回忆连家瑶老师的教导

陈木法 (北京师范大学)

2006 年 4 月 10 日

这里, 回忆连家瑶老师的两次教导: 一是关于如何做人, 二是关于学习方法, 以表达对连老师的怀念和感激之情. 乘此也向母校惠安一中九十周年校庆表示衷心的祝福.

一 要追求有价值的人生目标

连老师在一次给我们的报告中, 教育我们要树立远大的理想, 要追求有价值的人生目标, 并忠告我们"不要成为饭、便的连通管". 这种既通俗又专业的语言表达是连老师所特有的, 在这之前就有许多同学告诉我, 连老师授课非常风趣幽默、深入浅出, 真是名不虚传, 给我留下极其深刻的印象也受益匪浅. 后来我在教育自己的学生时, 也多次引用这句话. 只可惜当年没有福气听他的课, 因他教甲班而我在乙班.

二 要多想

大约在1963—1964年间, 有一天, 我鼓足勇气去向他当面请教学习方法. 当年, 他家就在操场边的非常简陋的平房里, 我们经常能见到他, 找他也很容易. 虽然连老师并不认识我, 但当我说明来意之后, 他随即说"要多想". 然后举例说: 平面三角学中的半角公式不容易记住, 但可以自己想法子把它推导出来(推导见后), 要知道连老师当年只教物理, 由此也展示出连老师的数学功力. 这不仅是教我如何把知识学活, 而且也让我学会如何发现定理、如何作研究的方法. 时间虽然只有一、二十分钟, 但却给我留下了终生难忘的教诲.

三 附: 半角公式的推导

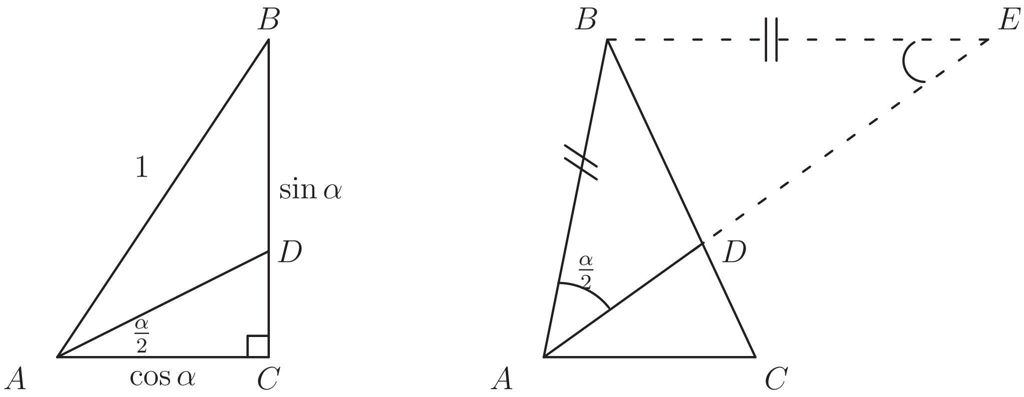

图 1: 半角定理 图 2: 角平分线定理

因为年代久远, 对连老师的方法只留下非常模糊的印象, 以下的推导未必是原貌.

如图 1 所示，作直角三角形ABC, $\angle C = 90°$, $\angle A$ 的平分线交 BC 于 D. 简记 $\angle A = \alpha$. 取 $AB = 1$ 使得 AC 和 BC 有简单的余弦、正弦表达式: $AC = \cos\alpha$, $BC = \sin\alpha$.

问题的关键是求出 DC 的长度. 为此, 使用角平分线定理 $AB : AC = BD : DC$ (其证明留在末尾). 因为 $AC = \cos\alpha$, $BC = \sin\alpha$, 由角平分线定理得到

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha - DC}{DC}.$$

由此解出

$$DC = \frac{\sin\alpha\,\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

然后由勾股定理,

$$\begin{aligned} AD^2 &= \cos^2\alpha + \frac{\sin^2\alpha\,\cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2} = \frac{\cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}\big((1+\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha\big) \\ &= \frac{\cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}(2+2\cos\alpha) = \frac{2\cos^2\alpha}{1+\cos\alpha}. \end{aligned}$$

于是

$$AD = \sqrt{\frac{2}{1+\cos\alpha}}\,\cos\alpha.$$

这就得出余弦的半角公式

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{AC}{AD} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

同时得到

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{DC}{AD} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\cos^2\alpha}{2(1+\cos\alpha)}} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

对于一般情形, 因为 α 不必是锐角, 故有符号问题, 答案是

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},\qquad \sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\qquad \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

这是当年高一教的.

最后讨论**角平分线定理**: 如图 2 所示，设 $\angle A$ 的角平分线与 BC 交于 D, 则

$$AB:AC=BD:DC.$$

这是当年初二学的. 其证明十分简单. 证明边的比例关系的要点是构作相似三角形. 延长 AD 与过 B 点、平行于 AC 的平行线交于 E. 因为两平行线间的内错角相等, $\triangle ABE$ 为等腰三角形而且$\triangle ADC$ 相似于 $\triangle EDB$. 由于相似三角形的对应边成比例, 得出所述定理.

从以上推导可以看出, 无需多少基础, 我们就可以去“发现”平面三角学的一组基本公式—半角公式. 其实我们也同时“发现”了倍角公式：

$$\begin{aligned}
\cos 2\alpha &= 2\cos^2\alpha-1=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,\\
\sin 2\alpha &= \sqrt{1-\cos^2 2\alpha}=\sqrt{(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)^2-(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)^2}\\
&= \sqrt{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=2\sin\alpha\cos\alpha,\\
\mathrm{tg}\,2\alpha &= \frac{2\,\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}.
\end{aligned}$$

研究者的最大幸福就在于有自己的新发现, 而要实现这个目标, 连老师的“多想”乃是一种必备的训练.

载于《杰出师表连家瑶》，中国文化出版社，2006，第49–52页