數學傳播　37卷1期, pp. 15-25

數學的進步

陳木法*

我們從三個側面來考察現代數學的進步: 1、百年難題的破解, 2、研究領域的拓展, 3、政府民間的關注。頭兩個方面來自數學內部, 第三方面是外部環境。我們不僅可以從數學發展的歷史中吸取力量, 還可以從中得到許多啓迪。

1. 百年難題的破解

關於難題的破解, 讓我們限於最近 30 年。第 1 個難題是 1984 年破解的 Bieberbach 猜想。此猜想是 Ludwig Bieberbach 於 1916 年提出的 (因而少於百年)。考慮這樣的一個全純函數 f, 它將開單位圓 1-1 映到複平面。先將 f 寫成冪級數: $f(z)=\sum_{n\ge 0} a_n z^n$。如必要, 作一下平移, 可設 $a_0=0$。由假設, 還可設 $a_1=1$。於是可假定 $f(z)=z+\sum_{n\ge 2} a_n z^n$。問題是關於係數 a_n, 我們能說些什麼? 例如易知 $\sum_{n\ge 2}|a_n|=\infty$。否則 f 在單位圓上有界。下面是深刻得多的難題。

百年難題 1.1(Bieberbach 猜想或 de Branges 定理). 第 n 項係數的模不超過 n: $|a_n|\le n$。

應當說, 這是 Bieberbach 非常大膽的猜想, 因爲他本人只證明了 $n=2$ 情形。在隨後的半個多世紀 裏, 也只證出 $n\le 6$ 時成立。美國 Purdue 大學的 de Branges 45 歲才開始進攻這一難題。做了 7 年, 完成了 355 頁的預印本。也許因爲文章太長, 最初在美國同行中交流並未得到足夠重視。幸運的是他得到美國與前蘇聯雙邊合作交流的機會。在那裏作了系列演講。經過細心的研討, 找到了大爲簡化的證明。最後發表的文章只有十幾頁。宣告了這一難題的破解。

很有意思的是, 在 de Branges 72 歲 (2004) 時, 他宣稱證明了黎曼猜想。可惜在他 78 歲 (2010) 時, 在他的個人網頁上刊出文章: “Apology for the proof of the Riemann hypothesis”。

無論如何, de Branges 研究數學的鍥而不捨的精神, 值得我們引以爲敬。攻克數學難題, 有無數人犧牲了畢生的精力卻空手而歸。這裏, 失敗是普遍的, 成功則是偶然的。那些醉心於科

*感謝陳木法教授同意本刊刊載他原刊登於《數學通報》2012 年第 9 期第 1-6 頁的文章。本文下方註解爲本刊所加, 非原稿所有, 希望方便讀者閱讀。

學難題的嚴肅的學者, 本已與世無爭, 讓他們再承受不斷的考核、評比, 實在是一種罪過。

Louis de Branges

The Shaw Prize to Andrew Wiles

下一個難題是大家所熟悉的

百年難題1.2(費馬大定理). 當 $n \geq 3$ 時, 方程 $x^n + y^n = z^n$ 無正整數解。

這是 1637 年提出來的, 直到 1995 年才由 Andrew Wiles 和 Richard Taylor 解決。這麼"簡單"的問題, 卻經歷了 358 年才解決。請看看這期間的世界發生了什麼:

- 1666 年, 牛頓發明了微積分。
- 1684 年和 1686 年, 萊布尼茨發明了微分和積分。
- 1769 年瓦特研製出了蒸汽機樣機。
- 1776 年, 美國建國。
- 1831 年, 法拉第試製出發電機。
- ⋯⋯

應當說, 世界已經發生了翻天覆地的變化。難怪 Fermat 大定理的獲解會登上許多報刊 的頭版。三百多年間, 有多少代數學家付出了他們畢生的心血, 作出無償的奉獻。我們怎麼能如此幸運地生長在這一年代, 見證這一難題的破解?!

Princeton 大學的 Andrew Wiles 在自家閣樓上秘密地攻關 7 年後, 1994 年, 他在劍橋的牛頓數學研究所 宣布證明了 Fermat 大定理。之後不久, 審稿人發現他的證明有漏洞。由此開始了他的地獄般的最後一年: 在世界數學家的矚目之下, 艱難地修補他證明中的漏洞。那種在黑暗中苦苦摸索、見不到光線的折磨, 只有親身經歷過的人, 才能有所體會。幸運的是, 在他早期學生 Richard Taylor (Cambridge 大學) 的協助下, 最終走出黑暗, 取得成功。兩篇論文發表在 Annals of Mathematics 141 (3), 1995。

自 2011 年起, Andrew Wiles 成為任職於牛津大學的英國皇家學會研究教授。他曾獲國際數學家聯盟所授予的銀獎 (1998) 和邵逸夫科學獎 (2005) 等多項獎勵。關於 Fermat 大定理的更多故事, 見 [4]。

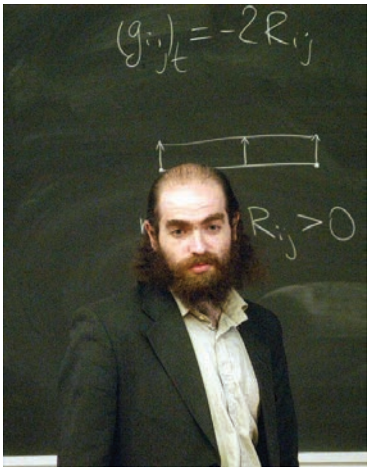
下一難題比上一個早 26 年提出, 晚 3 年獲得破解。講的是如何堆積貨物以減少佔位空間。

百年難題1.3 (Kepler (球堆積) 猜想). (3 維) 空間中球堆積的最佳密度是 $\frac{\pi}{\sqrt{18}} \approx 0.74048$。

1998 年, 匹茲堡 (Pittsburgh) 大學的 Thomas Hales 在他的學生 Samuel Ferguson 的協助下, 使用計算機輔助證明了 Kepler 猜想。這種證明是將原問題 分解為數量很大的各種情況, 然後由計算機對每個可能的情況進行檢驗。關於此專題 (或本文所涉及的大部分專題) 的許多故事和材料, 均可從網上找到, 如

http://www.math.pitt.edu/~thales/kepler98/

Thomas Hales



Grigori Perelman

計算機輔助證明是數學史上的大事。所證明的第 1 個大成果是四色定理 (1890–1976), 這是 30 多年前由 Illinois 大學 (Urbana-Champaign) 的 Kenneth Appel 和 Wolfgang

Haken 所解決。

下面是美國 Clay 數學研究所所懸賞 (2000) 的 7 大世紀難題之一, 每個的獎金為一百萬美元。

百年難題1.4 (Poincaré 猜想). 每一個閉的單連通 3 維流形同胚於 3 維球面。

拓撲學關心的是大局, 不在乎拉伸、壓縮之類的連續形變。例如橢球面, 壓一壓就變成球面了, 它們就被視為一體。“單連通”意指經連續收縮後會變成一點。例如球面就是, 但輪胎面不是。由此可理解此猜想的含義。

這個猜想是 1904 年提出的。在 2002–2003 年間, 聖彼德堡 (Saint Petersburg) 的 Grigori Perelman 在著名的預印本中心 arXiv.org 上展示了 3 篇論文。後來經過幾個研究小組的核查, 確信其論證正確, 宣告了 Poincaré 猜想的破解。此難題的破解恰好經歷了一百年。

國際數學家大會曾授予 G. Perelman Fields 獎 (2006), Clay 數學研究所授予他百萬獎金 (2010), 均被他婉拒。所以在我們這個時代, 也還有一批把金錢和名利看得很淡的人。在當今功利主義橫行的世界裏, 這種富有科學情操的學者, 更顯得難能可貴。

關於 Poincaré 猜想, 已有幾本英文科普讀物, 例如新近的 [3]。

回想二次曲線(曲面) 的分類, 便不難理解下述難題的重要性。可惜此題過於專門, 不知道如何給予通俗的解釋。

百年難題1.5 (有限單群的分類). 有限單群同構於下屬群之一: 素數階群, 交錯群, Lie 型群, 或 26 種零散群。

有限單群的分類始於 1892 年。到了 1983 年, 人們一度認為此工作已完成。後來發現有誤, 又做了幾年, 出版了兩卷本補漏洞。到了 2004 年, 普遍認為已最終完成了分類工作。百年來, 代表性論文已發表 500 多篇, 涉及 100 多作者, 有 1 萬至 1.5 萬頁。因此提出了整理和簡化已有成果的第 2 階段任務。在 1994∼2005 年間, 已出版 6 卷 (計劃出版 12 卷), 約 5000 頁。可見工程之浩大。難怪有人說: 搞有限單群的分類的人, 要麼“蠢的要命”, 把簡單的問題弄得這般複雜; 要麼“聰明得出奇”, 能把這麼複雜的事情搞清楚。

關於有限單群分類歷史的全面考察, 見 [2][1]。

我們已經介紹了過去 30 年間 5 大難題的破解, 涉及到基礎數學的諸多分支: 數論, 代數, 幾何, 複分析及離散數學。由此可見, 30 年來, 數學取得了全面的進步。這些難題的破解, 很大程度上得益於高水平上的學科交融。例如 Fermat 大定理, 遠超出初等數論的範疇, 只是因為算術代數幾何的成熟, 才得以證明比 Fermat 大定理遠為一般的猜想。這讓我們想起當年“5 次及 5 次以上方程不可解”難題的破解, 就是因為發展出 “群論”這一數學工具。又如 Poincaré 猜

[1]亦可參見數學傳播, 第 35 卷 4 期,「有朋自遠方來 — 專訪 Robert Griess」與「林正洪教授演講 — 怪物與月光(Monster and Moonshine) — 淺談 1998 年 Fields Medal 得主 Richard Borcherds 的數學工作」二文。

想, 本身是一個拓撲猜想, 但它的破解卻是非常分析的。在攻克數學難題的進程中, 往往發展出新的數學理論, 推動了數學的發展並逐步應用到其它領域, 這是數學難題的主要價值。現代數學的發展, 不僅有數學內部各分支間的交融, 還有與物理的交融。記得 1980 年代, 牛津的 Simon Kirwan Donaldson 應用 Yang-Mills 理論, 證明了光滑 4 維流形不同拓撲結構的存在性, 曾引起相當的震撼, 以至於在關於 4 維流形的第 1 本專著的扉頁上寫著: 數學家需要學習物理。

2. 研究領域的拓展

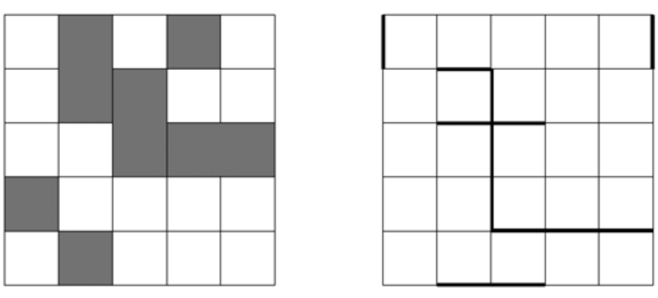
廿世紀的前半部分, 數學家花費很大精力重新考查或構築各分支學科的根基。有很大的一股潮流叫做公理化運動。例如 1933 年建立了現代概率論的公理系統。還有幾何學基礎, 數理邏輯基礎等等。經歷了這場運動的洗禮, 現代數學才有了非常牢靠的根基。有時, 人們把這一時期叫做 Hilbert 時代。

數學與物理

大約從 1970 年代開始, 數學重歸自然, 也叫做進入 Poincaré 時代。即與物理的重新交融。例如與量子場論的交叉滲透, 產生出"弦論"、"超對稱"和"非交換幾何"等數學新分支。又如作爲概率論與統計物理的交叉, 1970 年代出現了 "隨機場"和"交互作用粒子系統"、1982 年出現了"滲流理論" 這些概率論或數學物理的新的分支學科。

讓我們講點滲流理論。它特別像數論, 問題很好懂、但卻很難做。還是從一個基本模型開始。考慮 d 維的格子圖。假定每條邊開的概率爲 p (閉的概率爲 $1-p$)。各邊開或閉相互獨立。這就是*邊滲流模型* (右下圖)。如果一條路的依次相互連接的邊都是開的, 則稱爲一個開串。顯然, 若 $p=1$, 則所有的邊都是開的, 因而存在無限長的開串。反之, 若 $p=0$, 則不存在開串。這就引出*臨界值* p_c 的定義:

$$p_c = \inf\{p \in (0,1): \text{存在包含原點的無窮開串的概率大於零}\}。$$



點滲流　　　　邊滲流

對於二維 $(d=2)$ 情形, 已知 $p_c=\frac{1}{2}$。但當 $d \geq 3$ 時, p_c 卻是至今無人能夠確定的。若把

邊的開、閉換成格點的開、閉, 則上述邊模型就變成點滲流模型。此時, 僅當兩頂點均開時, 所聯結的邊才是開的 (左上圖: 管狀通道構成開串)。對於二維三角形點滲流, 已知 p_c 也等於 $\frac{1}{2}$。通常, 物理學家知道得更多。例如, 他們不僅知道三角形點滲流的 $p_c=\frac{1}{2}$, 而且還知道下式

$$\text{當}\quad p\downarrow p_c\ \text{時,}\quad \text{原點屬於無窮開串的概率} = (p-p_c)^{\alpha}$$

中的臨界指數 $\alpha=\frac{5}{36}+o(1)$。這是一種統計物理所研究的普適常數。然而, 長時期以來, 數學家對普適常數束手無策, 研究狀況處於完全眞空的狀態。直到 2001 年, 才由 S. Smirnov 取得突破 (解決了物理學家 J. L. Cardy (1992) 基於共形場論的猜想)。他於同年榮獲 Clay 研究所的研究獎。所使用的工具是布朗運動與共形映照。這一點很像解析數論, 使用複分析 (連續) 來處理數論問題 (離散)。這方向上的研究已獲 2 次 Fields 獎: Wendelin Werner (2006), Stanislav Smirnov (2010)。

“隨機場”和“交互作用粒子系統”是靜態和動態的姐妹學科, 中心課題之一是研究相變現象。這是無窮維數學, 已有的數學工具很少。這促使我們重新考察有限維數學的可能用於無窮維的那些工具, 也促使我們去尋找和發展新的數學工具。例如在研究這些數學所發展起來的耦合方法和概率距離 (或 optimal transport) 等, 已成功地應用於偏微分方程、幾何分析和數學物理的多個領域。又如相對於熟知的 Sobolev 不等式 (依賴於維數), 有適用於無窮維的對數 Sobolev 不等式。這早已是研究無窮維數學 (“交互作用粒子系統”和 “Wiener 空間上的分析”) 的基本工具之一, 但它被 Perelman 用於證明 Poincaré 猜想, 卻是令人驚奇的。

數學與網絡

網絡無疑是現代科學技術的一項重大成就。我們以搜索引擎爲例, 說明網絡需要數學。先輸入關鍵詞, 搜索之後, 計算機上依次給出網頁的排序。那麼, 排序的規則是什麼? 答案如下。將網頁標記爲 $\{i,j,k,\ldots\}$。若 i 與 j 之間有鏈接, 則命 $a_{ij}=1$。否則置 $a_{ij}=0$。我們得到 1 個非負方陣 $A=(a_{ij})$。按照矩陣論的一個經典結果, 非負方陣 (需連通性的小條件) 有最大特徵根 λ^*、它對應於 1 個左正特徵向量 $u=\{u_1,\ldots,u_m\}$:

$$uA=\lambda^* u. \tag{1}$$

這個 u 即爲所求: 取其第 i 個分量 u_i 爲網頁 i 的 PageRank。我們所見到的網頁就是依照 u_i 的大小排序的。這就是 Larry Page 和 Sergey Brin 創建 Google 搜索引擎 (1998) 的數學依據[2]。

人們常說, 網絡改變了我們的生活。其實, 網絡也給數學帶來許多挑戰性課題 (例如網絡安全)。無疑地, 網絡必將對我們的科學研究和教育帶來深刻變革。譬如說, 將部分問題留給讀者從網上尋找答案, 這可稱爲一種網絡輔助教育。顯而易見, 這裏有很大的發展空間: 建立網絡課堂、網絡交流平臺等。

[2]亦可參見數學傳播, 第 36 卷 3期,「How Google Works — 搜尋引擎中的線性代數」一文。

數學與經濟

數學對於經濟的重要性也許已有共識, 因爲大多數諾貝爾經濟學獎的獲得者都是數學家。爲加深理解, 我們還是看看一種簡單模型。

由 (1) 式 (它表示 u 是方陣算子 A/λ^* 的左不動點) 得到,

$$uA^n = \lambda^{*n} u \quad \text{或等價地,} \quad uA^{-n} = \lambda^{*-n} u, \qquad n \geq 1. \tag{2}$$

與此緊密相關的是下述經濟模型。現在以 A 表生產效率方陣, 以

$$x_n = \left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(m)}\right)$$

表第 n 年產出各產品所構成的行向量, 則可將著名的投入產出法寫成

$$x_n = x_0 A^{-n}, \qquad n \geq 0,$$

其中 x_0 是最初 (第 0 年) 的投入。下述定理中的第 1 條給出了 (2) 式的經濟學意義。

定理 2.1 (華羅庚, 1984∼1985). 以 u 表非負矩陣 A (連通) 的最大特徵根 λ^* 所對應的左特徵向量(必定 > 0)。

(1) 如取 $x_0 = u$, 則 $x_n = x_0 \lambda^{*\,-n}$, $n \geq 1$。此時有最快增長速度 $\lambda^{*\,-n}$。稱此方法爲正特徵向量法。
(2) 如取 $0 < x_0 \neq u$, 則必定存在 n_0 和 j_0 使得 $x_{n_0}^{(j_0)} \leq 0$。此時稱經濟走向崩潰。

華氏定理提供了 PageRank 的一種合理解釋: 左正特徵向量 u 是非負方陣 A 的唯一穩定態 (不動點)。此定理的神奇之處是其第 2 部分。問題是那裏的 n_0 會不會很大, 比如 $n_0 = 10^4$ (年), 倘若如此, 我們就不必管它了。請看

例 2.2 (華羅庚, 1984) 考慮工、農業兩種產品。取

$$A = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 20 & 14 \\ 40 & 12 \end{pmatrix}.$$

則 $u = (5(\sqrt{2400} + 13)/7, 20)$。其中 $(5(\sqrt{2400} + 13)/7 \approx 44.34397483$。相應於 u 的不同近似值, 有

x_0	T^{x_0}
$(44,\ 20)$	3
$(44\Delta\ 344,\ 20)$	8
$(44\Delta\ 34397483,\ 20)$	13

其中 T^{x_0} 是從 x_0 出發的首次崩潰時間 n_0。

對於這個簡單模型, 精確到小數點後 3 位是可行的, 因爲前 7 年不會崩潰, 而我們只制定 5 年計劃。其次, 讓我們看看隨機模型。假定每個 a_{ij} 以 $1/3$ 的小概率作 1% 的小擾動。再假定諸 $a_{ij}^{(n)}\ (i,j=1,2,\ n\geq 1)$ 相互獨立。還是從 $x_0=(44\Delta\ 344,\ 20)$ 出發, 那麼

$$\mathbb{P}[T^{x_0}=n]=\begin{cases}0, & \text{若 } n=1,\\ 0.09, & \text{若 } n=2,\\ 0.65, & \text{若 } n=3.\end{cases}$$

這樣, $\mathbb{P}[T\leq 3]\approx 0.74$。也就是說, 這個經濟模型在 3 年內崩潰的概率達到 0.74, 可見運行 2 年之後就必需調整 (記得對於決定性情形, 崩潰時 $T^{x_0}=8$ 年)。事實上, 我們可以證明: 在適當條件下, 對於一切 $x_0>0$, 都有

$$\mathbb{P}[T^{x_0}<\infty]=1,$$

即若不及時調整, 經濟將以概率 1 走向崩潰。

我們已經看到經濟的敏感性: 依據所具備的客觀條件, 有它自身的合理的發展速度, 太快、太慢都不好。如不考慮隨機因素, 就會造成很大的失眞。隨機數學的運用, 會使問題的解答比決定性的處理更精密而不是更粗糙。經濟最優化的數學模型是一個待開墾的數學研究領域, 有大量有趣並重要的待解決課題 (例如崩潰時間的估計, 最優投入策略等等)。這個方向是如此迷人, 以至於作爲開篇寫入 [1], 從中可找到更詳細的內容和文獻。

順便指出, 在研究隨機模型時, 我們用到了隨機矩陣理論。這個理論在物理和統計中都是極爲重要的。我國許寶騄是這一理論的早期開拓者之一 (1939)。這一理論與泛函分析的交融, 產生了自由概率論 (1985) 的新的數學分支, 並被成功地應用於 von Neumann 代數的分類問題。

2010 年是華羅庚和許寶騄的百年誕辰。

華羅庚

許寶騄

雖然只是掛一漏萬, 我們依然可以感受到數學就在身旁, 在我們的日常生活中。一方面, 數學在自然科學和工程技術等諸多領域中有強有力的應用。另一方面, 數學也與其它學科交融, 形成相當統一的整體, 並且伴隨科學技術的進步不斷地拓展自身的研究領域。

3. 政府民間的關注

數學和數學家能夠得到社會的愛護和關注的主要原因是因爲他們有較好形象。衆所周知, 人類生存的兩大能力: 語言表達能力, 分析問題和解決問題能力, 後者相當部分得益於數學訓練。數學的邏輯比鋼鐵還硬, 如果邏輯不對, 就很難過關。因此數學家在工作和生活中常常有自己的專業特點。

數學中心

談到社會對於數學的支持, 首先想到的是在前西德, 由大衆汽車資助的 Oberwolfach 國際數學會議中心。建在一個獨立的小山上。裏面還有圖書館, 乒乓球臺。每周一個國際會議, 吃住全包, 不收會議費。

Center for Mathematical Sciences, Cambridge University

給我印象最深的當數劍橋數學中心(劍橋大學), 建於 1995 年。中心共有 10 座建築, 9 大 1 小。照片中右上角是圖書館, 右下角是牛頓研究所, 它建得早一點。

2003 年, 當該校的“純數學與統計系”系主任帶我爬上其中一棟的 樓頂, 眼望如此氣派的數學中心時, 心靈深處受到了深深的震撼。爲什麼在劍橋這個很小的地盤上, 在這個寸土如寸金的地方, 要建一個這麼大的數學中心? 要知道, 經費的 80% 來自民間。也不知道要到哪年哪月, 在我自己國家才能有這麼一個數學中心?

有誰能想到, 在 2 年之後的 2005 年, 就在北京大學成立了“北京國際數學研究中心”。這是國家級的數學中心, 有相當的規模。應當說, 我們前進的步伐也夠快了。

政府關注

上述國際數學中心以及我國為數不少的數學研究機構, 都是政府的財政撥款支持的。這從一個側面反映出政府對於基礎研究的重視。

講到其他國家政府的關注, 應當提到 2006 年 4 月 18 日, 美國總統的行政命令, 成立“國家數學委員會”。這是第一個國家級的數學委員會。委員會的職責是就如何最好地利用有關數學教學和學習的研究成果向總統和教育部長提供建議。2006 年 5 月 15 日, 17 位數學家、認知學家和數學教育家被任命為國家數學委員會成員。

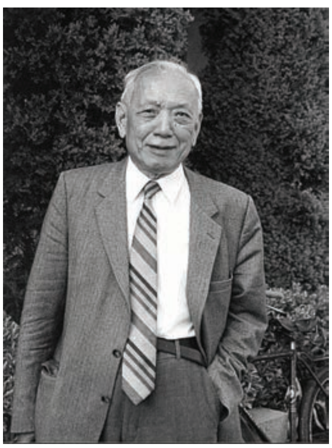
其次, 應當提到奧巴馬 2011 年國情咨文。其中兩次提到數學: “中國和印度等國已意識到...... 他們開始對他們的孩子進行更早和更長時間的教育, 更加重視數學和科學。” “在未來十年, 我們將需要準備 10 萬名科學技術工程和數學學科教師。”

民間資助

就我們所知, 至今最大的民間資助來自 Simons 基金會。2010 年, 該基金會投入 4 千萬美元用於數學等基礎理論研究。須知美國國家科學基金會 2009 年資助數學的強度是 2 億 2 千萬美元。

這位 Simons 是何許人也? 網上說: 詹姆斯 · 西蒙斯 (James Simons) 是世界上最偉大的對沖基金經理之一。事實上, 他是一位很有成就的數學家。他和陳省身發現了著名的“Chern-Simons 不變量”。

2011 年是陳省身的百年壽辰。華羅庚、許寶騄和陳省身堪稱為我們的民族英雄。他們幾乎從平地而起, 經歷了戰爭等我們無法想像的艱難困苦, 逐步奮鬥成為頂天立地的第一批華裔數學家。



陳省身

James Simons

30 年來, 諸多數學世紀難題的破解為我們樹立了不朽的豐碑; 研究領域的不斷拓展形成了

宏偉的陣勢; 政府民間的關注產生出強大的推動力; 因此, 我們有充分的理由相信數學必定會有更加輝煌的明天。有幸學數學、做數學或教數學的人, 都是值得慶幸、值得引爲自豪的。

致謝: 本文最早是在福建省首屆數學大會的報告 (2010 年 10 月 16日; 與會者近千人, 約 70% 爲中學數學教師)。之後依次在江蘇大學, 南京大學, 南京師大, 安徽師大, 淮陰師院, 東南大學和我校報告過。乘此機會, 感謝這些院校相關老師和領導的熱情款待。在講了 8 次 之後, 覺得可能對他人有所幫助, 因而整理成文。2012 年 10 月 3 日, 又在台灣輔仁大學講了 1 次。也乘此機會, 感謝該院校數學系老師和領導的盛情款待。應當指出, 限於個人的偏好和局限性, 本文的“三個側面”的選題及選材都難免有些片面。事實上, 若以本文的標題徵文, 必定能徵集到許多內容迥然不同的好作品。

作者感謝中國國家自然科學基金重點項目 (No. 11131003) 和教育部 973 項目的資助。

参考資料

1. 陳木法和毛永華。隨機過程導論, 高等教育出版社, 2007。
2. 胡俊美。有限單群分類歷史研究, 河北師範大學博士學位論文, 2007。
3. Masha Gessen。*Perfect Rigour: A Genius and the Mathematical Breakthrough of the Century*, Icon Books Ltd, 2011.
4. 西蒙·辛格。費馬大定理—一個困惑了世間智者 358 年的謎, 上海譯文出版社, 2005。

—本文作者任教於北京師範大學數學科學學院—