1 而外), 也都是常见的. 其细节可从 [7] 第一章, [11] 或 Wikipedia 中的条目“Perron-Frobenius 定理”找到. 这里使用的是马氏链的术语, 在矩阵论中称这里的“不可约”为“不可分拆”, 而这里的“不可约、非周期非负方阵”则被简称为“原方阵”.

作为本节的结束, 我们提供一个简单例子, 说明模型中 A 的可逆性假设是必要的. 给定 $\{0,1\}$ 上的一个正概率分布 π (行向量). 取 $A=\mathbb{1}\pi$, 其中 $\mathbb{1}$ 为元素恒为 1 的列向量. 则 A 不可约、非周期, 唯一平稳分布就是 π: $\pi=\pi A$. 1、若取 $x_0=\pi$, 易证任一概率分布 x_1 都满足方程 $x_0=x_1A$. 但当 $x_0\neq\pi$ 时, 该方程无满足条件 $x_1\mathbb{1}=1$ 的解(事实上, $x_1\mathbb{1}=1\Rightarrow x_1A=\pi$). 这说明此方程不能完全决定一个投入产出系统. 原因就是 A 的秩为 1, 不可逆.

3. 华罗庚经济最优化基本定理

自此以后, 除非另有声明, 常假定 A 非负不可约且非周期.

对正向量 $x=(x^{(1)},\cdots,x^{(d)})$, 记 $\min_k x=\min\{x^{(1)},\cdots,x^{(d)}\}$. 对正向量 x 和 y, 定义分量商为 $y/x=(y^{(1)}/x^{(1)},\cdots,y^{(d)}/x^{(d)})$. 给定正的初始产综 x, 经过结构矩阵 A 一步作用得出产综 $y=xA$. 其对应的分量商为 $y/x=xA/x$. 下面是依此商表示 A 最大特征值 $\rho(A)$ 的对偶变分公式.

引理 3.1 [Collatz-Wielandt (C-W) 公式]: 对于非负不可约矩阵 A, 我们有

$$\max_{x>0}\min_k\frac{xA}{x}=\rho(A)=\min_{x>0}\max_k\frac{xA}{x}. \tag{3.1}$$

把上式中的 xA 换为 Ax, 结论亦真.

在应用中, 我们常以 C-W 公式 (3.1) 代替 Rayleigh 熵方法估计 $\rho(A)$. 此公式有普适性, 即对于每一正向量 x, 都有下、上界估计:

$$\min_k\frac{xA}{x}\leqslant\rho(A)\leqslant\max_k\frac{xA}{x}.$$

两个等号同时成立当且仅当 x 为相应的最大特征值对应的向量.

如果 x_0 和 x_1 分别为去年的投入产综和今年的产出产综，定义 $\min_k x_1/x_0$ 为今年的发展速度. 下面是华罗庚经济最优化理论的基本定理.

定理 3.1 [**华罗庚基本定理**]: 设 $x_{n-1}=x_nA$, $n\geqslant 1$, $\rho(A)=\lambda_{\max}(A)$, u, v 分别为 A 的最大特征值、最大左、右特征向量, 则下述结论成立.

(i) 最好的投入是 $x_0=u$, 此时有最佳发展速度为 $1/\rho(A)$.

(ii) 如果 A 非周期且 $x_0\neq u$, 则经济系统必然走向失衡或崩溃: 即崩溃时

$$T_{x_0}^+=\inf\{n\colon x_n\text{ 含有负值分量}\}<\infty.$$

注 3.1 此定理说明最初投入 u 在两种不同意义下最优.

- 从经济最佳发展速度的角度出发, 最佳投入一定是左特征向量 u, 即 $x_0=u$;
- 如果希望经济系统永远不崩溃, 最佳投入也一定是左特征向量 u, 即 $T_{x_0}^+=\infty\Rightarrow x_0=u$.

下面是陈院士在 1989 年 9 月就 A 为转移概率矩阵情形给出的证明.

证明: (i) 经济系统各产品发展的最慢速度为

$$\min_k x_1/x_0 = \min_k x_0 A^{-1}/x_0.$$

为达到最佳发展速度，我们需要寻找 x_0, 使得上式达到最大. 由引理 3.1 知，使得上式达最大的 x_0 是 A 的左主特征向量 u, 此时，发展速度为 $1/\rho(A)$.

假设 $A = P$ 为转移概率矩阵, 则 $P\mathbb{1} = \mathbb{1}$, 即 P 的右主特征对为 $(1, \mathbb{1})$. 此时最佳发展速度为 1.

(ii) 假定 P 不可约、非周期, 则由马氏链的遍历性定理得

$$P^n \to \mathbb{1}\pi, \quad n \to \infty,$$

(见 [8] 定理 1.19). 其中 $\pi = (\pi^{(1)}, \cdots, \pi^{(d)})$ $(\pi^{(i)} > 0, i = 1, \cdots, d)$ 为 P 的不变概率测度.

设 $\mu_0 = \mu_n P^n, \forall n \geqslant 1$, $\mu_0 \geqslant 0$ 满足 $\mu_0 \mathbb{1} = 1$. 则由 $P\mathbb{1} = \mathbb{1}$ 知

$$\mu_0 \mathbb{1} = \mu_n P^n \mathbb{1} = \mu_n \mathbb{1} = 1, \qquad \forall n.$$

由此及 $\{\mu_n\}$ 非负有界知存在收敛子序列 $\{\mu_{n_k}\}_{k\geqslant 1}$, 假设 $\mu_{n_k} \to \bar{\mu}$ 且 $\bar{\mu}\mathbb{1} = 1$. 于是

$$\mu_0 = \lim_{k\to\infty} \mu_{n_k} P^{n_k} = \bar{\mu}\mathbb{1}\pi = \pi. \quad \square$$

对于一般的消费矩阵 A, 我们能否将其转化为转移概率矩阵 P 并完成华罗庚基本定理的证明? 这就开启了**陈氏经济优化新理论**.

平衡是经济的核心要素为百年前就熟知的事实. 如若平衡遭到破坏, 可能百年也回不来. 记得 1990 年代，由于网络兴起的推动, 虚拟经济迅速发展, 不知道出现了多少种名目繁多的金融产品, 等到这些产品大部分违约时, 金融世界迅速垮下, 造成实体经济的系列崩盘. 我们都还记得 2008 年金融危机爆发时, 冰岛宣布国家破产.

人们常说“平衡是暂时的, 不平衡是经常的”. 在严格的数学框架内, 平衡解意味着诸产品之间的一个确定的比例. 所谓平衡解唯一是在相差一个正常数因子的意义下理解的, 在实践中允许此自由因子很重要. 无论对于拥有多少产品的经济模型, 平衡解只是所有产品构成的一个比例. 平衡解的重要性在于其为经济系统的唯一稳定解, 即从它出发, 由 $x_n = x_0 \rho(A)^{-n}$ 知经济的每一步发展都是其前一步的 $1/\rho(A)$ 倍, 此处 $\rho(A)$ 为系统决定的唯一常数, 而且此系统的最佳发展速度就是 $1/\rho(A)$. 换言之, 每一步的产出都是平衡解, 故也称之为平稳解. 这是华老优化理论的第 1 个主要结果. 区别于历史上已有结果的主要标志是: 先于华老的结果大多是存在性而非构造性, 华老的结果是可计算的.

华老最令人惊奇的结果是第 2 个, 对于不带消费的理想情形, 若不从平衡解出发, 经济发展必然在某一步 (年) 会出现含有不同符号的产品, 以后将证明对于带消费的一般模型结果也对, 俗称经济破产或崩溃.

下面是经华老简化过的源于华西里•列昂惕夫最简单模型.

男耕女织的古代经济

此时, 仅有“农业“和”制造业“两种产品固定产品的单位: 如农业的斗、公升, 制造业的尺、码等等. 自此以后, 将多产品的综合, 如两产品 (农业, 制造业), 称为*产综*. 下表给出经济运行的规则.

消耗量 消耗 输出	农业	制造业
农业	0.25	0.14
制造业	0.4	0.12

表中的第 1 行说的是: 为生产 1 个单位的农产品, 需要分别消耗 0.25 个单位的农产品和 0.14 个单位的制造业产品. 同样地, 可写出第 2 行的含义: 为生产 1 个单位的制造业产品, 分别需要消耗 0.4 个单位的农产品和 0.12 个单位的制造业产品.

表中的四个数所构成的方阵, 称为“*消耗系数方阵*”或“*结构方阵*”

$$A=\frac{1}{100}\begin{bmatrix}25 & 14\\ 40 & 12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.25 & 0.14\\ 0.4 & 0.12\end{bmatrix}, \tag{3.2}$$

并将两产品第 n 年的产出产综写成 (x_n, y_n), 其中 x_n 为第 n 年农业的产量, y_n 为第 n 年制造业的产量. 再记开始的投入产综为 (x_0, y_0). 如何选择投入产综是此理论的核心要素.

华老的第一个贡献是指出投入产出表有唯一 (不计正常数因子) *平衡解或稳定解*, 它是方阵 A 的最大左特征向量:

$$u=(\text{农业},\ \text{制造业})=\left(\frac{5}{7}\big(\sqrt{2409}+13\big),\ 20\right)\doteq(44.34397483,\ 20), \tag{3.3}$$

其中 $\doteq$ 表示近似. 这里的“唯一”是指两产品的比例为一固定的数, 但在应用中, 两产品的正常数倍都可用. 这当然是实践所必须: 一个小企业与一个大企业所使用的产品的数量不必属同一量级的. 在我们所研究的经济模型中, 投入产综总允许相差一个正常数以适用于各种不同情形. 华老证明了如果选用产综 $x_0 = u$ 作为投入, 则此经济系统永远保持平衡且可达最佳发展速度. 他把这个方法称为“*正特征矢量法*”(这里的“正特征矢量”正是上述的平衡解 u), 这乃是一种“按比例、高速发展”方法. 华老的特别精彩的结论是: 如果选用 $x_0 \neq u$ 作为投入, 则经济在运行过程中必定在某一年会出现不同符号 (零、正、负) 的产品, 俗称*破产*或*崩溃*. 我们将首次出现这种情况的年份记作 T, 并称之为*崩溃时* (或*破产时*等), 随后我们还会讲到在此之前若干步有*危机时*. 如果崩溃时间非常长, 我们就不必太认真. 但令人非常震惊的是: 经济系统极为敏感. 从初值 (x_0, y_0) 出发, 可依次算产出产综 $\{(x_n, y_n)\}_{n\geqslant 1}$. 在这里我们给出两个更具体的例子, 算出它们的破产时 (易算), 然后找出其前的危机时.

例 3.1 将初值取为平衡解小数点后 3 位: $(x_0, y_0) = (44.344, 20)$, 所得结果如下面的图 3.1 所示. 从图中看出, 前 7 年 (步) 的运行良好, 只是第 6, 7 步的上升快了些, 于是下一步就崩了, $T=8$. 对于此初值, 五年计划可行.

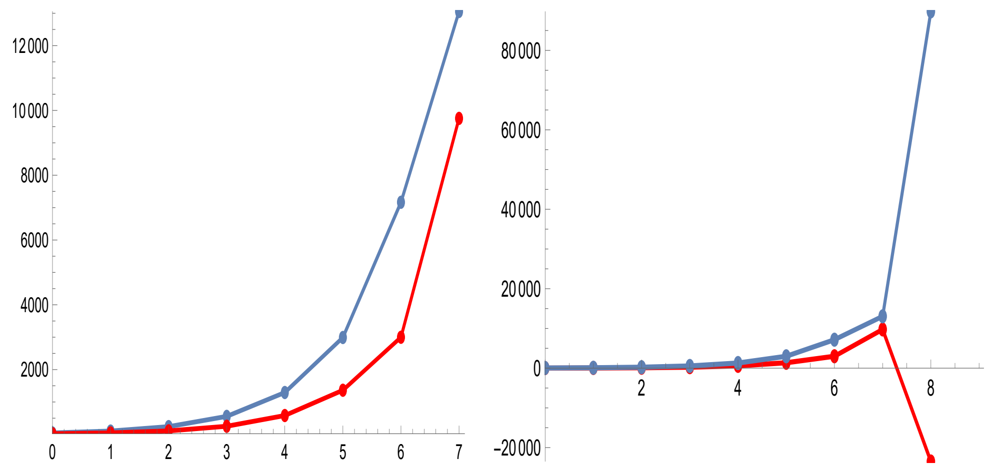

图 3.1

例 3.2 将平衡解的小数点后 8 位取全: $(x_0, y_0) = (44.34397483,\ 20)$, 则如图 3.2 所示, 崩溃时为 $T = 13$. 对于此例, 所用精度已经很高, 实践中已不易实现, 但至多也只能运行 12 年. 在第 13 年，上方曲线的最大值达到千万 (10^7), 下方曲线的最小值达到负百万. 易见危机时为 10 或 11.

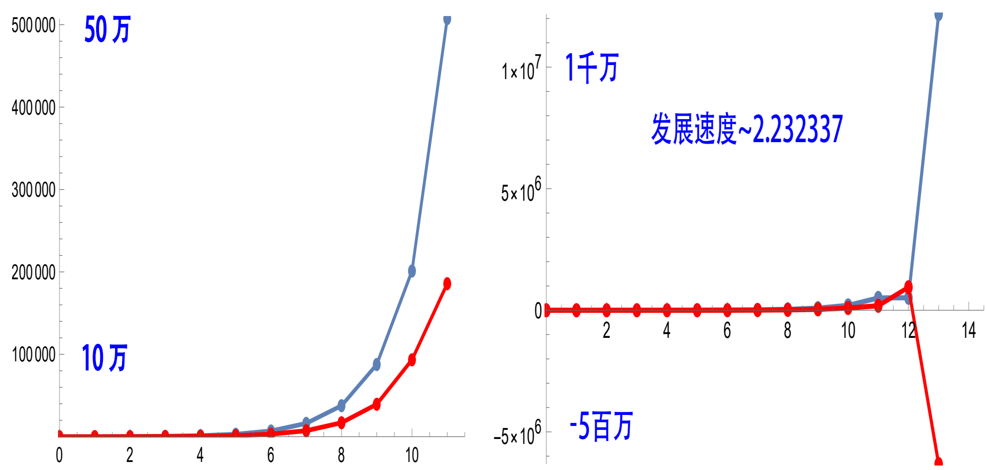

图 3.2

以上两图中的左图都停止于危机时, 这之前的运行相对稳定. 往前走一两步便崩掉, 构成图中的右图. 通常右图的尺度压缩很多, 与左图相比变化很大, 不属同一量级, 乃一次飞跃. 由这两例子足以看出经济系统的敏感性. 绝非主观可以想象. 不难理解: 经济发展的第一要素是维护系统平衡, 否则会造成大麻烦.

从上述图中可看出两产品发展速度很快, 右边图的大部分都被最后一步大跳掩盖了, 前些步的增长差不多都见不到了. 不难想象, 若处理更大系统, 迭代几百次, 则此法不可行 (计算机不能承受). 需寻找新办法.

4. 陈模型

1957 年, 华老在中国科学院数学所报告了当时经济界流行的华西里•列昂惕夫于 1936 年建立的投入产出法 (获 1973 年诺贝尔奖). 列昂惕夫取消了传统的**区分生产资料和消费资料**的基本要求, 简化了传统模型并成功地应用于实际. 华老从 Perron-Frobenius (1907, 1912) 定理出发知道不能将生产资料和消费资料混为一谈, 需要严格区分. 早在 1958-1959 年, 他在为中国科学技术大学数学系学生写的教材《高等数学引论》(第四册) 中给出上述定理的一个新证明. **华模型的核心部分保留严格区分两种不同性质的资料** 的传统部分, 而对于带消费模型, 需要引进新方法. 这实际上是我们的投入产出模型的一大难点. 在 1984–1985 年间，华老曾尝试过几种方法, 先后在《科学通报》上发表了 10 多篇研究简报, 要点是每一年要拿出增产总量的一部分用于消费而不是用于再生产, 华先生曾建议过两种处理方法. 在文 [9] 和 [8] 中使用

$$x_n - \xi_n = x_{n+1}A, \tag{4.1}$$

其中 ξ_n 为消费量; 而在文 [10] 中, 则将上式左方记为 $y_n = x_n - \xi_n$, 从而由 (4.1) 得 $y_n = x_{n+1}A$. 对 $\alpha \in (0,1)$, 把第 n 年增产的 α 倍 $\alpha(x_n - y_{n-1})$ 作为消费, 则第 n 年可用于第 $n+1$ 年生产的产综为

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \alpha(x_n - y_{n-1}) \\ &= (1-\alpha)x_n + \alpha y_{n-1} \\ &= (1-\alpha)y_{n-1}A^{-1} + \alpha y_{n-1} \\ &= y_{n-1}\left[(1-\alpha)A^{-1} + \alpha I\right]. \end{aligned}$$

我们得到模型

$$y_n = y_{n-1}B, \qquad n \geqslant 1, \tag{4.2}$$

其中 I 为单位矩阵，而 $B = (1-\alpha)A^{-1} + \alpha I$ 不再是非负矩阵, $\alpha \in (0,1)$ 为消费比例, 此时经济发展速度为 $(1-\alpha)\rho(A)^{-1} + \alpha$.

就我们所知, 直到 2021 年 10 月前, 人们都是沿用模型 (4.2). 但华老对上述提到的模型都不太满意, 直到他仙逝前 50 天左右, 才在他书稿 [11]《计划经济大范围最优化数学理论》的参考文献中略去了之前的全部研究简报, 称之为“被扬弃或遗忘”, 并建议了一个新模型, 即在 (4.1) 中取

$$\xi_n = \gamma(x_{n+1} - x_n),$$

其中$\gamma \in (0,1)$ 为消费比例, 则

$$x_n = x_{n+1}A + \gamma(x_{n+1} - x_n) = x_{n+1}(A + \gamma I) - \gamma x_n.$$

从而有

$$x_n = x_{n+1}A_\gamma, \quad A_\gamma = \frac{A + \gamma I}{1+\gamma}, \quad \rho(A_\gamma) = \frac{\rho(A) + \gamma}{1+\gamma}.$$

这样又回到非负阵的无消费情形

$$x_0 = x_n A_\gamma^n. \tag{4.3}$$

不幸的是华老的“最后想法”模型 (4.3) 沉睡了 37 年之后才被陈木法院士 [2] 唤醒.

模型 (4.3) 对应的经济系统的发展速度为 $1/\rho(A_\gamma)$, 当 $\rho(A) \geqslant 1$ 时，经济系统偏离正常，需另作研究，不在本文讨论之列. 自此之后，常假设 $\rho(A) < 1$, 对应的增长速度为

$$\frac{1}{\rho(A_\gamma)} - 1 = \frac{1-\rho(A)}{\gamma+\rho(A)} \downarrow \frac{1-\rho(A)}{1+\rho(A)} > 0, \quad \gamma \uparrow 1.$$

这表明模型 (4.3) 对任意的 $\gamma \in (0,1)$, 都拥有一致正的增长速度, 这与实际不符. 所以模型 (4.3) 存在失误. 由于

$$\frac{1-\rho(A)}{\gamma+\rho(A)} \downarrow 0 \iff \gamma \uparrow \infty.$$

为此, 陈院士提出以下模型. 取

$$\gamma = \frac{\alpha}{1-\alpha},$$

其中 $\alpha \in (0,1)$ 为消费参数, 从而 $\gamma \in (0,\infty)$ 与模型 (4.3) 中的 $\gamma \in (0,1)$ 完全不同 (实际上, 在实践中常有 $\gamma > 1$). 这样得新模型

$$x_0 = x_n A_\alpha^n, \qquad n \geqslant 1, \tag{4.4}$$

其中

$$A_\alpha = (1-\alpha)A + \alpha I, \quad \rho(A_\alpha) = (1-\alpha)\rho(A) + \alpha.$$

显然 A_α $(\alpha < 1)$ 与 A 有相同的左、右特征向量 u 和 v. 模型 (4.4) 称为**陈模型**.

从陈模型可以看出矩阵 A_α 的构造分两步:

$$A \overset{(1)}{\Longrightarrow} (1-\alpha)A \overset{(2)}{\Longrightarrow} (1-\alpha)A + \alpha I = A_\alpha.$$

(1) 因为需花费一部分资源用于消费, 所以原结构方阵 A 需扣除, 例如说 α 倍用于消费. 这样, 真正投入再生产的仅是原方阵的 $1-\alpha$ 倍.

(2) 扣除部分不用于再生产, 所以新的结构方阵中扣除部分的非对角元素取值为零; 而每一产品依然取出 α 倍贡献给新的结构矩阵. 干什么用? 就是用于消费.

5. 非负矩阵的关键变换 —— 陈变换

前面已经讲到, 当结构矩阵 A 为转移概率矩阵时, 陈院士已经给出了华罗庚基本定理的证明. 那么, 一般的结构矩阵能否变换为转移概率矩阵呢? 为此, 陈院士经过长期研究和探索.

首先要知道把 A 变为转移概率矩阵 P 需要做什么. 我们知道最大左正特征向量为 P 的平稳分布, 记为 π: $\pi = \pi P$. 马氏过程理论告诉我们, 在不可约条件下, P 的平稳分布唯一.

定义 5.1 设 $P=(p_{ij})_{d\times d}$ 为方阵，如果条件：

(i) 非负性：$p_{ij}\geqslant 0,\ i,j=1,\cdots,d$;

(ii) 行和为 1: $\sum_{j=1}^d p_{ij}=1,\ i=1\cdots,d$.

则称 P 为转移概率矩阵.

把 A 变为转移概率矩阵 P, 陈院士给出了答案.

引理 5.1 转移概率矩阵 P 的最大特征值为 1.

证明: 记 $\|x\|_\infty=\sup_k|x^{(k)}|$, $\|P\|_\infty=\sup_{x\neq 0}\|Px\|_\infty/\|x\|_\infty$. 因为 P 有特征值 1, 其对应于特征向量为 $\mathbb{1}$, 从而 P 的最大特征值 $\lambda_{\max}\geqslant 1$.

另一方面，由特征方程的定义 $Px=\lambda x$ 可知 P 的最大特征值为：

$$\lambda_{\max}=\sup_{x\neq 0}\frac{\|Px\|_\infty}{\|x\|_\infty}\leqslant\frac{\|P\mathbb{1}\|_\infty}{\|\mathbb{1}\|_\infty}=1.$$

因此，结论成立. □

注： 引理 5.1 中，如果 P 不可约, 可用 C-W 公式证明 P 的最大特征值为 1. 事实上，由 1 是 P 的特征值, $\mathbb{1}$ 为其对应的特征向量. 将 C-W 公式应用于向量 $\mathbb{1}$, 可得其最大特征值有上界 1.

设 $w>0$, 定义 w 与 x 的分量积 $w\odot x=(w^{(1)}x^{(1)},\cdots,w^{(d)}x^{(d)})$, D_w 表示以向量 w 的分量为对角线元素的对角矩阵, 记

$$A_w\hat{=}D_w^{-1}\frac{A}{\rho(A)}D_w, \tag{5.1}$$

我们有如下结果.

定理 5.1 (陈木法 1989/1992/2022) 对于 (5.1) 所定义的 A_w, 下述结论成立:

(i) A_w 成为转移概率矩阵 P 当且仅当 $w=v$;

(ii) P 的最大左特征向量为 $\mu:=u\odot v$;

(iii) 记 $\pi:=u\odot v/(uv)$, 则 π 为P 的平稳分布, $\pi=\pi P=\pi P^n$.

证明: 不妨设 $\rho(A)=1$. 由 (5.1) 中 A_w 的定义知

$$A_w\mathbb{1}=D_w^{-1}AD_w\mathbb{1}=D_w^{-1}Aw\overset{?}{=}\mathbb{1}.$$

结论 (i) 成立的充要条件是 $Aw=D_w\mathbb{1}$, 即 $Aw=w$. 因此, $w=v$.

关于 (ii), 由 (i) 可得

$$P=D_v^{-1}\frac{A}{\rho(A)}D_v \tag{5.2}$$

成立. 于是有

$$\mu P=u\odot vP=u\odot vD_v^{-1}AD_v=uAD_v=uD_v=u\odot v=\mu,$$

即 $u\odot v$ 为 P 的左特征向量. (ii) 成立.

将 $\mu = u \odot v$ 归一化, 记为 $\pi = u \odot v/(uv)$, 容易验证 π 为 P 的平稳分布. 又由

$$P\mathbb{1} = D_v^{-1} A D_v \mathbb{1} = D_v^{-1} A v = D_v^{-1} v = \mathbb{1}.$$

由引理 5.1 知 $\rho(P) = 1$, 且 P 的右特征向量为 $\mathbb{1}$. □

注 5.1 (1) 定理中结论 (i) 的充分性结果是 1989 年获得, 1992 年发表. 必要性是 2022 年补上的; 结论 (ii) 和 (iii) 也是 2022 年做的.

(2) 称 (5.2) 定义的 P 为矩阵 A 的**陈变换**, 于 1989 年由陈院士给出.

注 5.2 $u \odot v$ 的经济学含义:

(1) μ 包含了 A 的最大特征值 $\rho(A)$、最大左、右特征向量 u 和 v 的全部信息;

(2) u 表示各类产品的数量, v 表示相应产品每单位的真实价值, 而非市场价格;

(3) $u \odot v$ 为各产品的真实总价值, 有统一量纲, 用其作为产品等级排序是合理的, 我们稍后讨论.

下面是陈木法院士给出的一般结构矩阵情形华罗庚基本定理的证明.

华罗庚基本定理的证明: 由陈定理 (i) 知

$$D_v^{-1} \left(\frac{A}{\rho(A)}\right)^n D_v = P^n. \tag{5.3}$$

因此, 我们有

$$\left(\frac{A}{\rho(A)}\right)^n = D_v P^n D_v^{-1}.$$

假设 $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ 满足 $(x_0 D_v)\mathbb{1} = 1$, $x_0 = x_n A^n$ 且 $x_n \geqslant 0$ $(n \geqslant 0)$. 由 u 和 v 的定义及假设 $(x_0 D_v)\mathbb{1} = 1$ 知, 在相差一个正常数因子条件下 $x_0 = u$. 因为

$$x_0 D_v = x_n A^n D_v = [\rho(A)^n x_n D_v]\, D_v^{-1} \left(\frac{A}{\rho(A)}\right)^n D_v = [\rho(A)^n x_n D_v]\, P^n, \tag{5.4}$$

记 $y_n = \rho(A)^n x_n D_v$, 上式表明关于 $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ 的方程变为

$$y_0 = y_n P^n, \quad n \geqslant 0,$$

而且有 $y_0 \mathbb{1} = 1$ $(n \geqslant 0)$. 由陈定理和前面已证 $A = P$ 的特殊情形可得 $y_0 = u \odot v/(uv)$, 即 $x_0 = u/(uv)$. 因此, 为使一切 x_n 非负, 初值只能为 u. □

对给定的 P 和 μ_0, 定义$\mu_0 = \mu_n P^n$, $n \geqslant 1$. 称 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 为P 的迭代序列. 类似地 A 的迭代序列 $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ 由 $x_0 = x_n A^n$ 给出.下面结果给出了关于 A 和 P 两种迭代算法的等效性.

定理 5.2 P 和 A 的迭代序列 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 和 $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ 及 v 满足下列恒等式:

$$\mu_n = \rho(A)^n x_n \odot v, \quad n \geqslant 0, \tag{5.5}$$

$$x_n = \rho(A)^{-n} \mu_n \odot v^{-1}, \quad n \geqslant 0. \tag{5.6}$$

因此，两种算法等效.

证明: 设 $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ 为方程 $x_0 = x_n A^n$ 决定的递推解，则 (5.4) 式成立. 由 $x_0 D_v = \rho(A)^0 x_0 \odot v$ 知 $\mu_n := \rho(A)^n x_n \odot v$ $(n \geqslant 0)$ 就是方程 $\mu_0 = \mu_n P^n$ $(n \geqslant 0)$ 的递推解, 即 (5.5) 成立. 等价地, 可证 (5.6) 成立. □

在 (5.5) 的两边右乘向量 $\mathbb{1}$ 得 $\rho(A)^n x_n v = \mu_n \mathbb{1}$. 特别地, 如果取 $x_0 = u$, 则 $\mu_0 = u \odot v$, 归一化条件为 $uv = \mu_0 \mathbb{1} = 1 = \pi \mathbb{1}$. 注意到 μ_n 与 x_n 相差一个指数式主阶 $\rho(A)^n$ 及一个常值向量因子 v.

下面考虑带消费情形 $A_\alpha = (1-\alpha)A + \alpha I$ 的陈变换 P_α. 显然 A_α 的最大特征值为 $\rho(A_\alpha) = (1-\alpha)\rho(A) + \alpha$, 注意到 A_α 与 A 有相同的最大右特征向量 v, 从而 A_α 的陈变换为

$$
\begin{aligned}
P_\alpha =& D_{v^{-1}} \frac{A_\alpha}{\rho(A_\alpha)} D_v \\
=& \rho(A_\alpha)^{-1} \big[(1-\alpha) D_{v^{-1}} A D_v + \alpha I\big] \\
=& \rho(A_\alpha)^{-1} \left[(1-\alpha)\rho(A) D_{v^{-1}} \frac{A}{\rho(A)} D_v + \alpha I\right] \\
=& (1-\beta_\alpha) P + \beta_\alpha I,
\end{aligned} \tag{5.7}
$$

其中 $\beta_\alpha = \alpha/\rho(A_\alpha)$.

(5.7) 式表明 $P_\alpha\,(\alpha < 1)$ 有相同的最大左、右特征向量 $u \odot v$ 和 $\mathbb{1}$. 由上述定理, 可以证明关于 A_α 和 P_α 的两种迭代算法同样具有等效性.

在本节结束之前，让我们来说明陈变换的效果更好. 为此，我们再回到例 3.1 和例 3.2，利用 P 而不是 A 的稳定性测试, 结果如图 5.1 和 5.2 所示. 当然，P 所对应的初值与 A 所对应初值不同.

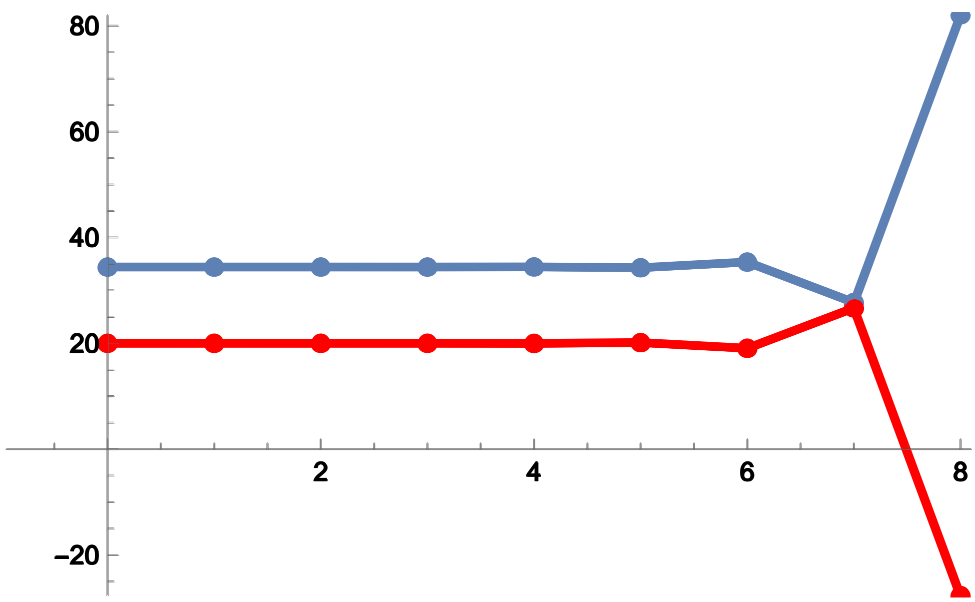

图 5.1　对初值为 (34.41181135, 20), $T = 8$, 对应于图 3.1 的新图

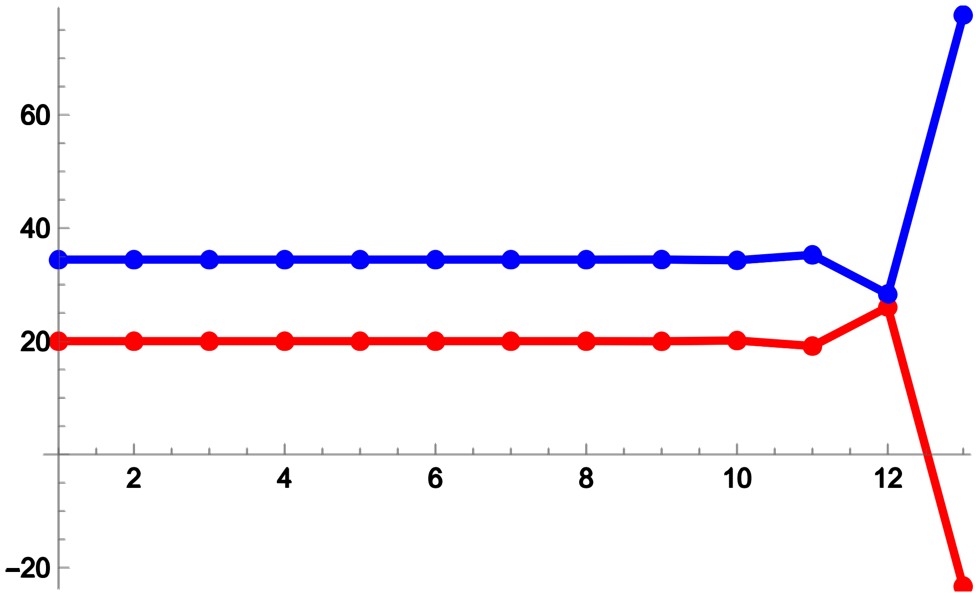

图 5.2 对初值为 (34.41179182, 20), $T = 13$, 对应于图 3.2 的新图

令人意外的是，P 和 A 有完全相同的稳定性, 即: 它们具有相同的崩溃时间和相同的崩溃位置(在相同的产品上). 更令人惊讶的是，用 P 生成的图比用 A 生成的图要好. 因此，在实际应用中，我们使用 P 进行稳定性测试.

6. 产品的等级排序和分类

我们知道华罗庚经济最优化定理 3.1(ii) 是主要贡献 (就我们所知在其以前从未出现过). 更指出一旦 $x_0 \neq u$, 系统将以指数速度崩溃, 因此, 了解经济系统中产品的分类很重要: 支柱产品、中间产品和劣势产品, 因为系统往往在一些劣势产品处崩溃.

对于非负不可约矩阵 A, 我们知道其最大左特征向量 u 只包含 A 的两个特征, 而 A 经过陈变换变为 P 的最大左特征向量 $\mu = u \odot v$ 就包含了 A 的全部三个特征. 前面说过 $u \odot v$ 表示各产品的真实总价值, 具有统一的量纲. 因此, 相较于用 A 的最大左特征值 u, 使用 P 的最大左特征值 μ 对产品排序更具科学性. 优点是除了 μ 包含全部三个特征外, 使用 P 或 A 的稳定性完全相同, 但前者的振幅远小于后者.

为了说明产品排序有意义, 我们给出一些实际例子. 图 6.1 是中国 2017 年 (红色)、2012 年 (蓝色) 和 2007 年 (黑色) 投入产出表的 42 种产品的排名. 因为我国每 5 年编制一次投入产出表, 它涵盖了中国 15 年的经济情况相关详细信息, 请参见 [1] 的第 4 章. 为便于观察, 纵坐标表示转移概率矩阵 P 的平衡解数值的倍数. 图中我们惊奇地发现, 三个年份的曲线图如此神似. 为保持产品的一致性, 分析这张图之前, 我们先说明一下: 对 2007 年的投入产出表缺失的第 24 号产品 “金属制品、机械与设备修理服务” 的数值进行了数值插补, 形成 2007 年 42 个产品平衡解的完整曲线图. 从图中可以看出蓝、黑曲线和红色曲线的主要区别在于红色的第 1 名从蓝色原来的第 1 名 12 号产品变成第 20 号产品, 第 12 号产品为“化学产品”, 第 20 号产品为“通信设备、计算机和其他电子设备”. 仔细考察从 2012 年到 2017 年间出现这样的变化就不难理

解了, 因为这段时间正是手机等电子设备开始大流行. 如果以 2012 年的蓝色曲线为基准, 从大到小的前 6 名用带圈的数字标出, 那么蓝色曲线与黑色曲线的前 6 名除第 5 名略有不同外其他基本一致.

另外从图 6.1 中还可以看出第 30 号产品“交通运输”、第 33 号“金融”、第 34 号“房地产”以及第 35 号“租赁与商务”在这三条曲线的排名依年份逐步上升. 我们还发现金融、房地产等产业并非支柱产品, 这可能颠覆了人们传统认知.

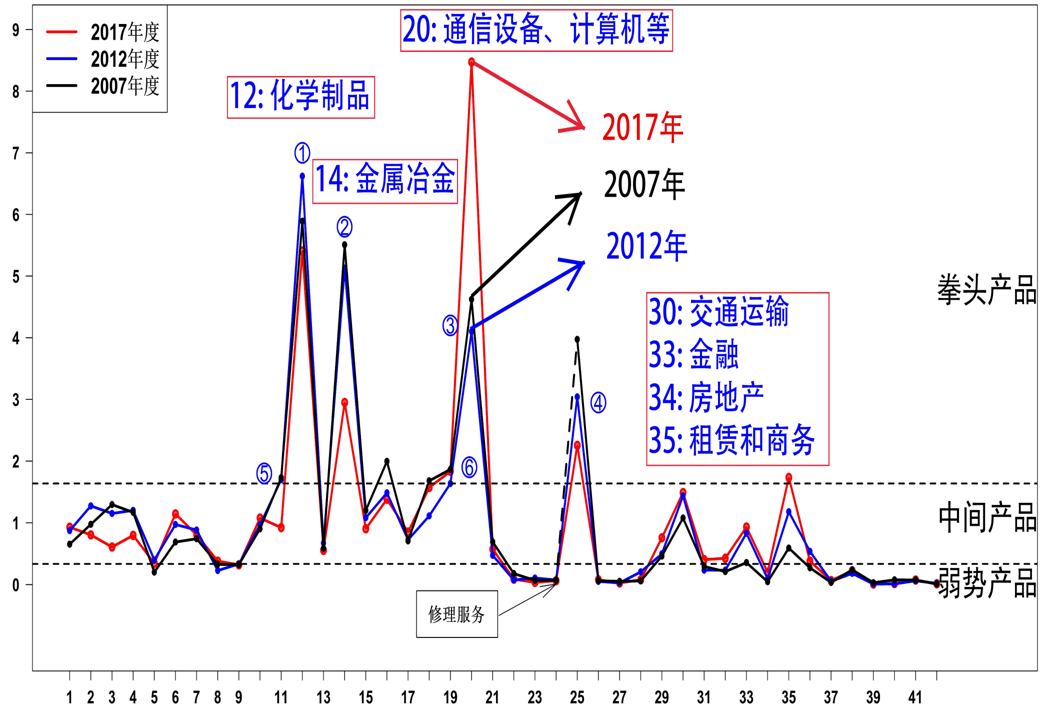

图 6.1　2017、2012 年 42 产品和 2007 年 41 产品的平衡解图

接下来的图 6.2 是由 π 生成的分布函数图. 按 π 分量递增序 $p_1 < p_2 < \cdots < p_{42}$ 排列, 得到离散的累积分布函数如下: $p_1, p_1 + p_2, \cdots, \sum_{k=1}^{42} p_k$.

对比分析三个年度 42 个产品的累积分布图, 首先是 2007 年, 图 6.2 中的横坐标为各产品的等级序, 纵轴是前 n 个产品的累积分布, 左、右两条竖线分别表示累计分布小于等于百分之五和大于等于百分之五十. 从图中可知: 2007 年有 17 个弱势产品, 5 个支柱产品.

同样可以画出 2012 年度和 2017 年度的 42 个产品的累积分布图.

现把三个年度的累积分布图放在一起分析, 黑色、蓝色和红色曲线分别为 2007 年、2012 年和 2017 年累积分布图.

从图 6.2 上可见跨越 15 年三个年度的累积分布曲线图也非常一致, 说明使用累积分布对产品等级分类亦可靠. 累积分布大于或等于 50% 构成“支柱产品”, 小于或等于 5% 为“弱势产品”. 因“弱势产品”数量偏多可以再进一步细分, 在图中补充了小于或等于 1%内含 8、9 个产品.

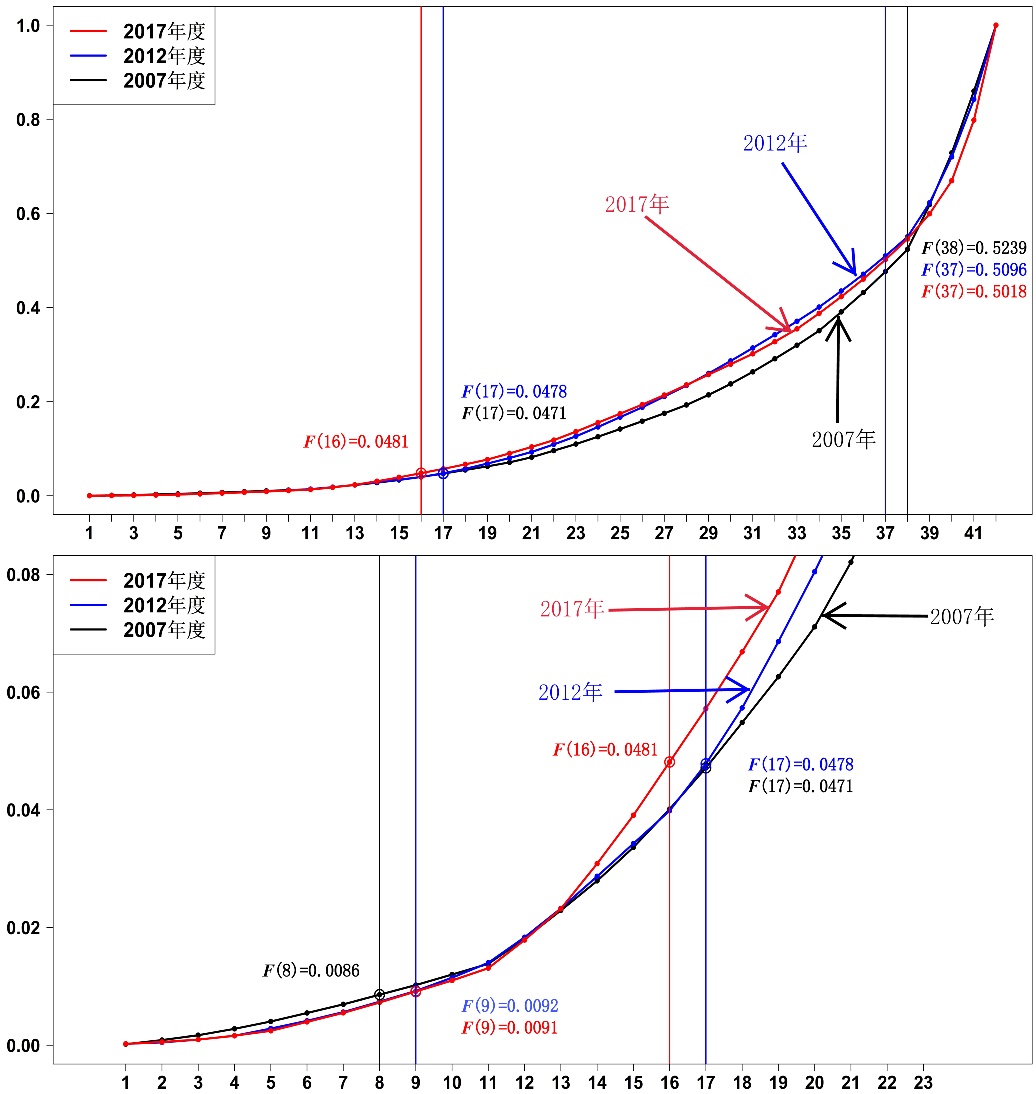

图 6.2 2017、2012 和 2007 三年度 42 种产品平衡解的累积分布

这里使用的三幅图取自 [13].

7. 量子波概率

本节内容主要取材于陈先生论文 [3]. 考虑复矩阵 A. 在一般情形下，我们知道有一些 Perron-Frobebius 定理的推广版本, 但结果相当有限. 然而, 第五节的一个关键点: 从 A 到 P 的变换仍然有意义.

定义 7.1 复矩阵 A 称为 SR1 (sum of each row equals 1)矩阵, 如果 $A\mathbb{1} = \mathbb{1}$, 即 A 的行和均为 1.

下面假设 $\lambda \neq 0$ 为复值矩阵 A 的单值特征值. 类似于第五节关键变换的陈定理, 我们有如下结果.

定理 7.1 (广义陈定理) 假设 (λ, u) 和 (λ, v) 分别为复矩阵 A 的左、右特征对, $uA = \lambda u$,

$Av = \lambda v$, 并且 v 的每个分量均不为 0. 对分量均不为 0 的列向量 w, 定义

$$R_w = D_w^{-1}\frac{A}{\lambda}D_w.$$

则下述结论成立

(1) R_w 为 SR1 矩阵的充要条件是 $w = v$;

(2) R_v 有左特征对 $(\lambda, u\odot v)$: $(u\odot v)R_v = \lambda(u\odot v)$.

把此定理应用于厄米矩阵 A, 由 A 的左、右特征向量互为共轭可知: $u = \bar{v}$, 因此, R_v 的左特征向量为 $u\odot v = \bar{v}\odot v$. 我们有如下推论.

推论 7.1 设厄米矩阵 A 满足上述定理的条件, 则 R_v 的左特征向量为 $\bar{v}\odot v$.

我们知道离散化的 Schrödinger 算子对应于厄米阵, 其特征值对应于离散能级. 在量子力学中, 波函数模的平方是粒子分布的概率密度, 即:

$$\pi = \frac{\bar{v}\odot v}{|v|^2} = \frac{(|v_1|^2, |v_2|^2, \cdots, |v_d|^2)}{|v|^2}.$$

换句话说, 向量 $\bar{v}\odot v$ 结合了厄米阵 A 的三个特征: 特征值 λ 和相应的左、右特征向量 u 和 v. 由于 $\bar{v}\odot v$ 表示 A 的波函数 (等价地, 特征向量) v 的振幅的平方, 这就解释了为什么在波恩关于矩阵力学的注释里应该使用"振幅的平方"而不是"振幅". 人们可以用它的归一化概率测度 π 来代替 $\bar{v}\odot v$ 讨论一个粒子出现的概率. 总之, 这只是用两种不同的语言对同一事物的解释, 不存在客观的随机性, 就像爱因斯坦说的"上帝不掷骰子".

留心实对称阵为复厄米阵的特例，故上述结论也适应于主成分分析.

8. 经济预测与调整

对带消费情形, 确定经济的发展速度需一步步通过计算核准.对于预定的发展速度, 首先算出消费参数, 从而计算出可用消费量. 具体如下:

$$\text{增长速度} \Rightarrow \text{消费参数} \Rightarrow \text{可用消费量} \overset{?}{\geqslant} \text{计划消费量}$$

如已有"$\geqslant$", 则可停止, 说明系统能按预定速度发展. 否则, 可通过减小增长速度再测试, 比如可用优选法反复测试.

定理 8.1([2]) 设经济增长速度为 $\delta \in (0, 1\wedge(\rho(A)^{-1}-1))$, 则第 $n+1$ 年的可用消费量为

$$\xi_n = \frac{1-(1+\delta)\rho(A)}{\delta}(x_{n+1}-x_n), \tag{8.1}$$

其中 x_n 为陈模型

$$x_n = x_{n+1}A_\alpha, \qquad \alpha := \frac{(1+\delta)^{-1}-\rho(A)}{1-\rho(A)}$$

的递推解, x_0 为预先给定的初值. 反之, 由第 $n+1$ 年的消费不超过 ξ_n 可确定最大增长速度为 δ.

证明: 由华罗庚基本定理 (i) 知经济增长速度 (记为 δ) 为最佳发展速度 $1/\rho(A_\alpha)$ 减 1, 因此有

$$\delta = \frac{1}{\rho(A_\alpha)} - 1 = \frac{1}{(1-\alpha)\rho(A)+\alpha} - 1. \tag{8.2}$$

解方程 (8.2) 得消费参数为

$$\alpha = \frac{(1+\delta)^{-1} - \rho(A)}{1-\rho(A)} =: \alpha(\delta), \tag{8.3}$$

消费倍数为

$$\gamma_\alpha = \frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{(1+\delta)^{-1} - \rho(A)}{1-(1+\delta)^{-1}} =: \gamma(\delta). \tag{8.4}$$

因此, 第 $n+1$ 年可用消费量为

$$\xi_n(\alpha) = \gamma_\alpha(x_{n+1} - x_n) = \frac{(1+\delta)^{-1} - \rho(A)}{1-(1+\delta)^{-1}}(x_{n+1} - x_n).$$

化简即得 (8.1) 成立. $\square$

注意到 $\rho(A) < 1$, 由 (8.3) 和 (8.4) 知 $\alpha(\delta)$ 和 $\gamma(\delta)$ 都是 δ 的单调递减函数, 这表明当经济增速加快时, 消费减少; 反之, 当经济增速降低时, 消费增加.

上述证明过程可知, 如果已知经济增速 δ, 由 (8.3) 可以计算出 α, 从而可计算出 A_α. 当给出第 n 年的投入产综 x_n 时, 可用陈模型计算出第 $n+1$ 年的产出产综 x_{n+1}, 从而可得出第 $n+1$ 年可用消费量 ξ_n.

反之, 如果给出第 $n+1$ 年可用消费量 ξ_n 以及第 n 年的投入产综 x_n, 预测经济增速 δ 的核心在于如何求解消费参数 α, 我们有如下结论.

推论 8.1 设实际需要的消费量 (计划消费量) 为 $\bar{\xi}_n$, 只需求 α 使得 $\bar{\xi}_n \leqslant \xi_n(\alpha)$. 自然地定义 $\bar{\alpha} = \inf\{\alpha \in (0,1) : \xi_n(\alpha) \geqslant \bar{\xi}_n\}$, $\bar{\alpha}$ 为 $\bar{\xi}_n$ 对应的消费参数. 因为 $\xi_n(\alpha)$ 关于 α 单调上升, 所以, 对应每个 $\alpha \geqslant \bar{\alpha}$,

$$\xi_n(\alpha) \geqslant \xi_n(\bar{\alpha}) \geqslant \bar{\xi}_n.$$

此时, 所计划的消费量 $\bar{\xi}_n$ 总是受控于可消费量 $\xi_n(\alpha)$, 由 $\bar{\alpha}$ 的定义和 (8.2) 可以确定 $\delta(\bar{\alpha})$.

由 $\xi_n(\alpha) = \gamma_\alpha(x_{n+1} - x_n)$ 知, 当 x_n 和 A 固定时, 可用消费量 $\xi_n(\alpha)$ 可由 $\alpha \in (0,1)$ 唯一确定. 实质上, $\xi_n(\alpha)$ 等同于产综 $x_{n+1} - x_n$. 更准确地说, 两者之比的比例常数为 $\alpha/(1-\alpha)$. 这是精心设计、很特别的产综. 一般地, 不能指望一个任选的计划消费量 $\bar{\xi}_n$ 会等于关于某个 α 的可用消费量 $\xi_n(\alpha)$. 但在实际应用中, 并不需要这么强的限制, 因为未必总要通过降低经济增速以提高消费量, 也许可以调整消费结构已接近于可用消费量的比例, 或通过某种其它方式, 如进口等补足消费量.

9. 产品调控与经济结构的优化

“产品调控”是确定优先或重点发展 (或淘汰) 的产品或产业, 这要建立在现有基础上, 对经济结构进行调整和优化, 需要严格的计算和论证.

这是一个非常困难的问题, 早在 2005 年, 陈院士就在他的专著 [6] 中作为未解问题提出, 直到 2022 年, 他才把这个问题彻底解决. 最大的困惑是何为优化标准? 众所周知，传统的优化理论是在某些约束条件下，决定某些可选变量的取值，使所选定的目标函数达到最优. 而对于我们的经济模型，问题是不知道优化的目标是什么, 即费用泛函或函数为何?

回忆我们的经济模型已两次优化: 一是以最快发展速度为目标, 另一是以永不崩溃为目标. 华氏基本定理告诉我们, 两者的唯一最优解是 A 的最大左特征向量 u. 这提示我们选择新的产综 $\tilde{u} = (\tilde{u}_k)$ 作为目标, 换言之, 我们找到了产品调控目标 $\tilde{u}$. 下一步, 构造新的结构方阵 $\tilde{A}$ 要以 $\tilde{u}$ 为其最大左特征向量. 事实上, 问题远比这些复杂的多. 例如我们考虑含 100 个产品的系统, 则需确定新方阵的 10^4 个元素, 但给定的新平衡解仅有 100 个数据, 剩下的 9900 个数据到哪里去找? 为填补新矩阵 $\tilde{A}$ 欠缺的信息, 我们可以要求新的消费矩阵 $\tilde{A}$ 尽可能地接近于原来的消费矩阵 A, 否则在实践中未必可行.

为完成新结构矩阵的构造, 我们先在下一节做一些必要准备, 然后再回来继续本节的主题.

10. 马氏链、对偶马氏链及经济结构矩阵的不变量

回顾关于矩阵 A 的陈变换

$$\frac{\tilde{A}}{\rho(\tilde{A})} = D_w^{-1} \frac{A}{\rho(A)} D_w, \qquad w > 0. \tag{10.1}$$

由陈定理 5.1(i) 知 $\tilde{A}$ 为转移概率矩阵 P (自然有 $\rho(\tilde{A}) = 1$) 当且仅当 w 为 A 的最大右特征向量 v. 我们也常直接称 P 为**马氏链**. 相应于 P 的**三大特征** (最大特征值及其左、右特征向量) 为 $(1, u \odot v, \mathbb{1})$.

将上述结果应用于 A 的转置 A^*, 则其右特征向量为 u^*, 由变换 (10.1)

$$D_w^{-1} \frac{A^*}{\rho(A)} D_w, \qquad w > 0$$

得出另一转移概率矩阵当且仅当 $w = u^*$. 后者的三大特征为 $(1, u^* \odot v^*, \mathbb{1})$ (当然, $u^* \odot v^* = u \odot v$). 为去掉上式中的 $*$, 只需作转置, 得出

$$Q_w := D_w \frac{A}{\rho(A)} D_w^{-1}.$$

此时, Q_w 的列和恒为 1 当且仅当 $w = u$. 称 Q_u 为**对偶转移概率矩阵**或**对偶马氏链** (简称**对偶链**). 其三大特征成为 $(1, \mathbb{1}^*, u \odot v)$.

在研究经济结构矩阵的不变量之前, 先复习一下最简单的不变量: 圆周率 π, 它略去了描述圆的大小的基本参数——半径 r, 得到

$$\pi = \frac{\text{圆的周长}}{2\,r} = \frac{\text{圆的面积}}{r^2}.$$

回想我们的带消费模型:

$$A_\alpha = (1-\alpha)A + \alpha I, \qquad \alpha \in [0,1),$$

略去刻画发展速度的谱半径 $\rho(A_\alpha)$, 此方阵族拥有两个不变量: 即它们有共同的最大左、右特征向量 u 和 v. 三大特征中有两个成为不变量 (与 α 无关). 我们已经看到, 这两个不变量 (是向量而不再是数量) 在经济理论中的重要地位.

现在给定 P, 考虑变换 (10.1) 的逆变换, 对于正的 w, 可定义**关于 $\boldsymbol{P}$ 的陈变换**

$$A_w := D_w P D_w^{-1}$$

作为 P 的相似变换, 我们有 $\rho(A_w) = 1$. 由此易证 w 为 A_w 的最大右特征向量. 因此, 依照变换 (10.1), 由 A_w 所导出的转移概率方阵就是 P. 这说明 P 是方阵族

$$\mathscr{A}_P := \{A_w = D_w P D_w^{-1} : w > 0\}$$

共有的**不变量** (**不变方阵**, 是方阵而不再是向量).

类似地, 我们可处理其对偶情形. 今固定对偶马氏链 Q, 定义方阵族

$$\mathscr{A}_Q := \{A_w = D_w^{-1} Q D_w : w > 0\}.$$

对于 $\mathscr{A}_Q$ 中的元素 A_w, 显然 $\rho(A_w) = \rho(Q) = 1$, 易证 w 为 A_w 的最大左特征向量, 因此, 由 A_w 导出的对偶马氏链重合于 Q. 这表明方阵族 $\mathscr{A}_Q$ 有**不变量** (**不变方阵**) Q.

上述的不变向量或不变矩阵统称为**陈不变量**.

留心因 $w > 0$, 如必要, 以 w^{-1} 代替 w, 在集合 $\mathscr{A}_Q$ 的定义中, 可将 $D_w^{-1} Q D_w$ 换成 $D_w^{\mp} Q D_w^{\pm}$, 所以集合 $\mathscr{A}_Q$ 足够大, 这在实践中有用, 因我们常要调整 $w = \tilde{u}$. 当然, 在方阵集 $\mathscr{A}_Q$ 的定义中, 可将 A_w 换成 $A_w/\rho(A_w)$ 用以增加 $\mathscr{A}_Q$ 的一个自由度.

11. 产品调控与经济结构的优化 (续)

现在, 我们可以回归到第九节的主题: 构造以 $\tilde{u}$ 为平衡解的新结构矩阵 $\tilde{A}$, 使之尽可能接近于原来的 A. 目前我们手上仅有 A 及其 u 和目标平衡解 $\tilde{u}$. 由上节知, 我们有完全确定的对偶链

$$Q_u := D_u \frac{A}{\rho(A)} D_u^{-1}.$$

它与 $A/\rho(A)$ 1-1 对应:

$$\frac{A}{\rho(A)} = D_u^{-1} Q_u D_u.$$

将 A 换成待求的 $\tilde{A}$, 我们同样可以形式上写出与上述的两个方程完全平行的方程:

$$Q_{\tilde{u}} := D_{\tilde{u}} \frac{\tilde{A}}{\rho(\tilde{A})} D_{\tilde{u}}^{-1}, \qquad \frac{\tilde{A}}{\rho(\tilde{A})} = D_{\tilde{u}}^{-1} Q_{\tilde{u}} D_{\tilde{u}}.$$

而且 $\tilde{u}$ 是已经给定的. 这样, 这后两个方程中仅有 $\tilde{A}$ 及相应的 $Q_{\tilde{u}}$ 是未知. 为使 $\tilde{A}$ 尽可能地接近于 A, 理应要求两者的不变量尽可能接近. 至此, 立即可想到的最简单取法是: $Q_{\tilde{u}} = Q_u$. 从 $Q_{\tilde{u}}$ 和 Q_u 出发, 按照上一节的方法, 可定义两个分别以 $Q_{\tilde{u}}$ 和 Q_u 为不变量的方阵族

$$\mathscr{A}_{Q_u} = \left\{ A : \frac{A}{\rho(A)} = D_w Q_u D_w^{-1},\ w > 0 \right\},$$
$$\mathscr{A}_{Q_{\tilde{u}}} = \left\{ \tilde{A} : \frac{\tilde{A}}{\rho(\tilde{A})} = D_w Q_{\tilde{u}} D_w^{-1},\ w > 0 \right\}.$$

当 $Q_{\tilde{u}} = Q_u$ 时, $\mathscr{A}_{Q_{\tilde{u}}} = \mathscr{A}_{Q_u}$. 详言之, 此时我们可从上述方程组解出仅有的未知量 $\tilde{A}/\rho(\tilde{A})$:

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{A}}{\rho(\tilde{A})} &= D_{\tilde{u}}^{-1} Q_{\tilde{u}} D_{\tilde{u}} \quad (\text{先在 } \mathscr{A}_{Q_{\tilde{u}}} \text{ 中取 } w = \text{已知的 } \tilde{u}) \\
&= D_{\tilde{u}}^{-1} Q_u D_{\tilde{u}} \quad (\text{命 } Q_{\tilde{u}} = \text{已知的 } Q_u) \\
&= D_{\tilde{u}}^{-1} D_u \frac{A}{\rho(A)} D_u^{-1} D_{\tilde{u}} \quad (\text{置换 } Q_u \text{ 的显式表示}) \\
&= D_{\tilde{u}^{-1} \odot u} \frac{A}{\rho(A)} D_{u^{-1} \odot \tilde{u}} \quad (\text{化简已是显式的右方}) \\
&= D_{\tilde{u} \odot u^{-1}}^{-1} \frac{A}{\rho(A)} D_{\tilde{u} \odot u^{-1}}.
\end{aligned}$$

因为 $\{A_\alpha, \alpha \in [0,1)\}$ 有相同的不变量 u 和 v, 此结果可立即推广到带消费情形, 这便得出下述定理.

定理 11.1 (陈经济结构优化定理) 具有最大左特征对 $(\rho(A_\alpha), u)$ 的结构矩阵 A_α 关于目标产综 $\tilde{u}$ 的优化矩阵 $\tilde{A}_\alpha$ 可由 (10.1) 及 $w = \tilde{u} \odot u^{-1}$ 给出:

$$\frac{\tilde{A}_\alpha}{\rho(\tilde{A}_\alpha)} = D_{\tilde{u} \odot u^{-1}}^{-1} \frac{A_\alpha}{\rho(A_\alpha)} D_{\tilde{u} \odot u^{-1}}, \qquad \alpha \in [0,1). \tag{11.1}$$

此时, $\tilde{A}_\alpha$ 的最大左、右特征向量分别为 $\tilde{u}$ 和 $\tilde{v} = v \odot u \odot \tilde{u}^{-1}$.

证明 只需补证末项断言. 由于 $\{A_\alpha : \alpha \in [0,1)\}$ 有共同的最大左、右特征向量 u 和 v, 故下面的证明略去 α 不写.

(a) 先证 $\tilde{u}$ 为 $\tilde{A}$ 的最大左特征向量, 这是构造 $\tilde{A}$ 的主要目标. 待证

$$\tilde{u} \frac{\tilde{A}}{\rho(\tilde{A})} = \tilde{u}.$$

留心对于任给的向量 x 和 y, 我们有 $x D_y = x \odot y = D_x y$. 于是

$$\tilde{u} D_w^{-1} = \tilde{u} \odot w^{-1} = \tilde{u} \odot \tilde{u}^{-1} \odot u = u,$$

由 (10.1) 得出

$$\tilde{u}\frac{\tilde{A}}{\rho(\tilde{A})} = \tilde{u}D_w^{-1}\frac{A}{\rho(A)}D_w = u\frac{A}{\rho(A)}D_w = uD_w = \tilde{u}.$$

这证得“左”的情形.

(b) 类似地可证“右”的情形. 这是矩阵 $\tilde{A}$ 的三大要素之一, 后面也要用到. 由 w 和 $\tilde{v}$ 的定义知

$$D_w\tilde{v} = w\odot\tilde{v} = \tilde{u}\odot u^{-1}\odot v\odot u\odot\tilde{u} = v, \tag{11.2}$$

我们得到

$$\frac{\tilde{A}}{\rho(\tilde{A})}\tilde{v} = D_w^{-1}\frac{A}{\rho(A)}D_w\tilde{v} = D_w^{-1}\frac{A}{\rho(A)}v = D_w^{-1}v = \tilde{v}. \quad \square$$

我们已经证明了由 (11.1) 所定义的结构优化矩阵实现了以预定目标产综作为新的平衡解, 有了 $\tilde{A}$ 及其 $\tilde{u}$, 便可进入新的经济系统. 要了解新系统和产品分类及稳定性测试, 自然想到使用其对偶链 $Q_{\tilde{u}}$ (已被强制为 Q_u) 的平衡态 $u\odot v$. 后者是对偶链的最大右特征向量, 然而它也是原结构矩阵导出的不变量 P 的平衡解. 由此看到, 作为后代的 $\tilde{A}$ 保留着其前辈的遗传基因 P. 事实上, 关于优化矩阵 $\tilde{A}$ 的产品等级序和稳定性测试, 我们可简单地回到原系统 A 所导出的 P, 根本用不着使用对偶链 $Q_{\tilde{u}}$. 今证明如下. 由已知的 $\tilde{v}$ 及 $w = \tilde{u}\odot u^{-1}$, 在 (11.2) 中已证 $w\odot\tilde{v} = v$, 于是得出

$$\tilde{P}_\alpha = D_{\tilde{v}}^{-1}\frac{\tilde{A}_\alpha}{\rho(\tilde{A}_\alpha)}D_{\tilde{v}} = D_{\tilde{v}}^{-1}D_w^{-1}\frac{A_\alpha}{\rho(A_\alpha)}D_wD_{\tilde{v}} = D_v^{-1}\frac{A_\alpha}{\rho(A_\alpha)}D_v = P_\alpha.$$

换言之, 我们证得下面优化矩阵的主要性质 (1).

定理 11.2 给定目标产综 $\tilde{u}$ 并固定 $\alpha\in[0,1)$, 记 $\tilde{A}$ 为上一定理所确定的优化矩阵 $\tilde{A}$, 则我们有

(1) 优化矩阵 $\tilde{A}_\alpha/\rho(\tilde{A}_\alpha)$ 的不变量 $\tilde{P}_\alpha$ 重合于原矩阵 $A_\alpha/\rho(A_\alpha)$ 的不变量 P_α.

(2) 稳定性指标 (崩溃时间, 崩溃地点 (即产品)) 是 $A_\alpha, \tilde{A}_\alpha$ 和 P_α 共享的不变量.

证明 只须再证断言 (2). 由于$A_\alpha, \tilde{A}_\alpha$ 和 P_α 的稳定性都是通过 P_α 来实现的, 而且由断言 (1) 知, 两者有共同的不变量 P_α, 这样, 为证断言 (2), 只需证明 A_α 和 P_α 有共同的稳定性指标. 这可从下一结果导出. 详言之, 因为关心是两产综 μ_n 和 x_n 何时 (即 n) 及何处 (即第几个产品) 出现负号, 所以可在恒等式 (11.3) 两边略去正数因子 $\rho(A_\alpha)^n$ 和 v, 然后所需断言显而易见. $\square$

下述结果是定理 5.2 的自然扩充，无需再证明.

定理 11.3 (转换定理/等效原理) [[1]: 定理 7.3] P_α 的迭代序列 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 与 A_α 的迭代序列 $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ 及 v 满足恒等式:

$$\mu_n = \rho(A_\alpha)^n x_n\odot v, \qquad n\geqslant 0, \tag{11.3}$$

$$x_n = \rho(A_\alpha)^{-n}\mu_n\odot v^{-1}, \qquad n\geqslant 0. \tag{11.4}$$

因此, 两种算法等效.

如在 (11.3) 中取 $x_0 = u$, 则 $\mu_0 = u \odot v$. 再在 (11.3) 两边右乘向量 $\mathbb{1}$, 得出 $\rho(A)^n x_n \odot v\mathbb{1} = \mu_n \mathbb{1}$. 特别地, 当 $n = 0$ 时, 得出归一化条件 $uv = \mu_0 \mathbb{1} = 1 = \pi\mathbb{1}$. 留意 μ_n 与 x_n 相差一个指数式主阶 $\rho(A)^n$ 及一常值向量因子 v.

上述定理也适用于由 (10.1) 所定义的一般变换: $A \to \tilde{A}$.

12. 可程序化进而可智能化的高效算法

华氏经济最优化理论有别于其他现有的经济学理论的标志是可计算和可程序化. 陈氏经济优化新理论的重要基石之一就是非负矩阵最大特征值及其相应的左、右特征向量的计算. 从系统稳定性分析可知, 不仅需要这三个量，更需要其计算精度.

容易想象, 精密科学需要高精度计算. 算法在新理论中占有重要地位. 近些年，陈院士利用随机数学等方法, 在矩阵特征对快速算法等研究领域取得了很多重大进展, 为经济优化研究的计算问题奠定了算法基础. 关于矩阵特征值标准算法的幂法和反幂法, 人们通常认为幂法收敛速度太慢, 没有多少用处, 而反幂法因使用了 Rayleigh 熵估计, 未必可靠, 陈木法院士引进了新的安全估计, 完全避免了 Rayleigh 熵, 并借用机器学习的思想, 进一步把上述两种方法及其变形混合使用, 实现了通用的高速算法.

具体地, 对于矩阵的最大特征值及相应的特征向量计算, 由于现在计算机硬件、软件功能都很强大, 低维矩阵或对称矩阵已不难实现. 然而, 对于高维非对称的大矩阵, 依然限制很大. 为此, 陈院士提出了两种有效算法: **矩阵拟对称化技术**和**特征向量抹平技术**. 前者用于降低矩阵的振幅 ($\max A - \min A = \max_{ij} a_{ij} - \min_{ij} a_{ij}$), 后者使右特征向量 v 尽可能平坦，即 $\max v/\min v = \max_i v_i/\min_i v_i$ 近乎常数.

矩阵拟对称化技术: 给定非负不可约 $A = (a_{ij})$. 定义如下 Q 矩阵 (马氏链术语, 即非对角线元素非负、行和均非正的矩阵. 这里行和均为零):

$$Q = A - D_{A\mathbb{1}}.$$

由不可约性知方程

$$\mu Q = 0$$

有满足初始条件 $\mu^{(1)} = 1$ 的唯一正解 $\mu = (\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \cdots, \mu^{(d)})$. 有了正向量 μ, 我们便可定义 A 的**拟对称化**矩阵 $\hat{A}$:

$$\hat{A} = D_{\mu^{1/2}} A\, D_{\mu^{-1/2}}.$$

引进这一概念的重要原因在于: A 关于 μ 可配称, 即

$$D_\mu A = A^* D_\mu \quad [= (D_\mu A)^*] \quad (\text{它是对称性的极重要推广}).$$

换言之, A 关于 μ 可配称当且仅当 $\hat{A}$ 对称. 这样, 这项技术至少包含了可配称情形, 具有可靠根基. 文 [4] §4 通过一个简单三对角阵, 说明了对称化技术对于非对称、但可配

称矩阵特征对计算的无可替代的威力. 一般地, 我们不能指望 A 可配称, 但 $\hat{A}$ 常会降低 A 的振幅.

特征向量抹平技术: 幂法和反幂法都是以计算特征向量为中心的. 如果该特征向量的振幅太大, 这根本就不可能实现. 所以进一步将 $\hat{A}$ 变换为特征向量尽可能平坦 (即 $\max v/\min v$ 近乎为常值) 的矩阵, 自然对计算有利. 初看起来, 此题难于入手, 但有了陈定理 5.1, 所期待的结论就很自然了.

定理 12.1 设 w 为任一正向量, 记

$$\bar{A} := A_w = D_w^{-1} A\, D_w = \left(w^{-1} \otimes w\right) \odot A,$$

其中 $w^{-1} \otimes w = (w_j/w_i)_{d\times d}$ 为向量 w^{-1} 和向量 w 的张量积. 则 $A_{\mathbb{1}} = A$. 记 A_w 的最大右特征对为 $(\rho(A_w),\ g_w)$. 一般地, 我们有

$$\rho(A_w) = \rho(A), \qquad g = g_{\mathbb{1}} = D_w g_w.$$

特别地, 若 $\max_i |w^{(i)} - v^{(i)}|$ 足够小, 则 g_w 为接近于常值的向量.

证明: 因为 A_w 为 A 的相似变换, 特征值不变, 特征向量 g_w 满足

$$\rho(A) g_w = D_w^{-1} A D_w g_w.$$

于是有 $\rho(A) D_w g_w = A(D_w g_w)$, 这表明第一项断言成立. 下证末项断言. 因为

$$D_w g_w = g = D_v g_v = D_v \mathbb{1},$$

我们有

$$g_w = D_w^{-1} D_v \mathbb{1} = D_{w^{-1}\odot v} \mathbb{1} = w^{-1} \odot v.$$

由此导出所需断言, 因为 $w^{-1} \odot v$ 是接近于常值的向量. $\square$

现在可以陈述我们的特征向量抹平技术. 假定 w 为 v 的近似解, 则 $\bar{A}$ 的右特征向量近乎常值向量.

综上可知陈变换 (关键变换: $A \to P$) 在陈氏经济优化新理论中的地位和作用. 整个新理论中, 一共使用了七次关键变换:

(1) 第 3 节和第 5 节华罗庚基本定理的证明;

(2) 在稳定性测试中, 以 P 代替 A 研究系统的稳定性;

(3) 在产品的等级排序与分类中, 用 P 的平衡解, 即 A 的最大左、右特征向量的分量积, 它有明确的经济学意义;

(4) 在经济结构优化中两次使用对偶链, 即两次使用了关键变换;

(5) 优化后的新经济结构 $\tilde{A}$ 的稳定性测试回到 P ($\tilde{P} = P$);

(6) 二次优化后的新经济结构 $\kappa\tilde{A}$ 稳定性测试还是用 P, A, $\tilde{A}$, $\kappa\tilde{A}$ 与 P 有完全相同的稳定性.

由此可见，转移概率方阵 P 是当之无愧的不变量.

致谢： 本文第二作者于 1988 年盛夏时节，有幸在青岛大学“多指标随机过程学术会议”期间初谒陈木法院士. 在此后三十余载的学术历程中，陈先生始终不渝地给予我们悉心指导与无私提携，其深厚的学术造诣与高尚的师德风范令人景仰. 自 2019 年冬陈先生执教江苏师范大学以来，更以耄耋之年躬亲指导研究团队，尤其对经济优化理论与应用研究, 先生悉心指导使我们受益匪浅. 值此陈木法院士八秩华诞佳期，谨以此文敬献，恭祝先生学术之树常青，桃李满园芬芳.

承蒙刘笑颖教授和李月爽博士惠予审阅文稿并指正数理推导之谬误，特此申谢!

参考文献

[1] 陈木法, 谢颖超, 陈彬, 周勤, 杨婷 (2025). 华罗庚经济优化新理论与实证. 北京师大出版社, 北京.

[2] Chen, M.F. (2022). *New Progress on L.K. Hua’s Optimization Theory of Economics*, Chinese J. Appl. Probab. Statist. 38(2): 159-178.

[3] Chen, M.F. (2024). *Economic ProductRank and Quantum Wave Probability*, CSIAM Trans. Appl. Math., DOI: 10.4208/csiam-am.SO-2023-0002
https://www.global-sci.org/intro/online/read?online_id=2493

[4] Chen, M.F. (2018). *Hermitizable, isospectral complex matrices or differential operators*. Front. Math. China, 13(6): 1267–1311.

[5] Chen, M.F. (2004). *From Markov Chains to Non-Equilibrium Particle Systems*, World Scientific, Singapore, 1992, Second Edition World Scientific, Singapore, 2004.

[6] Chen, M.F. (2005). *Eigenvalues, inequalities, and Ergodic Theory*, Springer.

[7] Chen, M.F. and Mao, Y.H. (2021). *English Translation: Introduction to Stochastic Processes*, World Sci. Singapore and Higher Edu. Press Beijing.

[8] Hua, L.K. (1984). *On the mathematical theory of globally optimal planned economic systems*, Proc. Nati. Acad. Sci. USA Vol. 81, 6549-6553.

[9] 华罗庚 (1984). 计划经济大范围最优化数学理论(IV)–数学模型，(V) –论调整；(VI) – 生产能力的上限, 表格, 科学通报, 961-965.

[10] 华罗庚 (1985). 计划经济大范围最优化数学理论(X) –生产系统的危机，科学通报, 641-645.

[11] 华罗庚 (1987). 计划经济大范围最优化数学理论. 中国财政经济出版社, 北京. 作者和题目同上 (新版, 2024), 陈木法、石昊坤编, 北京师大出版社, 北京.

[12] Meyer, C.D. (2000). *Matrix analysis and applied algebra*, SIAM, Philadephia, PA.

[13] Yang, T., Chen, B. and Zhou, Q. (2024). *Demonstrational examples based on the new theory of L. K. Hua’s economic optimization*, Chinese J. Appl. Probab. Statist. 40(4),

663 – 683.