$(E-P_{l_1})x_1$,移项得$(E-P_{l_1}P_{l_2})M_1=(E-P_{l_1})x_1+P_{l_1}(E-P_{l_2})x_2$,由引理知$E-P_{l_2}P_{l_1}$可逆,上式两边左乘以$(E-P_{l_2}P_{l_1})^{-1}$即得(1).

同理(4)代入(3)可得(2).证毕.

定理 **2** 点M关于直线l(平面c)的对称点为$M_1=2N-M$,其中N为M在直线l(平面c)上的投影.

证明 因为N是M与M_1的中点,所以$N=\frac{M+M_1}{2}$,故$M_1=2N-M$.

例 **1** 已知空间有四点: $A(1,2,3)$, $B(2,1,0)$, $C(3,0,2)$, $D(0,1,0)$.求直线AD与BC公垂线l的方程(文[1]例5).

解 $\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$, l的方向向量为$\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{BC}=\{-5,-1,2\}$,

$$P_{l_1}=P_{\overrightarrow{AD}}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}1&1&3\\1&1&3\\3&3&9\end{pmatrix},$$

$$P_{l_2}=P_{\overrightarrow{BC}}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&1&-2\\2&-2&4\end{pmatrix},$$

$$x_1=D=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ x_2=C=\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}.$$

代入定理1中的(1)得$M_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$,所以$l$的方程为$\frac{x}{-5}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$.

例 **2** 求直线l: $\frac{x-3}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-5}{3}$关于平面c: $3x-y+5z+1=0$的对称直线l'的方程.

解 设$A_1=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$为直线$l$上任一点,$A_1$在c上的投影为$B$,$A_1$关于c的对称点为$A=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$,点$C=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$在c上.

$$\begin{aligned}B&=P_cA_1+(E-P_c)C\\&=\frac{1}{35}\begin{pmatrix}26x_1+3y_1-15z_1-3\\3x_1+34y_1+5z_1+1\\-15x_1+5y_1+10z_1-5\end{pmatrix}\end{aligned}$$

由定理2

$$\begin{aligned}A&=2B-A_1\\&=\frac{1}{35}\begin{pmatrix}17x_1+6y_1-30z_1-6\\6x_1+33y_1+10z_1+2\\-30x_1+10y_1-15z_1-10\end{pmatrix}\end{aligned}\qquad(*)$$

又A_1在l上,即$\frac{x_1-3}{1}=\frac{y_1-4}{2}=\frac{z_1-5}{3}\triangleq t$.

$x_1=t+3$, $y_1=2t+4$, $z_1=3t+5$,代入(*)得

$$\begin{cases}x=\frac{1}{35}(-61t-81)\\y=\frac{1}{35}(102t+202)\\z=\frac{1}{35}(-55t-135)\end{cases}$$

即l'的方程为$\frac{x+\frac{81}{35}}{-61}=\frac{y-\frac{202}{35}}{102}=\frac{z+\frac{135}{35}}{-55}$.

参考文献

1 童春发,直线和平面的投影阵及其应用.数学通报.1997,4.

关于 FIBONACCI数列的注记*

陈木法

(北京师范大学数学系 100875)

新近的文[1]和[2]研究了Fibonacci数列(简称为F数列)的一些性质,笔者发现这些结果大多容易从文[3]的两条基本性质导出.因而略作说明.

* 编者按: 自1997年6月刊登刘元宗文章提出猜想后,本刊陆续收到数篇证明猜想的稿件.有北师大的陈木法,江苏江都市大桥高中的党庆寿,武汉铁路成人中专的简超,江苏杨中的郭洪智,河南洛阳师专的郭秀兰,刘元宗.辽宁本溪冶专的常莉,戴志国.北京林业大学的郝英姿等等.今选登两篇.

所谓 F 数列,乃是　　$F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ n \geq 2$

它有通项公式　　$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(k^{-n} - (-k)^n\right),\ n \geq 0,\ k = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

熟知, k^{-1} 和 $-k$ 是方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 的两根.所述 [3]中的两式 (即该文的 (8)、(9))分别为

$$F_nF_m - F_{n+1}F_{m-1} = (-1)^{m-1}F_{n-m+1},\ n+1 \geq m \geq 1 \tag{1}$$

$$F_{n-1}F_{m-1} + F_nF_m = F_{n+m-1},\ n, m \geq 1 \tag{2}$$

为作比较之方便,这里改用 F_{n+1} 表示 [3]中的 F_n.这两条性质简单明了,也许是 [3]中首次找到的、研究单因素优选问题的重要工具.因为 F_n 已有并不复杂的通项公式,关于 F 数列的过于繁杂的性质并无多少用处.顺便提及,基于研究优选法的需要,文 [4; § 2]给出了广义 F 数列的类似性质.

当然,(1)和 (2)均可用数学归纳法或 F_n 的通项公式证出.这类问题的难点在于“发现”而不在于“证明”.

1　现在,我们指出: 文 [1]中的定理 1、定理 3和定理 4均容易由 (1)和 (2)导出 (而其中的定理 2可由通项公式算出).定理 1和定理 4只需用到 (1)而十分简单,此处只证原证较繁的定理 3.

定理 ([**1**;定理 **3**]) $F_{n+d}F_{n-d} - F_n^2 = (-1)^{n-d+1}F_d^2, n \geq d$.

证明 留意

$$\begin{aligned}F_{n+d}F_{n-d} - F_n^2 &= (F_{n+d}F_{n-d} - F_{n+d-1}F_{n-d+1}) \\ &\quad + (F_{n+d-1}F_{n-d+1} - F_{n+d-2}F_{n-d+2}) + \cdots + (F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2)\end{aligned}$$

对右方每一括号加项使用 (1)得出

$$\text{上式右方} = (-1)^{n-d-1}F_{2d-1} + (-1)^{n-d}F_{2d-3} + \cdots + (-1)^{n-2}F_1.$$

因此只需再证 $F_{2d-1} + (-1)F_{2d-3} + \cdots + (-1)^{d-1}F_1 = F_d^2$

假设此式对 d 成立.则对于 $d+1$,左方成为 $F_{2d+1} - F_d^2$.因而所述断言可由归纳法和 (2)得到.

此定理给出了 F 数列第 n 项和第 $n \pm d$ 项之间的一个关系,而 (1)和 (2)只给出接连两项 $F_{m\pm1}$ 和 $F_{n\pm1}$ 之间的关系.后者能推出前者的要点在于 F 数列是二阶的.这个观点在随后化简 (3)、(4)两式时还会反映出来.这也是把 (1)、(2)称为基本性质的原因之所在.

2　文 [2]开头所述的 A. Di Domenico (1991)的三个结果

(i) $F_nF_{n+4} - F_{n+1}F_{n+3} = 2(-1)^{n-1}$;

(ii) $F_nF_{n+4} + F_{n+1}F_{n+3} = 2F_{n+2}^2$;

(iii) $(F_nF_{n+4})^2 - (F_{n+1}F_{n+3})^2 = (-1)^{n-1}(2F_{n+2})^2$

均可由 (1)导出. (i)式显然是 (1)的特例.先用 (1)得出 $F_{n+2}^2 = (-1)^{n+1}F_1 + F_{n+1}F_{n+3}$;代入 (ii)右方;再由 (1)得 (ii). (iii)式由 (i)和 (ii)得出.类似地,还可证明 [2]中的其它一些关系式.

3　最后,我们证明文 [2]的猜想: 对于任意的自然数 $K \geq 5$,存在自然数组 (λ_i) 使得

$$\sum_{i=1}^{(K-1)/2} \lambda_i (F_{n+i}F_{n+K-i+1} - F_{n+(K+1)/2}) = 0, K\text{为奇数} \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{K/2-1} \lambda_i (F_{n+i}F_{n+K-i+1} - F_{n+K/2}F_{n+K/2+1}) = 0, K\text{为偶数} \tag{4}$$

对于一切自然数 $n \geq 1$ 成立且使 $\Sigma\lambda_i$ 最小.

先证 (3).由上述定理知,当 K 为奇数时,

$$F_{n+i}F_{n+K-i+1} - F^2_{n+(K+1)/2} = (-1)^{n+i+1}F^2_{(K+1)/2-i}.$$

因而(3)式成为

$$\sum_{i=1}^{(K-1)/2} \lambda_i (-1)^{i-1} F^2_{(K+1)/2-i} = 0. \qquad (5)$$

注意$\{(-1)^{i-1}F^2_{(K+1)/2-i}\}$是与$n$无关的正、负相同的自然数数列.记其正、负项总和分别为Σ_+和Σ_-.那么,可取既约自然数T_+和T_-使得$T_+/T_- = \Sigma_+/\Sigma_-$.现在,把(5)中的正、负项系数$\lambda_i$分别取为$T_+$和$T_-$,便得出(5)的一组解$(\lambda_i)$.进而,满足(5)及$\Sigma_i\lambda_i \leq n_+ a_+ + n_- T_-$ ($n_\pm$分别为和式(5)中的正、负项的个数)的解至多有限,故使$\Sigma_i\lambda_i$达到最小的解必定存在.

再证(4).与上述定理的证明类似,使用(1)导出

$$F_{n+i}F_{n+K-i+1} - F_{n+K/2}F_{n+K/2+1} = (-1)^{n+i+1}(F_{K-2i} + (-1)F_{K-2i-2} + \cdots + (-1)^{(K-2i)/2-1}F_2).$$

然后使用数学归纳法及(2)可证$F_{2d} - F_{2d-2} + \cdots + (-1)^{d-1}F_2 = F_dF_{d+1}$, $d \geq 2$.于是有

$$F_{n+i}F_{n+K-i+1} - F_{n+K/2}F_{n+K/2+1} = (-1)^{n+i+1}F_{K/2-i}F_{K/2-i+1}$$

(当然,此式也可由通项公式直接验证).故(4)式化成

$$\sum_{i=1}^{K/2-i} \lambda_i (-1)^{i-1} F_{K/2-i}F_{K/2-i+1} = 0.$$

现在,只需重复K为奇数情形的证明便可得出(4).

参考文献

1 孔庆海,戴志国.Fibonacci矩阵.数学通报,1997,5.

2 刘元宗.关于任意$K(K\geq 5)$个连续 Fibonacci数的猜想.数学通报,1997,6.

3 陈木法.论不定次(批)数条件下单因素优选问题的最优策略.贵阳师范学院学报,1977(3),117-134.

4 Chen, M. F. and Huang, D. H. On the optimality in general sense for odd-block search. Acta Math. Appl. Sin., 1995(11:4),389-404.

关于连续 Fibonacci数的公式

简超

(武汉铁路成人中专 430012)

设F_n表示 Fibonacci数: $F_1 = F_2 = 1$,

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1},\ n = 1, 2, 3, \cdots$$

并约定$F_0 = 0$.本文给出关于连续 Fibonacci数的几类公式,并证明文[1]的猜想成立.

引理 设d为非负整数,则对于$n \geq d$有

$$F_{n-d}F_{n+d} = F_n^2 + (-1)^{n+d+1}F_d^2 \qquad (1)$$

$$F_{n-d}F_{n+1+d} = F_nF_{n+1} + (-1)^{n+d+1}F_dF_{d+1} \qquad (2)$$

证明 (1)见文[2]定理3.下面用数学归纳法证明(2),对d归纳:

当$d=0$时,显然(2)对于$n \geq 0$成立.

设$d = k-1$时(2)成立,即对于$n \geq k-1$有

$$F_{n-k+1}F_{n+k} = F_nF_{n+1} + (-1)^{n+k}F_{k-1}F_k \qquad (*)$$