数学通报(2012): 第51卷第9期, 第1–6页

数 学 的 进 步

陈 木 法

(北京师范大学)

我们从三个侧面来考察现代数学的进步: 1、百年难题的破解, 2、研究领域的拓展, 3、政府民间的关注. 头两个方面来自数学内部, 第三方面是外部环境. 我们不仅可以从数学发展的历史中吸取力量, 还可以从中得到许多启迪.

§1 百年难题的破解

关于难题的破解, 让我们限于最近 30 年. 第 1 个难题是 1984 年破解的 Bieberbach 猜想. 此猜想是 Ludwig Bieberbach 于 1916 年提出的 (因而少于百年). 考虑这样的一个全纯函数 f, 它将开单位圆 1-1 映到复平面. 先将 f 写成幂级数: $f(z)=\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$. 如必要, 作一下平移, 可设 $a_0=0$. 由假设, 还可设 $a_1=1$. 于是可假定 $f(z)=z+\sum_{n\geqslant 2} a_n z^n$. 这里有一个简单的例子[增补, 2013 年 8 月]:

$$f(z)=\frac{z}{(1-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty} n z^n.$$

问题是关于系数 a_n，我们能说些什么？例如易知$\sum_{n\geqslant 2}|a_n|=\infty$. 否则 f 在单位园上有界. 下面是深刻得多的难题.

百年难题 1.1 (Bieberbach 猜想或 de Branges 定理). *第 n 项系数的模不超过 n: $|a_n|\leqslant n$.*

应当说，这是 Bieberbach 非常大胆的猜想，因为他本人只证明了 $n=2$ 情形. 在随后的半个多世纪里，也只证出 $n\leqslant 6$ 时成立. 美国 Purdue 大学的 de Branges 45 岁才开始进攻这一难题. 做了 7 年, 完成了 355 页的预印本. 也许因为文章太长，最初在美国同行中交流并未得到足够重视. 幸运的是他得到美国与前苏联双边合作交流的机会. 在那里作

了系列演讲. 经过细心的研讨，找到了大为简化的证明. 最后发表的文章只有十几页. 宣告了这一难题的破解.

很有意思的是，在 de Branges 72 岁(2004)时, 他宣称证明了黎曼猜想. 可惜在他 78 岁(2010)时, 在他的主页上刊出文章: “Apology for the proof of the Riemann hypothesis”.

无论如何, de Branges 研究数学的锲而不舍的精神，是值得我们引以为敬的. 攻克数学难题, 有无数人牺牲了毕生的精力却空手而归. 这里, 失败是普遍的, 成功则是偶然的. 那些醉心于科学难题的严肃的学者, 本已与世无争, 让他们再承受不断的考核、评比, 实在是一种罪过.

Louis de Banges

The Shaw Prize to Andrew Wiles

下一个难题是大家所热悉的

百年难题 1.2 (费马大定理)**.** 当 $n \geqslant 3$ 时, 方程 $x^n + y^n = z^n$ 无正整数解.

这是 1637 年提出来的, 直到 1995 年才由 Andrew Wiles 和 Richard Taylor 解决. 这么“简单”的问题，却经历了 358 年才解决. 请看看这期间的世界发生了什么：

- 1666 年，牛顿发明了微积分.
- 1684 年和 1686 年，莱布尼茨发明了微分和积分.
- 1769 年瓦特研制出了蒸汽机样机.
- 1776 年, 美国建国.
- 1831 年，法拉第试制出发电机.
- ······

应当说, 世界已经发生了翻天覆地的变化. 难怪 Fermat 大定理的获解会登上许多报刊的头版. 三百多年间, 有多少代数学家付出了他们毕生的心血, 作出无偿的奉献. 我们怎么能如此幸运地生长在这一年代，见证这一难题的破解?!

Princeton 大学的 Andrew Wiles 在自家阁楼上秘密地攻关 7 年后, 1994 年, 他在剑桥的牛顿数学研究所宣布证明了 Fermat 大定理. 之后不久, 审稿人发现他的证明有漏洞. 由此开始了他的地狱般的最后一年: 在世界数学家的瞩目之下，艰难地修补他证明中的漏洞. 那种在黑暗中苦苦摸索、见不到光线的折磨, 只有亲身经历过的人, 才能有所体会. 幸运的是，在他早期学生 Richard Taylor (Cambridge 大学)的协助下, 最终走出黑暗, 取得成功. 两篇论文发表在 Annals of Mathematics 141 (3), 1995.

自 2011 年起, Andrew Wiles 成为任职于牛津大学的英国皇家学会研究教授. 他曾获国际数学家联盟所授予的银奖 (1998) 和邵逸夫科学奖 (2005) 等多项奖励. 关于 Fermat 大定理的更多故事, 见 [4].

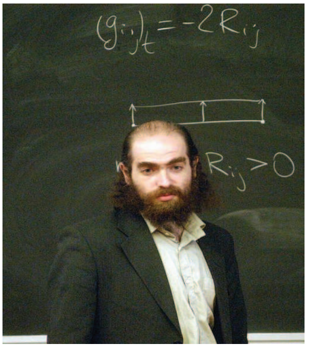
下一难题比上一个早 26 年提出, 晚 3 年获得破解. 讲的是如何堆积贷物以减少占位空间.

百年难题 1.3 (Kepler (球堆积)猜想)**.** (3 维)空间中球堆积的最佳密度是

$$\frac{\pi}{\sqrt{18}} \approx 0.74048.$$

1998 年, 匹兹堡(Pittsburgh)大学的 Thomas Hales 在他的学生 Samuel Ferguson 的协助下, 使用计算机辅助证明了Kepler 猜想. 这种证明是将原问题分解为数量很大的各种情况, 然后由计算机对每个可能的情况进行检验. 关于此专题(或本文所涉及的大部分专题)的许多故事和材料, 均可从网上找到, 如http://www.math.pitt.edu/ thales/kepler98/

Thomas Hales



Grigori Perelman

计算机辅助证明是数学史上的大事. 所证明的第 1 个大成果是四色定理(1890–1976), 这是 30 多年前由 Illinois 大学 (Urbana-Champaign) 的 Kenneth Appel 和 Wolfgang Haken 所解决.

下面是美国 Clay 数学研究所所悬赏(2000)的 7 大世纪难题之一，每个的奖金为一百万美元.

百年难题 1.4 (Poincaré 猜想). *每一个闭的单连通 3 维流形同胚于 3 维球面.*

拓扑学关心的是大局, 不在乎拉伸、压缩之类的连续形变. 例如椭球面, 压一压就变成球面了, 它们就被视为一体. “单连通”意指经连续收缩后会变成一点. 例如球面就是, 但轮胎面不是. 由此可理解此猜想的含义.

这个猜想是 1904 年提出的. 在 2002–2003 年间, 圣彼德堡(Saint Petersburg)的 Grigori Perelman 在著名的预印本中心 arXiv.org 上展示了 3 篇论文. 后来经过几个研究小组的核查, 确信其论证正确, 宣告了 Poincaré 猜想的破解. 此难题的破解恰好经历了一百年.

国际数学家大会曾授予 G. Perelman Fields 奖(2006), Clay 数学研究所授予他百万奖金(2010), 均被他谢绝. 所以在我们这个时代, 也还有一批把金钱和名利看得很淡的人. 在当今功利主义横行的世界里, 这种富有科学情操的学者, 更显得然能可贵.

关于 Poincaré 猜想, 已有几本英文科普读物, 例如新近的 [3].

回想二次曲线(曲面)的分类, 便不难理解下述难题的重要性. 可惜此题过于专门, 不知道如何给予通俗的解释.

百年难题 1.5 (有限单群的分类). *有限单群同构于下属群之一: 素数阶群, 交错群, Lie 型群, 或 26 种零散群.*

有限单群的分类始于 1892 年. 到了 1983 年, 人们一度认为此工作已完成. 后来发现有误, 又做了几年, 出版了两卷本补漏洞. 到了 2004 年, 普遍认为已最终完成了分类工作. 百年来, 代表性论文已发表 500 多篇, 涉及 100 多作者, 有 1 万至 1.5 万页. 因此提出了整理和简化已有成果的第 2 阶段任务. 在 1994–2005 年间, 已出版 6 卷(计划出版 12 卷), 约 5000 页. 可见工程之浩大. 难怪有人说: 搞有限单群的分类的人, 要么“蠢的要命”, 把简单的问题弄得这般复杂; 要么“聪明得出奇”, 能把这么复杂的事情搞清楚.

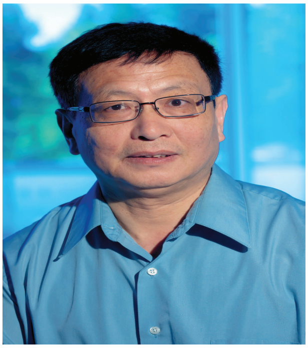
关于有限单群分类历史的全面考察, 见 [2].

百年难题 1.6 (孪生素数猜想[增补, 2013年8月]). *存在无穷多对孪生素数.*

这是 1849 年由 A. de Polignac 所提出的猜想. 所谓孪生数, 乃是两个素数之对子，它们相差 2, 例如

$$
\begin{array}{cccc}
(3,5) & (5,7) & (11,13) & (17,19) \\
(41,43) & (101,103) & (881,883) & \ldots\ldots
\end{array}
$$

把“相差 2”放宽为“相差 $\leqslant N$”, 就得出“弱孪生素数猜想”.



张益唐

陈景润

今年, 华人数学家张益唐 Yitang [Tom] Zhang (美国 New Hampshire 大学) 取得了突破性进展, 他证明了 $N \leqslant 7$ 千万. 然后开始了擂台赛: 目前的最好结果约为 $N \leqslant 5$ 千. 其中做出重要贡献的人物是华裔数学家陶哲轩 Terence Tao. 他因证明了“存在任意长的等差素数”荣获 2006 年的 Fields 奖. 应当指出, 陈景润对于孪生素数猜想曾作出过历史性贡献 (1973):

大偶数表为一个素数及一个不超过二个素数的乘积之和

陈 景 潤

（中国科学院数学研究所）

摘　　要

本文的目的在于用筛法证明了：每一充分大的偶数是一个素数及一个不超过两个素数乘积之和。

关于孪生素数问题亦得到类似的结果。

我们已经介绍了过去 30 年间 6 大难题的破解, 涉及到基础数学的诸多分支: 数论, 代数, 几何, 复分析及离散数学. 由此可见，30 年来，数学取得了全面的进步. 这些难题的破解, 很大程度上得益于高水平上的学科交融. 例如 Fermat 大定理，远超出初等数论的范畴，只是因为算术代数几何的成熟，才得以证明比 Fermat 大定理远为一般的猜想. 这让我们想起当年"5 次及 5 次以上方程不可解"难题的破解，就是因为发展出"群论"这一数学工具. 又如 Poincaré 猜想, 本身是一个拓扑猜想, 但它的破解却是非常分析的. 在攻克数学难题的进程中, 往往发展出新的数学理论, 推动了数学的发展并逐步应用到其它领域, 这是数学难题的主要价值. 现代数学的发展, 不仅有数学内部各分支间的交融, 还有与物理的交融. 记得 1980 年代，牛津的 Simon Kirwan Donaldson 应用 Yang-Mills 理论, 证明了光滑 4 维流形不同拓扑结构的存在性, 曾引起相当的震撼, 以至于在关于 4 维流形的第 1 本专著的扉页上写着: 数学家需要学习物理.

§2 研究领域的拓展

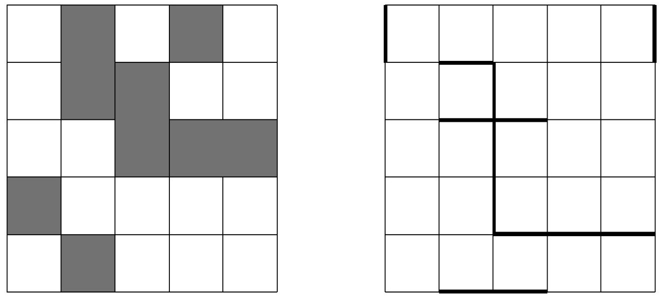
廿世纪的前半部分，数学家花费很大精力重新考查或构筑各分支学科的根基. 有很大的一股潮流叫做公理化运动. 例如 1933 年建立了现代概率论的公理系统. 还有几何学基础, 数理逻辑基础等等. 经历了这场运动的洗礼, 现代数学才有了非常牢靠的根基. 有时, 人们把这一时期叫做 Hilbert 时代.

数学与物理

大约从 1970 年代开始，数学重归自然, 也叫做进入 Poincaré 时代. 即与物理的重新交融. 例如与量子场论的交叉渗透, 产生出"弦论"、"超对称"和"非交换几何"等数学新分支. 又如作为概率论与统计物理的交叉，1970 年代出现了"随机场"和"交互作用粒子系统"、1982 年出现了"渗流理论" 这些概率论或数学物理的新的分支学科.

让我们讲点渗流理论. 它特别象数论, 问题很好懂、但却很难做. 还是从一个基本模型开始. 考虑 d 维的格子图. 假定每条边开的概率为 p (闭的概率为 $1-p$). 各边开或闭相互独立. 这就是*边渗流模型*(右下图). 如果一条路的依次相互连接的边都是开的, 则称为一个开串. 显然, 若 $p=1$, 则所有的边都是开的, 因而存在无限长的开串. 反之, 若 $p=0$, 则不存在开串. 这就引出*临界值* p_c 的定义:

$$p_c = \inf\{p \in (0,1) : \text{存在包含原点的无穷开串的概率大于零}\}.$$



点渗流　　　　边渗流

对于二维 ($d=2$) 情形, 已知 $p_c=\frac{1}{2}$. 但当 $d\geqslant 3$ 时, p_c 却是至今无人能够确定的. 若把边的开、闭换成格点的开、闭，则上述边模型就变成点渗流模型. 此时，仅当两顶点均开时，所联结的边才是开的(左上图: 管状通道构成开串). 对于二维三角形点渗流, 已知 p_c 也等于 $\frac{1}{2}$. 通常, 物理学家知道得更多. 例如, 他们不仅知道三角形点渗流的 $p_c=\frac{1}{2}$, 而且还知道下式

$$\text{当 } p\downarrow p_c \text{ 时，原点属于无穷开串的概率} = (p-p_c)^{\alpha}$$

中的临界指数 $\alpha=\frac{5}{36}+o(1)$. 这是一种统计物理所研究的普适常数. 然而, 长时期以来, 数学家对普适常数束手无策, 研究状况处于完全真空的状态. 直到 2001 年, 才由 S. Smirnov 取得突破 (解决了物理学家 J.L. Cardy (1992) 基于共形场论的猜想). 他于同年荣获 Clay 研究所的研究奖. 所使用的工具是布朗运动与共形映照. 这一点很象解析数论, 使用复分析 (连续) 来处理数论问题 (离散). 这方向上的研究已获 2 次 Fields 奖：Wendelin Werner (2006), Stanislav Smirnov (2010).

“随机场”和“交互作用粒子系统”是静态和动态的姐妹学科, 中心课题之一是研究相变现象. 这是无穷维数学, 已有的数学工具很少. 这促使我们重新考察有限维数学的可能用于无穷维的那些工具, 也促使我们去寻找和发展新的数学工具. 例如在研究这些数学所发展起来的耦合方法和概率距离(或 optimal transport)等, 已成功地应用于偏微分方程、几何分析和数学物理的多个领域. 又如相对于熟知的 Sobolev 不等式(依赖于维数), 有适用于无穷维的对数 Sobolev 不等式. 这早已是研究无穷维数学(“交互作用粒子系统”和“Winner 空间上的分析”)的基本工具之一, 但它被 Perelman 用于证明 Poincaré 猜想, 却是令人惊奇的.

数学与网络

网络无疑是现代科学技术的一项重大成就. 我们以搜索引擎为例, 说明网络需要数学. 先输入关键词, 搜索之后, 计算机上依次给出网页的排序. 那么, 排序的规则是什么? 答案如下. 将网页标记为 $\{i, j, k, \ldots\}$. 若 i 与 j 之间有链接，则命 $a_{ij} = 1$. 否则置 $a_{ij} = 0$. 我们得到 1 个非负方阵 $A = (a_{ij})$. 按照矩阵论的一个经典结果, 非负方阵(需连通性的小条件)有最大特征根 λ^*、它对应于 1 个左正特征向量 $u = \{u_1, \ldots, u_m\}$:

$$uA = \lambda^* u. \tag{1}$$

这个 u 即为所求: 取其第 i 个分量 u_i 为网页 i 的 PageRank. 我们所见到的网页就是依照 u_i 的大小排序的. 这就是 Larry Page 和 Sergey Brin 创建 Google 搜索引擎(1998)的数学依据.

人们常说, 网络改变了我们的生活. 其实, 网络也给数学带来许多挑战性课题(例如网络安全). 无疑地, 网络必将对我们的科学研究和教育带来深刻变革. 譬如说, 将部分问题留给读者从网上寻找答案, 这可称为一种网络辅助教育. 显而易见, 这里有很大的发展空间: 建立网络课堂、网络交流平台等.

数学与经济

数学对于经济的重要性也许已有共识, 固为大多数诺贝尔经济学奖的获得者都是数学家. 为加深理解, 我们还是看看一种简单模型.

由 (1) 式(它表示 u 是方阵算子 A/λ^* 的左不动点)得到,

$$uA^n = \lambda^{*n} u \quad \text{或等价地,} \quad uA^{-n} = \lambda^{*-n} u, \qquad n \geqslant 1. \tag{2}$$

与此紧密相关的是下述经济模型. 现在以 A 表生产效率方阵, 以

$$x_n = \left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(m)}\right)$$

表第 n 年产出各产品所构成的行向量, 则可将著名的投入产出法写成

$$x_n = x_0 A^{-n}, \qquad n \geqslant 0,$$

其中 x_0 是最初(第 0 年)的投入. 下述定理中的第 1 条给出了 (2) 式的经济学意义.

定理 2.1 (华罗庚, 1984–85)**.** 以 u 表非负矩阵 A (连通)的最大特征根 λ^* 所对应的左特征向量(必定 > 0).

(1) 如取 $x_0 = u$, 则 $x_n = x_0 \lambda^{*-n}$, $n \geqslant 1$. 此时有最快增长速度λ^{*-n}. 称此方法为**正特征向量法**.

(2) 如取 $0 < x_0 \neq u$, 则必定存在 n_0 和 j_0 使得 $x_{n_0}^{(j_0)} \leqslant 0$. 此时称**经济走向崩溃**.

华氏定理提供了 PageRank 的一种合理解释: 左正特征向量 u 是非负方阵 A 的唯一稳定态(不动点). 此定理的神奇之处是其第 2 部分. 问题是那里的 n_0 会不会很大, 比如 $n_0 = 10^4$ (年), 倘若如此, 我们就不必管它了. 请看

例 2.2 (华罗庚, 1984)**.** 考虑工、农业两种产品. 取

$$A = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 20 & 14 \\ 40 & 12 \end{pmatrix}.$$

则$u=(5(\sqrt{2400}+13)/7, 20)$. 其中 $(5(\sqrt{2400}+13)/7 \approx 44.34397483$. 相应于 u 的不同近似值, 有

x_0	T^{x_0}
(44, 20)	3
(44.344, 20)	8
(44.34397483, 20)	13

其中 T^{x_0} 是从 x_0 出发的首次崩溃时间 n_0.

对于这个简单摸型, 精确到小数点后 3 位是可行的，因为前 7 年不会崩溃, 而我们只制定 5 年计划. 其次, 让我们看看随机模型. 假定每个 a_{ij} 以 1/3 的小概率作 1% 的小摄动. 再假定诸 $a_{ij}^{(n)}$ $(i, j=1, 2, n \geqslant 1)$ 相互独立. 还是从 $x_0 = (44.344,\ 20)$ 出发, 那么

$$\mathbb{P}[T^{x_0} = n] = \begin{cases} 0, & 若\ n = 1, \\ 0.09, & 若\ n = 2, \\ 0.65, & 若\ n = 3. \end{cases}$$

这样, $\mathbb{P}[T \leqslant 3] \approx 0.74$. 也就是说, 这个经济模型在 3 年内崩溃的概率达到 0.74, 可见运行 2 年之后就必需调整(记得对于决定性情形, 崩溃时

$T^{x_0}=8$ 年). 事实上, 我们可以证明：在适当条件下, 对于一切 $x_0>0$, 都有

$$\mathbb{P}[T^{x_0}<\infty]=1,$$

即若不及时调整, 经济将以概率 1 走向崩溃.

我们已经看到经济的敏感性: 依据所具备的客观条件, 有它自身的合理的发展速度, 太快、太慢都不好. 如不考虑随机因素, 就会造成很大的失真. 随机数学的运用, 会使问题的解答比决定性的处理更精密而不是更粗糙. 经济最优化的数学模型是一个待开垦的数学研究领域, 有大量有趣并重要的待解决课题(例如崩溃时间的估计, 最优投入策略等等). 这个方向是如此迷人，以至于作为开篇写入 [1], 从中可找到更详细的内容和文献.

顺便指出，在研究随机模型时, 我们用到了随机矩阵理论. 这个理论在物理和统计中都是极为重要的. 我国许宝騄是这一理论的早期开拓者之一 (1939). 这一理论与泛函分析的交融, 产生了自由概率论 (1985) 的新的数学分支, 并被成功地应用于 von Neumann 代数的分类问题.

2010 年是华罗庚和许宝騄的百年诞辰.

华罗庚

许宝騄

虽然只是挂一漏万，我们依然可以感受到数学就在身旁，在我们的日常生活中. 一方面, 数学在自然科学和工程技术等诸多领域中有强有力的应用. 另一方面, 数学也与其它学科交融, 形成相当统一的整体, 并且伴随科学技术的进步不断地拓展自身的研究领域.

§3 政府民间的关注

数学和数学家能够得到社会的爱护和关注的主要原因是因为他们有较好形象. 众所周知, 人类生存的两大能力: 语言表达能力, 分析问题和

解决问题能力, 后者相当部分得益于数学训练. 数学的逻辑比钢铁还硬, 如果逻辑不对, 就很难过关. 因此数学家在工作和生活中常常有自己的专业特点.

数学中心

谈到社会对于数学的支持, 首先想到的是在前西德, 由大众汽车资助的 Oberwolfach 国际数学会议中心. 建在一个独立的小山上. 里面还有图书馆, 乒乓球台. 每周一个国际会议, 吃住全包, 不收会议费.

Center for Mathematical Sciences, Cambridge University

给我印象最深的当数剑桥数学中心(剑桥大学), 建于 1995 年. 中心共有 10 座建筑, 9 大 1 小. 照片中右上角是图书馆, 右下角是牛顿研究所, 它建得早一点.

2003 年, 当该校的"纯数学与统计系"系主任带我爬上其中一栋的楼顶, 眼望如此气派的数学中心时, 心灵深处受到了深深的震撼. 为什么在剑桥这个很小的地盘上, 在这个寸土如寸金的地方, 要建一个这么大的数学中心? 要知道, 经费的 80% 来自民间. 也不知道要到哪年哪月, 在我们国家才能有这么一个数学中心?

有谁能想到, 在 2 年之后的 2005 年, 就在北京大学成立了"北京国际数学研究中心". 这是国家级的数学中心, 有相当的规模. 应当说, 我们前进的步伐也够快了.

政府关注

上述国际数学中心以及国内为数不少的数学研究机构, 都是我国政府的财政拨款支持的. 这从一个侧面反映出我国政府对于基础研究的重视.

讲到其他国家政府的关注, 应当提到 2006 年 4 月 18 日, 美国总统的行政命令, 成立“国家数学委员会”. 这是第一个国家级的数学委员会. 委员会的职责是就如何最好地利用有关数学教学和学习的研究成果向总统和教育部长提供建议. 2006 年 5 月 15 日, 17 位数学家、认知学家和数学教育家被任命为国家数学委员会成员.

其次, 应当提到奥巴马 2011 年国情咨文. 其中两次提到数学: “中国和印度等国已意识到......他们开始对他们的孩子进行更早和更长时间的教育，更加重视数学和科学。” “在未来十年，我们将需要准备 10 万名科学、技术、工程和数学学科教师.”

民间资助

就我们所知, 至今最大的民间资助来自 Simons 基金会. 2010 年, 該基金会投入 4 千万美元用于数学等基础理论研究. 须知美国国家科学基金会 2009 年资助数学的强度是 2 亿 2 千万美元.

这位 Simons 是何许人也? 网上说: 詹姆斯 • 西蒙斯(James Simons)是世界上最伟大的对冲基金经理之一. 事实上, 他是一位很有成就的数学家. 他和陈省身发现了著名的“Chern-Simons不变量”.

2011 年是陈省身的百年寿辰. 华罗庚、许宝騄和陈省身堪称为我们的民族英雄. 他们几乎从平地而起, 经历了战争等我们无法想象的艰难困苦, 逐步奋斗成为顶天立地的第一批华裔数学家.

陈省身

James Simons

30 年来, 诸多数学世纪难题的破解为我们树立了不朽的丰碑; 研究领域的不断拓展形成了宏伟的阵势; 政府民间的关注产生出强大的推动力; 因此, 我们有充分的理由相信数学必定会有更加辉煌的明天. 有幸学数学、做数学或教数学的人, 都是值得庆幸、值得引为自豪的.

参考文献

[1] 陈木法和毛永华. *随机过程导论*, 高等教育出版社, 2007.

[2] 胡俊美. *有限单群分类历史研究*, 河北师范大学博士学位论文, 2007.

[3] Masha Gessen. *Perfect Rigour: A Genius and the Mathematical Breakthrough of the Century*, Icon Books Ltd, 2011

[4] 西蒙·辛格. *费马大定理—一个困惑了世间智者 358 年的谜*, 上海译文出版社, 2005.

致谢　本文最早是在福建省首届数学大会的报告(2010 年 10 月 16日; 与会者近千人, 约 70% 为中学数学教师). 之后依次在江苏大学, 南京大学, 南京师大, 安徽师大, 淮阴师院, 东南大学和我校报告过. 乘此机会, 感谢这些院校相关老师和领导的热情款待. 在讲了 8 次之后, 觉得可能对他人有所帮助, 因而整理成文. 应当指出, 限于个人的偏好和局限性, 本文的"三个侧面"的选题及选材都难免有些片面. 事实上, 若以本文的标题征文, 必定能征集到许多内容迥然不同的好作品.

作者感谢国家自然科学基金重点项目 (No. 11131003) 和教育部 973 项目的资助.

附注　文中的图片都是从网上找来的, 其中的 8 张人物照片, 也许不宜在刊物上正式发表, 因为我们不知道如何处理肖像权问题. 但作为通常的学术交流, 应当是允许的.

通讯地址: 北京师范大学数学学院
数学与复杂系统教育部重点实验室
北京　100875
电子邮箱: mfchen@bnu.edu.cn
主页: http://math.bnu.edu.cn/~chenmf