关于有限维数猜想的一些新进展

惠昌常

北京师范大学数学科学学院

E-mail: xicc@bnu.edu.cn

§1　有限维数猜想及其相关猜想

有限维数猜想 (finitistic dimension conjecture) 是代数表示论和同调代数中的一个著名猜想，已有 45 年的历史，至今悬而未解。在上个世纪的 40 和 50 年代，同调代数开始被广泛应用于数学和物理的许多分支。在数学中，一个著名的结论是 Auslander-Buchbaum-Serre 定理。这个定理说，一个代数簇是光滑的充分和必要条件是它的坐标环的整体维数是有限的。这样，一个几何上的光滑性就完全用代数的同调性质刻画了。另一方面，许多的代数簇所对应的坐标环或代数的整体维数可能是无限的，这时，如何得到进一步的信息呢？为此，人们取代整体维数，引入了有限维数的概念，它在一定程度上，可以更好的反映环或代数的一些同调复杂性。

§1.1　什么是有限维数猜想？

假设 A 是域上的一个有限维代数，我们考察代数 A 的有限生成左模范畴 A-mod 。用 pd(M) 表示模 M 的投射维数。记 $\mathcal{P}^{\infty}(A)$ 为所有投射维数有限的模做成的范畴。代数 A 的有限维数，记作 $\mathrm{fin.dim}(A)$, 定义如下：

$$\mathrm{fin.dim}(A) = \sup\{\mathrm{pd}(M) \mid M \in A\text{-mod} \ \text{ and } \ \mathrm{pd}(_AM) < \infty\}.$$

特别的，当整体维数有限时，有限维数与整体维数相等。

有限维数猜想：对域上任何有限维代数 A ，都有 $\mathrm{fin.dim}(A) < \infty$.

这是 1960 年 H.Bass 在他的一篇发表于 Trans.Amer. Math. Soc. 的文章中正式提出的，他说这是 Rosenberg 和 Zelinsky 提出的一个问题。后来，这个问题才成为一个猜想。这个猜想在一些文献上也叫做有限维数第二猜想。

这个猜想表述简洁，没有任何的前提条件的假设。只要学过一点近世代数的知识，即可明白它说的是什么。

§1.2　为什么要研究有限维数猜想？

在表示论中，有限维数猜想不只是一个孤立的猜想，它还和其他的著名猜想密切相关。著名代数表示论专家 M.Auslander 、 I.Reiten 和 S.O.Smalo 在《 Representation theory of Artin algebras 》 (剑桥大学出版社，1995 年) 一书中提出了 13 个代数表示论中未解决的猜想, 其中就有有限维数猜想。这些猜想可以说是代数表示论中的一些中心问题。在这 13 个猜想中，后面的 6 个猜想都涉及有限维数猜想。由此也可看出，这个猜想处于一个很重要的地位。对有限维数猜想的研究有助于对这些猜想的进一步了解和认识。这里我们介绍其中的一些猜想。

Nakayama 猜想：假定 A 是一个 Artin 代数，如果 A 的内射分解中的各项内射模都是投射的，那么 A 本身是内射的。

这个猜想是 1958 年由 T.Nakayam 提出的。 17 年后，也就是 1975 年， M.Auslander 和 I.Reiten 在研究这个猜想时作出了如下的猜测：

一般 Nakayama 猜想：假定 A 是一个 Artin 代数，则任何一个不可分解内射模（作为直和项）一定出现在 A 的内射分解中的某一项。

又过了 15 年，即 1990 年， R.R.Colby 和 K.R.Fuller 对上述猜想进行研究时，提出了如下的强 Nakayama 猜想。

强 Nakayama 猜想：对 Artin 代数 A 上的任意非零模 M, 总存在一个非负整数 n, 使得 n 阶上同调 $\mathrm{Ext}_A^n(M,A)\neq 0.$

Gorenstein 对称猜想：对任意 Artin 代数 A ，左正则模内射维数有限意味着右正则模内射维数有限。

上述的这些猜想至今都没有完全解决。但它们与有限维数猜想之间的关系可以通过下面已证明了的事实看出来。

命题：（ 1 ）若有限维数猜想成立，则强 Nakayama 猜想成立；
（ 2 ）若强 Nakayama 猜想成立，则一般 Nakayama 猜想成立；
（ 3 ）一般 Nakayama 猜想成立；则 Nakayama 猜想成立；
（ 4 ）若有限维数猜想成立，则 Gorenstein 对称猜想成立。

由此可见, 代数的有限维数在某种程度上, 更能反映表示范畴的同调复杂程度, 特别是, 当代数的整体维数是无限的时候。这个命题也说明，对有限维数猜想的研究是一个很有意义的课题。

§2 历史上的一些进展

关于有限维数猜想及相关问题，历史上有不少的代数学者，包括一些著名人物，都进行过研究。下面我们做一些 (不是全部）概括地介绍。

1965 年， H.Mochizuki 证明了如果一个代数的 Jacobson 根的平方为零，则这个代数的有限维数是有限的。在之后的 26 年里，人们从不同的角度对有限维数猜想做了探讨。到了 1991 年，出现了不少重要的进展。其中， E.L.Green 和 B.Zimmermann-Huisgen 在 1991 年推广了 Mochizuki 的结果，证明了一个代数的 Jacobson 根的立方为零，则这个代数的有限维数是有限的。同年， E.L.Green 、 E. Kirkman 和 J.Kuzmanovich 证明了有限维数猜想对单项式代数（ monomial) 成立。这里一个代数称为单项式的，是指这个代数可用简袋 (quiver) 的路代数模掉由一些路生成的理想来表示。 1991 年， M.Auslander 和 I.Reiten 给出了有限维数猜想成立的一个充分条件；即如果子范畴 $\mathcal{P}^\infty(A)$ 具有反变有限性，则该代数的有限维数有限。粗略地讲，一个子范畴是反变有限的，是指关于这个子范畴的覆盖存在。反变有限这个概念是投射覆盖概念的推广。要注意的是， K.Igusa 、 S.O.Smalo 和 G.Todorov 给出了例子说明，不是所有代数的 $\mathcal{P}^\infty(A)$ 都是反变有限的。 1994 年， Y.Wang 利用 K.Igusa 和 G.Todorov 的一个结论，将 Green-Zimermann-Huisgen 的结果做了进一步的推广，得到了如下结论：假设代数的 Jacobson 根的 $2m+1$ 次方为零，且模掉根的 m 次方是表示有限型的，那么这个代数的有限维数是有限的。这里我们称一个代数是表示有限型的如果它只有有限多个不可分解表示的同

构类。1996 年，F.H.Membrillo-Hernandez 和 L.Salmeron 用几何方法研究有限维数猜想。2000 年， I.Aguston 、 D.Happel 、 E.Lukas 和 L.Unger 注意到，标准析层代数 (standardly stratified algebras) 的有限维数是有限的。 2002 年， K.Igusa 和 G.Todorov 证明了，对于整体维数不超过 3 的代数，它的投射模的自同态代数的有限维数是有限的。特别的，若果一个代数的表示维数不超过 3 ，那么这个代数的有限维数必定有限 (该结论的证明主要用到了他们几年前就已证明了的一个事实，但这个结论是在 2002 年才知道的)。关于表示维数这个概念的定义，读者可参见 1971 年 M.Auslander 的原文 (也可在 [2] 中找到) 。 2002 年，本文作者引入了一类叫做稳定遗传的代数，证明了这类代数的表示维数不超过 3 ，从而对这类代数有限维数猜想成立。为了计算单项式代数的有限维数， 2003 年，时洪波给出了图式的计算有限维数的算法。这样，利用计算机就可以计算单项式这类代数的有限维数。 2004 年， K.Erdmann 、 Th.Holm 、 O.Iyama 和 J.Schroeer 证明了，如果一个代数是一个表示有限型代数的子代数，且都有相同的 Jacobson 根，则所给代数的表示维数不超过 3 。由此，他们证明了，有限维数猜想对于特殊双列代数 (special biserial algebra) 和弦代数 (string algebra) 成立。

§3 近来的一些新进展

下面我们来综述一下近两年来，我们关于有限维数猜想研究的一些进展，主要内容取自文献 [1] 和 [2] 。这里，我们将介绍研究有限维数猜想的一个新的想法。

§3.1 一般问题

在以往关于有限维数的研究中，主要是固定在给定的一个代数上，然后对它的模的投射维数做估计。现在，我们的想法是，利用一组代数构成的链来界定有限维数。这个想法基于我们已证明的如下事实：

对域上的任意代数 A ，存在一个代数链

$$A = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_s$$

使得 A_s 是表示有限型的，且对所有的 i,A_i 的 Jacobson 根是 A_{i+1} 的左理想。

这里的关键之处是，我们采用 2 阶合充算子提升模，建立不同合充算子间的正合序列和使用 Igusa-Todorov 函数。在这里，我们所提出的一般问题是：

假设 ：给了一个代数的链 $A = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_s$, 满足对所有的 i,A_i 的 Jacobson 根是 A_{i+1} 的左理想。

问题 ：如果链中的某一些较大的代数的有限维数是有限的，那么我们对最小的代数 A_0 的有限维数能说些什么？

值得注意的是，如果这个问题的答案是： $\mathrm{fin.dim}(A_0) < \infty$, 那么有限维数猜想就成立。关于这个一般问题的讨论，我们得到的结果将在下一节中综述。

§3.2 新的结果

首先，我们来看如下的一个结果，它是有限维数猜想成立的另一种等价形式，也说明我们的想法是有意义的。

定理 1. 设 k 是一个域。下面条件等价：

（1）有限维数猜想对所有的 k- 代数成立；

（2）如果 $B \subseteq A$ 是 k- 代数的一个链， B 的根是 A 的左理想，且 $\mathrm{fin.dim}(A) < \infty$, 则 $\mathrm{fin.dim}(B) < \infty$.

进一步，我们证明了子代数链中如果有三个代数，则我们的一般问题的答案是肯定的，即有

定理 2. 设 $C \subseteq B \subseteq A$ 是一个代数链，其中 C 的根是 B 的左理想， B 的根是 A 的左理想. 如果 A 是表示有限型的，则 $\mathrm{fin.dim}(C) < \infty$ 。

容易看出，这个定理推广了 Erdmann-Holm-Iyama-Schroeer 的结论。在上面的这个定理中，我们用的是表示有限型来控制有限维数的，下面的结果则使用整体维数来界定有限维数的。

定理 3. 设 $B \subseteq A$ 是一个代数链，其中 B 的根是 A 的左理想，且作为左理想生成 A 的根. 如果 A 的整体维数不超过 4 ，则 $\mathrm{fin.dim}(B) < \infty$ 。

上述的定理反映的是代数与其扩张代数的有限维数的关系，下面的定理处理的是代数与其商代数的有限维数的关系。

定理 4. 设 I_1 和 I_2 是代数 A 的理想，满足 $I_1 I_2 = 0$. 如果 A/I_1 和 A/I_2 是表示有限型的，则 $\mathrm{fin.dim}(A) < \infty$ 。

定理 4 可以推出 Y.Wang 的结论；将这个定理推广到三个理想的情况也是一个很有意义的问题。关于有限维数猜想，我们进一步要研究的问题是如何将上述的结论做一般化的推广。比如，在定理 3 中，如果将 A 的整体维数假定为任意的有限数，如何来证明 B 的有限维数是有限的？目前这是一个公开问题。关于更多的有关结论和公开问题，见文献 [1] 和 [2] ，或浏览网页： http://math.bnu.edu.cn/~ccxi/.

最近， I.Assem 、 F.Coelho 、 M.I.Platzeck 、 S.Trepode 确定了几类表示维数为 3 的代数类，从而对这些类型的代数，有限维数猜想成立。

§4 结束语

从上面的介绍可以看出，有限维数猜想还远没有被解决。事实上，对有限维数猜想的研究还处于一个初步的阶段，有大量相关的问题有待研究。希望国内的代数爱好者共同努力，能为这个猜想的最终解决做出贡献。

本文是 2005 年 10 月在西安召开的《西部数学论坛》上讲稿提纲的中文翻译，并做了一些补充。由于篇幅所限，本文几乎略去了所有的参考文献。

参考文献

[1] C.C.Xi, On the finitistic dimension conjecture I: related to representation-finite algebras. J. Pure and Appl. Algebra 193(2004)287-305. Erratum. J. Pure and Appl. Algebra 202(2005)325-328.

[2] C.C.Xi, On the finitistic dimension conjecture II: related to finite global dimension. Adv. in Math. (in press). Preprint is available at http://math.bnu.edu.cn/~ccxi/Papers/Articles/finchain.pdf/.