WMPRT2006

In memory of the 150th anniversary of the birth of A.A. Markov and
in honor of the 100th anniversary of the introduction of Markov processes

Workshop on
Markov Processes and Related Topics 2006

August 21-25, 2006

Changsha, China

Central South University (CSU, China)
Beijing Normal University (BNU, China)

WMPRT2006-CHANGSHA ORGANIZATION

Workshop Co-chairs:

Zhenting Hou (CSU, China)
Mufa Chen (BNU, China)

Members of Advisory Panel:

Zikun Wang (BNU, China)
Zhiming Ma (Institute of Applied Mathematics, CAS, China)
Shige Peng(Shandong University, China)
Shijian Yan (BNU, China)

Members of Scientific Committee:

Chairman, Jia'an Yan (Institute of Applied Mathematics, CAS, China)

Anyue Chen（University of Greenwich, UK and University of Hong Kong, HK）
Dayue Chen（Peking University, China）
Guanglu Gong（Tsinghua University）
Dihe Hu (Wuhan University, China)
Elton Hsu（Northwestern University, US）
Zenghu Li（BNU, China）
Mingping Qian（Peking University, China）
Jiagang Ren（Zhongshan University, China）
Yanxia Ren（Peking University, China）
Liming Wu（Wuhan University, China）
Yimin Xiao (Michigan State University, US)
Xiangqun Yang (Hunan Normal University, China)
Zhongxing Ye(Shanghai Jiaotong University, China)
George Yin(Wayne State University, US)
Jiangang Ying(Fudan University, China)
Tusheng Zhang（University of Manchester，UK）
Weian Zheng (East China Normal University, University of California, US)
Jiezhong Zou (CSU, China)

Organizing Committee Members:

Fengyu Wang, Zenghu Li, Yuhui Zhang, Yonghua Mao (BNU)
Jiezhong Zou, Zaiming Liu, Junping Li, Zheng Yu (CSU)

Acknowledgement

Natural Science Foundation of China (NSFC Grant No. 10121101)
Hunan Provincial Government
Central South University
Beijing Normal University

August 20
Sunday

8:00 – 22:00 *Registration*

Hotel Hall (Ground floor), Hollyear Hotel

August 21
Monday

Opening Ceremony

Venue: Conference Hall, Tower C-201, Century Building, Railway Campus, CSU

9:00 – 9:10 *Welcoming Address*

Professor Boyun Huang, President of CSU

9:10 – 9:30 *Opening Remarks*

Professor Zhenting Hou, Co-chair of the workshop, CSU (zthou@csu.edu.cn)

Professor Mufa Chen, Co-chair of the workshop, BNU (mfchen@bnu.edu.cn)

9:30 – 10:00 *Photo Session*

10:00 – 10:30 *Tea Break*

Session 1A-R1 **Markov processes, Meeting Room 1,13th Floor, Hollyear Hotel**

Session Chair: Anyue Chen

10:30-11:00 *Fractal Geometry of Markov Processes*

Yimin Xiao

(Michigan State University, US; Email: xiaoyimi@stt.msu.edu)

11:00-11:30 *Constrained Optimization for Average Cost Continuous-Time Markov Decision Processes in Polish Spaces*

Xianping Guo

(Zhongshan University, China, mcsgxp@mail.sysu.edu.cn)

11:30-12:00 *A Note on the Finite Collision Property of Random Walks*

Dayue Chen

(Peking University, China, dayue@pku.edu.cn)

Session 1B-R2 **Stochastic Analysis, Meeting Room 2,15th Floor, Hollyear Hotel**

Session Chair: Wei'an Zheng

10:30-11:00 *The Choquet Integral and Its Applications: A Survey*

Jia'an Yan

(Institute of Applied Mathematics, CAS, China, jayan@mail.amt.ac.cn)

11:00-11:30 *Anticipating stochastic partial differential equations*

Tusheng Zhang

(University of Manchester, UK, tzhang@maths.man.ac.uk)

11:30-12:00 *On Brownian Motors*

Minping Qian

(Peking University, China, qianmp@math.pku.edu.cn)

12:00 – 14:30 *Lunch Break*

Session 2A-R1 **Markov processes, Meeting Room 1,13th Floor, Hollyear Hotel**

Session Chair: Dayue Chen

14:30 – 15:00 *Markov Processes in Random Environments*

Dihe Hu

(Wuhan University, China, dhhu@whu.edu.cn)

15:00-15:30 *Criteria on several types of ergodicity for single birth processes*

Yuhui Zhang

(Beijing Normal University, China, zhangyh@bnu.edu.cn)

15:30-16:00 *Age-dependent Branching processes in random environments*

Yingqiu Li

(Changsha University of Science & Technology, China, liyq@csust.edu.cn)

Session 2B-R2 **Stochastic Analysis, Meeting Room 2,15th Floor, Hollyear Hotel**

Session Chair: Minping Qian

14:30 – 15:00	*Strong continuity of generalized Feynman-Kac semigroups: Necessary and sufficient conditions*
	Chuanzhong Cheng
	(Hainan Normal University, China, czchen@hainnu.edu.cn)
15:00-15:30	*A topological lemma and its stochastic applications*
	Jiagang Ren（Zhongshan University, China, jgren@hust.edu.cn）
15:30-16:00	*Levy 过程驱动的随机 Burgers 方程的解及不变测度*
	Zhao Dong
	(Institute of Applied Mathematics, CAS, China, dzhao@mail.amt.ac.cn)
16:00 – 16:30	*Tea Break*

Session 3A-R1 Markov processes, Meeting Room 1,13th Floor, Hollyear Hotel

Session Chair: Zenghu Li

16:30-17:00	*Upper bounds for ultimate ruin probabilities in the Sparre Andersen risk model with interest and a nonlinear dividend barrier*
	Yijun Hu
	(Wuhan University, China, yijunhu@public.wh.hb.cn)
17:00:17:30	*A Markov process functional with Markov process*
	Xianmin Geng
	(Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, China, Xianmin.g@nuaa.edu.cn)

Session 3B-R2 Stochastic Analysis, Meeting Room 2,15th Floor, Hollyear Hotel

Session Chair: Guanglu Gong

16:30-17:00	*A Large deviation principle of super \alpha-stable process*
	Yanxia Ren
	(Peking University, China, yxren@math.pku.edu.cn)
17:00:17:30	*Almost Surely Exponential Stability of Numerical Methods for SDEs*
	Chenggui Yuan
	(University of Wales Swansea, UK, c.yuan@swansea.ac.uk)
18:00 – 20:00	*Conference Dinner*

August 22
Tuesday

Session 4A-R1 Markov processes, Meeting Room 1,13th Floor, Hollyear Hotel

Session Chair: Jiezhong Zou

8:30 – 9:00 *General Reuter Lemma and Uniqueness and Extinction of Interacting Branching Models*

Anyue Chen

(University of Greenwich& University of Hong Kong, A.Chen@gre.ac.uk)

9:00 – 9:30 *Complex networks and Markov chains (I)*

Liming Liu

(Hong Kong Polytechnic University, liming.liu@inet.polyu.edu.hk) **and**

Dinghua Shi

(Shanghai University, shidh2001@263.net)

9:30 – 10:00 *Complex networks and Markov chains(II)*

Liming Liu and Dinghua Shi

Session 4B-R2 Stochastic Analysis, Meeting Room 2,15th Floor, Hollyear Hotel

Session Chair: George Yin

8:30 – 9:00 *L^1-uniqueness of Kolmogorov's forward equations and Liouville property*

Liming Wu

(Wuhan University, China, Li-Ming.Wu@math.univ-bpclermont.fr)

9:00 – 9:30 *Stability of Stochastic Differential Equations with State-Dependent Switching*

Fubao Xi

(Beijing Institute of Technology, China, xifubao@xinhuanet.com)

9:30 – 10:00 *Quenched limit theorems for the super-Brownian motion with random immigration*

Wenming Hong

(Beijing Normal University, China, wmhong@bnu.edu.cn)

10:00 – 10:30 *Tea Break*

Session 5A-R1 Markov processes, Meeting Room 1,13th Floor, Hollyear Hotel
Session Chair: Xiangqun Yang

10:30-11:00 *From Markov skeleton processes to PDMPs with application in risk theory*

Guoxing Liu

(Hebei Univeristy of Technology, China, gxliu@hebut.edu.cn)

11:00-11:30 *Branching Processes with Large Immigration*

Junping Li (Central South University, China, jpli@csu.edu.cn)

11:30-12:00 *Subgeometric convergence of Markov processes*

Yuanyuan Liu (Central South University, China, liuyy@csu.edu.cn) **and Zhenting Hou**

Session 5B-R2 Stochastic Analysis, Meeting Room 2,15th Floor, Hollyear Hotel

Session Chair: Jiagang Ren

10:30-11:00 *Asymptotics of random mapping graphs*

Jiangang Ying

(Fudan University, China, jgying@fudan.edu.cn)

11:00-11:30 *Optimal control of SDEs associated with Levy generators*

Jianglun Wu

(University of Wales Swansea, UK, J.L.Wu@swansea.ac.uk)

11:30-12:00 *Stability of stochastic neutral partial functional differential equations*

Jiaowan Luo

(Guangzhou University, mathluo@yahoo.com)

12:00 – 14:30 *Lunch Break*

Session 6A-R1 Markov processes, Meeting Room 1,13th Floor, Hollyear Hotel

Session Chair: Dihe Hu

14:30 – 15:00 *A stochastic equation of non-negative Feller processes with non-negative jumps*

Zenghu Li

(Beijing Normal University, China, lizh@bnu.edu.cn)

15:00-15:30 *Some new results for dynamic mean-variance portfolio selection*

Zhongxing Ye

(Shanghai Jiaotong University,China, zxye@sjtu.edu.cn)

15:30-16:00 *Large deviations and interacting systems*

Jinwen Chen

(Tsinghua University,China, jchen@math.tsinghua.edu.cn)

Session 6B-R2 Stochastic Analysis, Meeting Room 2,15th Floor, Hollyear Hotel

Session Chair: Elton Hsu

14:30 – 15:00 *Entropies, convexity, and functional inequalities*

Djalil CHAFAI

(Université Paul Sabatier, France, chafai@math.ups-tlse.fr)

15:00-15:30 *Pathwise stationary solutions of SPDEs and BDSDEs on infinite horizon*

Huaizhong Zhao

(Loughborough University, UK, H.Zhao@lboro.ac.uk)

15:30-16:00 *Limit Theorems for Immigration Super-Brownian Motion*

Mei Zhang

(Beijing Normal University, China, meizhang@bnu.edu.cn)

16:00 – 16:30 *Tea Break*

Session 7A-R1 Markov processes, Meeting Room 1,13th Floor, Hollyear Hotel

Session Chair: Yimin Xiao

16:30-17:00 *一般状态跳过程平稳分布的存在性*

Shaoyi Zhang

(Hubei University,China, zhshaoyi@yahoo.com.cn)

17:00:17:30 *The linear minimax estimator of stochastic regression and parameter under quadratic loss function*

Shenghua Yu

(Central South University, China, yshh1966@163.com)

Session 7B-R2 Stochastic Analysis, Meeting Room 2,15th Floor, Hollyear Hotel

Session Chair: Tusheng Zhang

16:30-17:00 *Switching Diffusion Processes*

George Yin

(Wayne State University, US, gyin@math.wayne.edu)

17:00:17:30 *Strong Feller property for measure-valued flows (Fleming-Viot processes)*

Kainan Xiang

(Hunan Normal University, China, nan_kai@yahoo.com)

18:00 – 20:00 *Conference Dinner*

Session 8A-R1 **Markov processes, Meeting Room 1,13th Floor, Hollyear Hotel**

Session Chair: Zhongxing Ye

8:30 – 9:00 *M/PH/1 queuing model with infinite phases*

Yonghua Mao

(Beijing Normal University, China, maoyh@bnu.edu.cn)

9:00 – 9:30 *Testing Serial Correlation in Partial Linear Measurement Error Models*

Feng Liu and

Jiezhong Zou

(Central South University, jzzou@csu.edu.cn)

9:30 – 10:00 *金融数学与过程统计*

Wei'an Zheng

(East China Normal University& University of California, wzheng@uci.edu)

Session 8B-R2 **Stochastic Analysis, Meeting Room 2,15th Floor, Hollyear Hotel**

Session Chair: Liming Wu

8:30 – 9:00 *Generalized Bismut's formula for certain stochastic differential equations in vector bundles*

Elton Hsu

(Northwestern University, US, elton@math.northwestern.edu)

9:00 – 9:30 *The Range of super-Brownian motions on hyperbolic space*

Jiashan Tang

(Nanjing University of Posts & Telecommunications, jiashant@yahoo.ca)

9:30 – 10:00 *Exponential stability of neutral stochastic partial differential equations*

Kai Liu

(University of Liverpool, UK, K.Liu@liverpool.ac.uk)

10:00 – 10:30 *Tea Break*

Session 9A-R1 **Markov processes, Meeting Room 1,13th Floor, Hollyear Hotel**

Session Chair: Xianping Guo

10:30-11:00 *A detailed structure of infinite cluster of two-dimensional supercritical*

	oriented percolation
	Xianyuan Wu
	(Capital Normal University, China, wuxy@mail.cnu.edu.cn)
11:00-11:30	*Asymptotic Relationship for Ruin Probability in Classic Risk Model*
	Rizhao Gong and
	Jiezhong Zou
	(Central South University, jzzou@csu.edu.cn)
12:00 – 14:30	*Lunch Break*
14:30-18:00	**City Tour: Yuelu Academy(Yuelu Shuyuan) and Hunan Provincial Museum**
19:30-22:00	**Social and Cultural Activity-Tianhan Theater**

August 24-25
Thursday and Friday

Trip to Zhang Jiajie National Forest Park

Note: This trip is Non-free. If you want to go, please tell the workshop secretariat when you register on your first day of arrival.

Appendix I

A Short Introduction to Andrei A Markov (1856 to 1922)

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/PictDisplay/Markov.html

Anrei Andreevich Markov

Andrei Andreevich Markov was born June 2, 1856 in Ryazan, Russia. In his early years, he attended school in Petersburg and was a poor student in everything but mathematics. He was somewhat of a rebel, and this quality stayed with him into adulthood, causing many problems with his government and peers.

He was a student under P. L. Chebyshev at the Petersburg University in 1874, and completed his studies there in 1878. He received a gold medal from the university and was asked to stay and become an academic by profession. When Chebyshev left the university, Markov taught his probability courses.

Markov was elected to be a member of the mathematical "school" founded by Chebyshev, the St. Petersburg Academy of Science, in 1886. He became a full member by 1896 and retired from the University (although he continued to teach) in 1905. He was also one of the early mathematicians who were always seeking the practical uses for statistics and probability, and took part in debates about the running of certain departments of the government and also teaching math in high schools.

Markov was one of Chebyshev's most famous disciples and his ideas were always trying to represent probability as an exact and practical mathematical science, even before R. A. Fisher. He and one of Chebyshev's other great students, Liapunov, were very focused on their mentors' ideas. Markov especially focused on the method of movements. His introduction of the Markov chain as a model for the study of random variables made huge amounts of research possible in stochastic processes [a stochastic process is a family or a collection of random variables indexed by a parameter-also called a chance or random process. The common indexes used are time and space to represent random phenomena.] He mostly confined his work to investigating the Weak Law of Large numbers (WLLN) and the Central Limit Theorem. His motivation for the writing of his papers involving the Markov chains was first, to show that Chebyshev's approach to extending the Weak Law of Large numbers to sums of dependent random variables could be taken even further. Second, and probably more applicable, is an animosity between Markov and P. A. Nekrasov. In 1902, Nekrasov said that not only would "pairwise independence" yield the WLLN according to Chebychev's deductions, but also he claimed without much proof and wrongly that it was not only sufficient but necessary for the WLLN to hold. Markov, of course, refuted this argument (and correctly) in his papers, and thereby made a lifelong adversary out of Nekrasov. In doing all this, he uses his self-named Markov chains as part of the processes.

A practical use for his mathematics was found in his use of his chains to model the alteration of vowels and consonants in Russian literary works. He also wrote a statistics and probability textbook, one of the best in its time. His work influenced many other famous mathematicians and statisticians, including S. N. Bernstien, V. I. Romanovsky, and Jerzy Neyman (who then took statistics to a new and more practical level). After contributing a great deal to number theory, analysis, calculus of finite differences, probability theory (with the Markov chains), and statistics, he died in Petrograd (formerly St. Petersburg, now Leningrad), U. S. S. R., on July 20, 1922.

http://www.mrs.umn.edu/~sungurea/introstat/history/w98/markov.html

Appendix II

The Original Paper that Introduced Markov Processes (1906)

A.A. Markov. "Rasprostranenie zakona bol'shih chisel na velichiny, zavisyaschie drug ot druga". Izvestiya Fiziko-matematicheskogo obschestva pri Kazanskom universitete, 2-ya seriya, tome15, pp 135-156, 1906.

Sincere thanks goes to Dr. Zhanna Kashina of the International Office at Kazan State University, Russia and also to the University Library. Without their generous and prompt help, we cannot find this great paper that was published in the journal of Kazan State University one hundred years ago.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ PHYSICO-MATHÉMATIQUE
de Kasan.
Deuxième série. Tome XV.

ИЗВѢСТІЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА
ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ КАЗАНСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ.

ВТОРАЯ СЕРІЯ
ТОМЪ XV.
№ 4.

КАЗАНЬ.
Типо-литографія Императорскаго Университета.
1906.

Распространеніе закона большихъ чиселъ на величины, зависящія другъ отъ друга.

Законъ большихъ чиселъ, въ силу котораго, съ вѣроятностью сколь угодно близкою къ достовѣрности, можно утверждать, что среднее арифметическое изъ нѣсколькихъ величинъ, при достаточно большомъ числѣ этихъ величинъ, будетъ произвольно мало отличаться отъ средней арифметической изъ ихъ математическихъ ожиданій, выведенъ Чебышевымъ *) изъ разсмотрѣнія математическаго ожиданія квадрата разности между суммой этихъ величинъ и суммой ихъ математическихъ ожиданій. А именно, изъ разсужденій Чебышева ясно, что указанный законъ большихъ чиселъ долженъ оправдываться во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда математическое ожиданіе квадрата разности между суммой величинъ и суммой ихъ математическихъ ожиданій, при безпредѣльномъ возрастаніи числа величинъ, возрастаетъ медленнѣе чѣмъ квадратъ ихъ числа, такъ что отношеніе этого математическаго ожиданія къ квадрату числа величинъ имѣетъ предѣломъ нуль.

Въ своихъ выводахъ Чебышевъ ограничился простѣйшимъ, и потому наиболѣе интереснымъ случаемъ, независимыхъ величинъ; въ этомъ простѣйшемъ случаѣ, какъ показалъ Че-

*) Сочиненія П. Л. Чебышева. Т. I. О среднихъ величинахъ.

бышевъ, математическое ожиданіе вышеуказаннаго квадрата, при безпредѣльномъ возрастаніи числа величинъ, можетъ возрастать только съ такой же быстротой какъ число ихъ, если математическія ожиданія квадратовъ самихъ величинъ остаются конечными, а не возрастаютъ безпредѣльно.

Конечно, условія Чебышева далеко не исчерпываютъ всѣхъ случаевъ, къ которымъ можно примѣнить вышеуказанный законъ, если даже мы ограничимся независимыми величинами. Мы не имѣемъ однако въ виду заниматься разысканіемъ условій необходимыхъ и достаточныхъ для примѣнимости этого закона; а укажемъ только, что выводы Чебышева можно распространить и на нѣкоторые случаи, довольно общаго характера, когда величины зависятъ другъ отъ друга.

§ 1. На первомъ планѣ можно поставить случай, когда связь величинъ такова, что увеличеніе любой изъ нихъ влечетъ за собой уменьшеніе математическихъ ожиданій остальныхъ.

Остановимся на этомъ случаѣ; пусть разсматриваемыя нами величины будутъ

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots,\ x_n,\ \ldots\ldots$$

а математическія ожиданія ихъ соотвѣтственно равны

$$a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots,\ a_n,\ \ldots\ldots;$$

положимъ еще для краткости

$$x_l - a_l = z_l.$$

Разсматривая математическое ожиданіе квадрата

$$(z_1 + z_2 + \ldots + z_n)^2,$$

разлагаемъ его на слагаемыя

$$z_1^2 + z_2^2 + \ldots\ldots + z_n^2 + 2z_1z_2 + 2z_1z_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 2z_{n-1}z_n$$

и пользуемся извѣстнымъ предложеніемъ, что математическое ожиданіе суммы равно суммѣ математическихъ ожиданій слагаемыхъ.

Для независимыхъ величинъ математическія ожиданія произведеній вида $z_l z_k$ всѣ равны нулю и потому математическое ожиданіе $(z_1+z_2+..+z_n)^2$ приводится къ суммѣ математическихъ ожиданій квадратовъ величинъ $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Въ нашемъ же случаѣ математическое ожиданіе каждаго произведенія $z_l z_k$ число отрицательное и потому

мат. ожид. $(z_1+z_2+..+z_n)^2 < \Sigma$ мат. ож. z^2_k $(k=1,2,\ldots,n)$.

Чтобы въ этомъ удостовѣриться, положимъ, что совокупность чиселъ

$$z'_l, z''_l, \ldots, z_l^{(\omega)},$$

расположенныхъ въ возрастающемъ порядкѣ, представляетъ всѣ возможныя значенія z_l, а вѣроятности ихъ соотвѣтственно равны

$$p'_l, p''_l, \ldots, p_l^{(\omega)};$$

пусть наконецъ при

$$z_l = z'_l, z''_l, \ldots, z_l^{(\omega)}$$

математическое ожиданіе z_k соотвѣтственно равно

$$a'_k, a''_k, \ldots, a_k^{(\omega)}.$$

При такихъ обозначеніяхъ математическое ожиданіе произведенія $z_l z_k$ выражается суммою

$$p'_l z'_l a'_k + p''_l z''_l a''_k + \ldots + p_l^{(\omega)} z_l^{(\omega)} a_k^{(\omega)},$$

а математическія ожиданія самихъ величинъ z_l, z_k, равныя нулю, могутъ быть представлены въ видѣ суммъ

$$p'_l z'_l + p''_l z''_l + \ldots + p_l^{(\omega)} z_l^{(\omega)}$$

и

$$p'_l a'_k + p''_l a''_k + \ldots + p_l^{(\omega)} a_k^{(\omega)}$$

1*

И такъ какъ для разсматриваемаго нами случая, согласно предположенію, должно быть

$$a'_k > a''_k > \ldots > a_k^{(\omega)},$$

то въ силу извѣстнаго неравенства Чебышева *) имѣемъ

$$\sum p_l^{(i)} z_l^{(i)} a_k^{(i)} < \sum p_l^{(i)} z_l^{(i)} \sum p_l^{(i)} a_k^{(i)} = 0.$$

Слѣдовательно къ разсматриваемому нами случаю можно примѣнить законъ большихъ чиселъ, если только математическое ожиданіе z_n остается конечнымъ, а не возрастаетъ безпредѣльно вмѣстѣ съ n.

Къ тому же неравенству

мат. ожид. $(z_1 + z_2 + \ldots + z_n)^2 < \sum$ мат. ожид. z^2_k, а слѣдовательно и къ тому же заключенію о примѣнимости закона большихъ чиселъ, не трудно придти и въ случаѣ когда математическое ожиданіе x_k, при всякомъ k, уменьшается съ увеличеніемъ суммы

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1};$$

для этого нужно только воспользоваться тождествомъ

$$(z_1 + z_2 + \ldots + z_n)^2 = z^2_1 + z^2_2 + \ldots + z_n^2 + 2z_1z_2 + 2(z_1 + z_2)z_3 + 2(z_1 + z_2 + z_3)z_4 + \ldots$$

Указанныя условія выполняются, напримѣръ, въ случаѣ, когда сумма

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

равна числу бѣлыхъ шаровъ среди n шаровъ, вынутыхъ последовательно изъ сосуда при слѣдующихъ условіяхъ:

*) Сочиненія П. Л. Чебышева. Т. II. стр. 716—719. О приближенныхъ выраженіяхъ однихъ интеграловъ черезъ другіе. Korkine. Sur un théorème de M. Tchébycheff (Comptes Rendus, T. XCVI)

1) первоначальное число бѣлыхъ шаровъ въ сосудѣ равно $2a$, а остальныхъ шаровъ—$2b$;

2) вынутые шары обратно въ сосудъ не возвращаются;

3) когда въ сосудѣ остается $a+b$ шаровъ, въ него прибавляютъ a бѣлыхъ шаровъ и b другихъ шаровъ.

Въ силу закона большихъ чиселъ въ данномъ случаѣ, совершенно также какъ въ извѣстномъ случаѣ, когда отношеніе числа бѣлыхъ шаровъ къ числу всѣхъ шаровъ въ сосудѣ сохраняетъ неизмѣнную величину $\frac{a}{a+b}$, мы можемъ утверждать, съ вѣроятностью сколь угодно близкою къ достовѣрности, что отношеніе числа появившихся бѣлыхъ шаровъ къ числу всѣхъ вынутыхъ шаровъ, при достаточно большомъ числѣ ихъ, будетъ отличаться отъ $\frac{a}{a+b}$ менѣе, чѣмъ на любую заданную величину.

§ 2. Повторяя, что мы даемъ только достаточныя, но не необходимыя, условія, остановимся на одномъ изъ тѣхъ случаевъ, на которые выводы Чебышева можно распространить по той причинѣ, что вліяніе величинъ

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

другъ на друга быстро убываетъ по мѣрѣ увеличенія ихъ взаимнаго разстоянія. Въ нашемъ случаѣ

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

будетъ представлять число появленій нѣкотораго событія A при n послѣдовательныхъ испытаніяхъ, связанныхъ такимъ образомъ, что вѣроятность событія A при каждомъ испытаніи имѣетъ вполнѣ опредѣленное значеніе p', если событіе A появилось при непосредственно предшествующемъ испытаніи, и другое опредѣленное значеніе p'' въ противномъ случаѣ, каковы бы ни были результаты прочихъ предшествующихъ ему испытаній; если же результаты всѣхъ испытаній остаются неопредѣленными, то вѣроятность событія A для каждаго изъ нихъ равна одному и тому же числу p.

Приступая къ разсмотрѣнію этого случая, положимъ для краткости

$$1-p=q, 1-p'=q', 1-p''=q''$$

и замѣтимъ, что числа p, p', p'' связаны между собой простымъ равенствомъ

$$p=pp'+qp'',$$

на основаніи котораго по даннымъ двумъ изъ этихъ чиселъ не трудно найти третье; оно даетъ

$$p=\frac{p''}{1-p'+p''}, p'=1+p''-\frac{p''}{p}, p''=p\frac{1-p'}{1-p}.$$

Такъ какъ числа x_l, x_k соотвѣтственно означаютъ число (0 или 1) появленій событія A при испытаніяхъ отмѣченныхъ нумерами l и k, то нетрудно установить равенства

$$a_l=a_k=p.$$

Нетрудно также убѣдиться, что математическое ожиданіе произведенія $z_l z_k$, равнаго

$$x_l x_k - a_l x_k - a_k x_l + a_k a_l,$$

приводится къ разности

$$\text{матем. ожид. } x_l x_k - p^2.$$

Что же касается математическаго ожиданія произведенія $x_l x_k$, то оно равно вѣроятности появленія событія A при обоихъ испытаніяхъ, отмѣченныхъ нумерами l и k, которая въ свою очередь въ силу теоремы объ умноженіи вѣроятностей можетъ быть выражена произведеніемъ числа p, представляющаго вѣроятность появленія событія при испытаніи съ нумеромъ l, на нѣкоторое число $R^l{}_k$, представляющее вѣроятность появленія событія A при испытаніи съ нумеромъ k, когда извѣстно, что событіе A появилось при испытаніи съ нумеромъ l.

Придя такимъ образомъ къ равенству

$$\text{матем. ожид. } z_l z_k = p(R^l{}_k - p),$$

мы должны заняться разысканіемъ числа $R^l{}_k$: которое зависитъ, какъ не трудно убѣдиться, только отъ разности $k-l$ и потому можетъ быть обозначено болѣе простымъ символомъ

$$R_{k-l}.$$

При $k-l=1$ въ силу нашихъ условій имѣемъ

$$R_1 = p';$$

затѣмъ нетрудно послѣдовательно найти

$$R_2 = R_1 p' + (1-R_1)p'' = p'p' + q'p'',$$

$$R_3 = R_2 p' + (1-R_2)p'',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$R_{m+1} = R_m p' + (1-R_m)p'' = p'' + (p'-p'')R_m.$$

Уравненіе

$$R_{m+1} = p'' + (p'-p'')R_m$$

принадлежитъ къ числу тѣхъ, для рѣшенія которыхъ нетрудно указать общую формулу; а именно, это уравненіе даетъ намъ

$$R_m = p + C(p'-p'')^m,$$

при чемъ постоянное число C опредѣляется изъ условія

$$R_1 = p'$$

и оказывается равнымъ $1-p=q$.

Итакъ

$$\text{матем. ожид. } z_l z_k = pq(p'-p'')^{k-l}$$

и слѣдовательно

$$\text{матем. ожид. } (z_1+z_2+\ldots+z_{k-1})z_k=$$

$$=pq[p'-p''+(p'-p'')^2+\ldots+(p'-p'')^{k-1}].$$

Отсюда слѣдуетъ, что при $p'<p''$ математическое ожиданіе произведенія

$$(z_1+z_2+\ldots+z_{k-1})z_k$$

число отрицательное и потому

$$\text{матем. ожид. } (z_1+z_2+\ldots+z_n)^2<npq;$$

если же $p'>p''$, то математическое ожиданіе произведенія

$$(z_1+z_2+\ldots+z_{k-1})z_k$$

меньше

$$\frac{pq(p'-p'')}{1-p'+p''}$$

и потому

$$\text{мат. ожид. } (z_1+z_2+\ldots+z_n)^2<npq\left(1+\frac{2(p'-p'')}{1-p'+p''}\right)$$

$$<\frac{npq\,(1+p'-p'')}{1-p'+p''}.$$

Такимъ образомъ мы пришли къ неравенствамъ, которыя ясно обнаруживаютъ, что къ данному случаю можно примѣнить законъ большихъ чиселъ.

Въ силу этого закона мы можемъ, съ вѣроятностью сколь угодно близкою къ достовѣрности, утверждать, что при достаточно большомъ числѣ нашихъ испытаній отношеніе числа появленій событія A къ числу испытаній будетъ разниться отъ p на величину меньшую любого даннаго числа.

§ 3. Выраженіе математическаго ожиданія произведенія

$z_l z_k$, найденное въ предыдущемъ параграфѣ, можно вывесть изъ общихъ формулъ, которыми мы займемся и которыя могутъ служить основаніемъ для дальнѣйшихъ изслѣдованій.

Обозначимъ, при предположеніяхъ предыдущаго параграфа, символомъ $P_{m,k}$ вѣроятность, что въ первыя k испытаній событіе A появиться ровно m разъ.

Мы можемъ положить

$$P_{m,k} = V_{m,k} + U_{m,k},$$

гдѣ $U_{m,k}$ и $V_{m,k}$, означаютъ туже вѣроятность, какъ и $P_{m,k}$, но при слѣдующихъ условіяхъ:

1) $U_{m,k}$—при условіи, что при послѣднемъ испытаніи событіе A не имѣетъ мѣста.

2) $V_{m,k}$—при условіи, что при послѣднемъ испытаніи событіе A имѣетъ мѣсто.

Въ связи съ величинами $P_{m,k}, V_{m,k}, U_{m,k}$ введемъ еще три функціи произвольнаго числа ξ:

$$\Phi_k = U_{o,k} + U_{1,k}\xi + U_{2,k}\xi^2 + \ldots + U_{k-1,k}\xi^{k-1},$$

$$\Psi_k = V_{1,k}\xi + V_{2,k}\xi^2 + \ldots + V_{k,k}\xi^k,$$

$$\Omega_k = P_{o,k} + P_{1,k}\xi + P_{2,k}\xi^2 + \ldots + P_{k,k}\xi^k = \Psi_k + \Phi_k.$$

Мы покажемъ теперь, что функція Ω_k можетъ быть опредѣлена какъ коэффиціентъ при t^k, въ разложеніи, по возрастающимъ степенямъ произвольнаго числа t, довольно простого выраженія.

Для этой цѣли, пользуясь теоремами сложенія и умноженія вѣроятностей, устанавливаемъ два равенства

$$U_{m,k} = q' V_{m,k-1} + q'' U_{m,k-1},$$

$$V_{m,k} = p' V_{m-1,k-1} + p'' U_{m-1,k-1}$$

Примѣняя затѣмъ эти равенства къ функціямъ Φ_k и Ψ_k, получаемъ два уравненія

$$\Phi_k = q'\Psi_{k-1} + q''\Phi_{k-1},$$
$$\Psi_k = p'\xi\Psi_{k-1} + p''\xi\Phi_{k-1},$$

изъ которыхъ наконецъ посредствомъ исключенія одной изъ двухъ функцій Φ или Ψ, выводимъ

$$\Phi_{k+1} - (p'\xi + q'')\Phi_k + (p' - p'')\xi\Phi_{k-1} = 0,$$
$$\Psi_{k+1} - (p'\xi + q'')\Psi_k + (p' - p'')\xi\Psi_{k-1} = 0.$$

А такъ какъ

$$\Omega_k = \Phi_k + \Psi_k,$$

то должно быть также

$$\Omega_{k+1} - (p'\xi + q'')\Omega_k + (p' - p'')\xi\Omega_{k-1} = 0\,.$$

Отсюда слѣдуетъ, что Ω_k можно опредѣлить какъ коэффиціентъ при t^k въ разложеніи, по возрастающимъ степенямъ t, дроби вида

$$\frac{A + Bt}{1 - (p'\xi + q'')t + (p' - p'')\xi t^2},$$

гдѣ A и B не зависятъ отъ t.

Для опредѣленія A и B остается разсмотрѣть Ω_k при двухъ значеніяхъ k; при $k=1$ и $k=2$ легко находимъ

$$\Omega_1 = q + p\xi$$
$$\Omega_2 = qq'' + (qp'' + pq')\xi + pp'\xi^2,$$

откуда выводимъ

$$\Omega_o = 1.$$

Разлагая же нашу дробь по возрастающимъ степенямъ t и ограничиваясь двумя первыми членами, находимъ

$$\begin{aligned} A + (B + p'\xi + q'')t &= \Omega_o + \Omega_1 t \\ &= 1 + (q + p\xi)t \end{aligned}$$

что даетъ намъ два равенства

$$A = 1$$
$$B = (p - p')\xi + q - q'',$$

изъ которыхъ послѣднее не трудно привести къ такому виду

$$B=(p''-p')(q\xi+p)$$

Итакъ окончательно находимъ

$$\frac{1+(p''-p')(q\xi+p)t}{1-(p'\xi+q'')t+(p'-p'')\xi t^2}=$$
$$=\Omega_0+\Omega_1 t+\Omega_2 t^2+\ldots\ldots$$

Эта формула можетъ служить основаніемъ для дальнѣйшихъ изслѣдованій*) и, въ частности, изъ нея нетрудно вывести результаты предыдущаго параграфа, на чемъ однако мы не остановимся.

§ 4. Для выясненія дѣла приведемъ еще примѣръ, къ которому нельзя примѣнить закона большихъ чиселъ.

Пусть подобно прежнему (§ 1) сумма

$$x_1+x_2+\ldots\ldots+x_n$$

равна числу бѣлыхъ шаровъ среди n шаровъ, вынутыхъ послѣдовательно изъ сосуда, только при новыхъ условіяхъ, которыя мы установимъ такъ:

1) первоначальное число бѣлыхъ шаровъ въ сосудѣ равно a, а остальныхъ b,

2) каждый вынутый изъ сосуда шаръ поступаетъ обратно въ сосудъ вмѣстѣ съ другимъ шаромъ того же цвѣта.

Въ данномъ случаѣ увеличеніе суммы

$$x_1+x_2+\ldots+x_{k-1}$$

непремѣнно ведетъ къ увеличенію математическаго ожиданія x_k и потому математическое ожиданіе произведенія

$$(z_1+z_2+\ldots+z_{k-1})z_k$$

оказывается числомъ положительнымъ.

---

*) См. въ Извѣстіяхъ Акад. Наукъ за 1907 годъ мою статью «Изслѣдованіе замѣчательнаго случая зависимыхъ испытаній».

Для вычисленія математическаго ожиданія квадрата

$$(z_1+z_2+\ldots+z_n)^2$$

замѣтимъ, что оно можетъ быть выражено суммою

$$\sum\left(m-n\frac{a}{a+b}\right)^2 P_{m,n}^{a,b} \quad (m=0,1,2,\ \ldots\ n,),$$

гдѣ $P_{m,n}^{a,b}$ означаетъ вѣроятность, что среди n вынутыхъ шаровъ будетъ ровно m бѣлыхъ, и опредѣляется, какъ нетрудно убѣдиться формулою

$$P_{m,n}^{a,b}=\frac{1.2.3\ldots n.a(a+1)\ldots(a+m-1)b(b+1)\ldots(b+n-m-1)}{1.2\ldots m.1.2\ldots(n-m)(a+b)(a+b+1)\ldots(a+b+n-1)}.$$

Изъ приведенной формулы вытекаютъ слѣдующія простыя равенства

$$mP_{m,n}^{a,b}=\frac{na}{a+b}P_{m-1,n-1}^{a+1,b}$$

$$m(m-1)P_{m,n}^{a,b}=\frac{n(n-1)a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}P_{m-2,n-2}^{a+2,b}$$

на основаніи которыхъ получаемъ

$$\sum mP_{m,n}^{a,b}=\frac{na}{a+b},$$

$$\sum m(m-1)\ P_{m,n}^{a,b}=\frac{n(n-1)a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)},$$

гдѣ

$$m=0,1,2,\ \ldots\ ,n.$$

Послѣднія равенства, вмѣстѣ съ очевиднымъ равенствомъ

$$\sum P_{m,n}^{a,b}=1,$$

даютъ возможность опредѣлить искомую сумму

$$\sum\left(m-n\frac{a}{a+b}\right)^2 P_{m,n}^{a,b},$$

для чего ее слѣдуетъ разложить на три части:

$$\sum m(m-1) P_{m,n}^{a,b} - \left(\frac{2na}{a+b} - 1\right) \sum m \, P_{m,n}^{a,b}$$

$$+ n^2 \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 \sum P_{m,n}^{a,b}$$

Остается произвести простыя выкладки, по выполненіи которыхъ получаемъ

$$\sum \left(m - n \, \frac{a}{a+b}\right)^2 P_{m,n}^{a,b} = \frac{nab(n+a+b)}{(a+b)^2(a+b+1)} \, .$$

Основываясь на этомъ результатѣ, мы можемъ показать, что къ данному случаю законъ большихъ чисель не примѣняется; такъ что при достаточно маломъ значеніи ε вѣроятность неравенствъ

$$-\varepsilon \leqq \frac{m}{n} - \frac{a}{a+b} \leqq + \varepsilon$$

не можетъ быть произвольно близка къ единицѣ, какъ бы ни было велико число n.

Для этой цѣли обозначимъ буквою β вѣроятность неисполненія неравенствъ

$$-\varepsilon \leqq \frac{m}{n} - \frac{a}{a+b} \leqq + \varepsilon.$$

и примемъ во вниманіе, что квадратъ

$$\left(\frac{m}{n} - \frac{a}{a+b}\right)^2$$

не можетъ превосходить наибольшаго изъ чиселъ

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^2 \text{ и } \left(\frac{b}{a+b}\right)^2;$$

которое обозначимъ буквою ξ.

При такихъ обозначеніяхъ изъ найденной нами формулы нетрудно вывесть неравенство

$$\xi\beta > \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} - \varepsilon^2,$$

которое показываетъ, что β не можетъ быть произвольно малымъ, если только

$$\varepsilon < \sqrt{\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}}$$

Интересно замѣтить, что въ нашемъ примѣрѣ наивѣроятнѣйшая величина числа m, которую мы обозначимъ буквою μ опредѣляется простыми неравенствами

$$(a-1)n-b+1 \leqq (a+b-2)\mu,$$
$$(a-1)n+a-1 \leqq (a+b-2)\mu,$$

и отношеніе $\frac{\mu}{n}$, при безпредѣльномъ возрастаніи n, имѣетъ предѣломъ

$$\text{не } \frac{a}{a+b} \quad \text{а } \frac{a-1}{a+b-2};$$

но конечно нельзя расчитывать, чтобы при большихъ значеніяхъ n отношеніе $\frac{m}{n}$ было произвольно близко къ $\frac{a-1}{a+b-2}$; такъ какъ математическое ожиданіе квадрата $\left(\frac{m}{n}-g\right)^2$ достигаетъ своей наименьшей величины при $g=\frac{a}{a+b}$ и эта наименьшая величина, какъ видно изъ найденной нами формулы, стремится, при безпредѣльномъ возрастаніи n, къ предѣлу $\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$, отличному отъ нуля.

Въ простѣйшемъ случаѣ, когда

$$a=b=1,$$

непримҍнимость закона большихъ чиселъ очевидна; такъ какъ въ этомъ случаҍ всҍ предположенія

$$m=0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots\ n$$

имҍютъ одну и туже вҍроятность $\frac{1}{n+1}$.

16-го января 1907 года.

§ 5. Выводамъ § 2 можно придать значительно большую общность; а именно, вмҍсто числа появленій нҍкотораго событія можно разсматривать сумму величинъ, связанныхъ въ цҍпь такимъ образомъ, что, когда одна изъ нихъ получаетъ опредҍленное значеніе, слҍдующія за ней становятся независимыми отъ предшествующихъ ей. Пусть будетъ

$$x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots$$

безконечный рядъ величинъ, связанныхъ такимъ образомъ, что x_{k+1} при всякомъ k не зависитъ отъ

$$x_1, x_2, \ldots, x_{k-1},$$

когда извҍстно значеніе x_k.

Пусть далҍе совокупность чиселъ

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$$

представляетъ всҍ возможныя значенія любой изъ нашихъ величинъ, а система

$$\begin{array}{llll} p_{\alpha,\alpha}, & p_{\alpha,\beta}, & p_{\alpha,\gamma}, & \ldots \\ p_{\beta,\alpha}, & p_{\beta\beta}, & p_{\beta,\gamma}, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

представляетъ вҍроятности, при данномъ значеніи x_k, величинҍ x_{k+1} имҍть опредҍленное значеніе, при чемъ первый значекъ у p указываетъ данную величину x_k, а второй — предполагаемую величину x_{k+1}; напримѣръ при

$$x_k = \beta$$

вѣроятность равенства

$$x_{k+1} = \gamma$$

имѣетъ значеніе $p_{\beta,\gamma}$.

Эти вѣроятности мы предполагаемъ независящими отъ значка k, чтобы не очень усложнять наши обозначенія и разсужденія.

Пусть наконецъ

$$p_\alpha^{(k)}, p_\beta^{(k)}, p_\gamma^{(k)}, \ldots .$$

соотвѣтственно означаютъ вѣроятности для x_k имѣть значенія

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$$

пока всѣ величины

$$x_1, x_2, x_3, \ldots \ldots ,$$

остаются неопредѣленными. Числа

$$\begin{array}{l} p_{\alpha,\alpha}, p_{\alpha,\beta}, p_{\alpha,\gamma}, \ldots \\ p_{\beta,\alpha}, p_{\beta,\beta}, p_{\beta,\gamma}, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

должны быть, конечно, положительными, кромѣ того они должны удовлетворять равенствамъ

$$\begin{array}{l} p_{\alpha,\alpha} + p_{\alpha,\beta} + p_{\alpha,\gamma} + \ldots\ldots = 1, \\ p_{\beta,\alpha} + p_{\beta,\beta} + p_{\beta,\gamma} + \ldots\ldots = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{array}$$

никакими другими условіями эти числа не ограничены.

Что же касается чиселъ

$$p_{\alpha}^{(k)},\ p_{\beta}^{(k)},\ p_{\gamma}^{(k)},\ \ldots\ldots,$$

которыя, конечно, должны удовлетворять условію

$$p_{\alpha}^{(k)}+p_{\beta}^{(k)}+p_{\gamma}^{(k)}+\ldots\ldots=1,$$

то ихъ нельзя задавать независимо для всѣхъ значеній k; напротивъ по значеніямъ

$$p'_{\alpha},\ p'_{\beta},\ p'_{\gamma},\ \ldots\ldots$$

можно вычислять послѣдовательно всѣ величины

$$p_{\alpha}^{(k)},\ p_{\beta}^{(k)},\ p_{\gamma}^{(k)},\ \ldots\ldots$$

на основаніи простыхъ формулъ

$$p_{\alpha}^{(k+1)}=p_{\alpha,\alpha}p_{\alpha}^{(k)}+p_{\beta,\alpha}p_{\beta}^{(k)}+\ldots\ldots$$

$$p_{\beta}^{(k+1)}=p_{\alpha,\beta}p_{\alpha}^{(k)}+p_{\beta,\beta}p_{\beta}^{(k)}+\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Обращаясь къ математическимъ ожиданіямъ нашихъ величинъ при различныхъ данныхъ, обозначимъ по прежнему символомъ

$$a_k$$

математическое ожиданіе x_k, пока всѣ величины

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots,x_k,\ \ldots\ldots$$

остаются неопредѣленными, а символами

$$A_{\alpha}^{(i)},\ A_{\beta}^{(i)},\ A_{\gamma}^{(i)},\ \ldots\ldots$$

математическія ожиданія величины

$$x_{k+i}$$

соотвѣтственно при

$$x_k=\alpha,\ x_k=\beta\ x_k=\gamma,\ \ldots .$$

При такихъ обозначеніяхъ не трудно установить слѣдующія равенства

$$a_k=p_\alpha^{(k)}\alpha+p_\beta^{(k)}\beta+p_\gamma^{(k)}\gamma+\ldots .$$

$$a_{k+i}=p_\alpha^{(k)}A_\alpha^{(i)}+p_\beta^{(k)}A_\beta^{(i)}+p_\gamma^{(k)}A_\gamma^{(i)}+\ldots$$

$$A_\alpha^{(i)}=p_{\alpha,\alpha}A_\alpha^{(i-1)}+p_{\alpha,\beta}A_\beta^{(i-1)}+p_{\alpha,\gamma}A_\gamma^{(i-1)}+\ldots$$

$$A_\beta^{(i)}=p_{\beta,\alpha}A_\alpha^{(i-1)}+p_{\beta,\beta}A_\beta^{(i-1)}+p_{\beta,\gamma}A_\gamma^{(i-1)}+\ldots .$$

. . . .

На основаніи этихъ равенствъ мы докажемъ, что всѣ величины

$$a_{k+i},\ A_\alpha^{(i)},\ A_\beta^{(i)},\ A_\gamma^{(i)},\ \ldots .,$$

при безпредѣльномъ возрастаніи числа i, приближаются къ одному предѣлу. Для этой цѣли прежде всего замѣтимъ, что въ силу приведенныхъ нами равенствъ число a_{k+i} лежитъ между наибольшимъ и наименьшимъ изъ чиселъ

$$A_\alpha^{(i)},\ A_\beta^{(i)},\ A_\gamma^{(i)},\ ;\ \ldots .,$$

а эти послѣднія числа всѣ заключаются между наибольшимъ и наименьшимъ изъ чиселъ

$$A_\alpha^{(i-1)},\ A_\beta^{(i-1)},\ A_\gamma^{(i-1)},\ \ldots .$$

Разсматривая затѣмъ разность

$$A_\alpha^{(i)}-A_\beta^{(i)},$$

на основаніи тѣхъ же формулъ получаемъ

$$A_\alpha^{(i)}-A_\beta^{(i)}=(p_{\alpha,\alpha}-p_{\beta,\alpha})A_\alpha^{(i-1)}+(p_{\alpha,\beta}-p_{\beta,\beta})A_\beta^{(i-1)}+\ldots\ldots$$

и такъ какъ сумма

$$(p_{\alpha,\alpha}-p_{\beta,\alpha})+(p_{\alpha,\beta}-p_{\beta,\beta})+\ldots.$$

равна нулю, то, отдѣляя въ системѣ

$$p_{\alpha,\alpha}-p_{\beta,\alpha},\ p_{\alpha,\beta}-p_{\beta,\beta},\ \ldots\ldots,$$

положительныя числа отъ отрицательныхъ и замѣняя послѣднія ихъ числовыми величинами, мы получимъ двѣ совокупности положительныхъ чиселъ, образующихъ одинаковыя суммы.

Важно замѣтить также, что эти суммы меньше единицы; ибо члены одной изъ нихъ меньше

$$p_{\alpha,\alpha},\ p_{\alpha,\beta},\ p_{\alpha,\gamma},\ \ldots$$

а члены другой меньше

$$p_{\beta,\alpha},\ p_{\beta,\beta},\ p_{\beta,\gamma},\ \ldots\ldots$$

По этому, замѣняя одни изъ чиселъ

$$A_\alpha^{(i-1)},\ A_\beta^{(i-1)},\ A_\gamma^{(i-1)},\ \ldots.$$

наибольшимъ, а другія наименьшимъ изъ нихъ и обозначая символомъ

$$\Delta^{(i-1)}$$

разность между наибольшимъ и наименьшимъ изъ нашихъ чиселъ

$$A_\alpha^{(i-1)},\ A_\beta^{(i-1)},\ A_\gamma^{(i-1)},\ \ldots\ldots,$$

мы можемъ установить неравенство

$$\text{числ. знач. }\left(A_\alpha^{(i)}-A_\beta^{(i)}\right)<h\Delta^{(i-1)},$$

гдѣ h равняется суммѣ всѣхъ положительныхъ чиселъ системы

$$p_{\alpha,\alpha}-p_{\beta,\alpha},\ p_{\alpha,\beta}-p_{\beta,\beta},\ \ldots.$$

и меньше единицы.

Совершенно подобное же заключеніе можно вывесть относительно разности любыхъ двухъ чиселъ системы

$$A_\alpha^{(i)},\ A_\beta^{(i)},\ A_\gamma^{(i)},\ \ldots\ldots$$

По этому, разсматривая вмѣсто

$$A_\alpha^{(i)} - A_\beta^{(i)}$$

разность $\Delta^{(i)}$ между наибольшимъ и наименьшимъ изъ чиселъ

$$A_\alpha^{(i)},\ A_\beta^{(i)},\ A_\gamma^{(i)},\ \ldots\ldots,$$

мы можемъ установить неравенство

$$\Delta^{(i)} < H\,\Delta^{(i-1)}$$

гдѣ H означаетъ нѣкоторое постоянное число, лежащее между 0 и 1.

Это неравенство показываетъ, что $\Delta^{(i)}$ приближается къ предѣлу нуль, когда i возрастаетъ безпредѣльно.

Слѣдовательно при безпредѣльномъ возрастаніи числа i всѣ количества

$$a_{k+i},\ A_\alpha^{(i)},\ A_\beta^{(i)},\ A_\gamma^{(i)},\ \ldots.$$

приближаются къ одному предѣлу, отъ котораго они отличаются на величину меньшую $\Delta^{(i)}$; вмѣстѣ съ тѣмъ имѣемъ

$$\Delta^{(i)} < C\,H^i,$$

гдѣ C и H числа постоянныя и

$$0 < H < 1.$$

Обращаясь затѣмъ къ математическому ожиданію квадрата

$$(x_1 - a_1 + x_2 - a_2 + \ldots + x_n - a_n)^2,$$

мы разложимъ этотъ квадратъ на такія же слагаемыя какъ и въ § 2, полагая

$$x_k - a_k = z_k.$$

И въ силу доказаннаго, разсуждая совершенно также какъ въ § 2, мы легко приходимъ къ неравенствамъ

мат. ожид. $z_k(z_1 + z_2 + \ldots + z_{k-1}) < D(H + H^2 + \ldots + H^{k-1})$

и

мат. ожид. $(x_1 - a_1 + x_2 - a_2 + \ldots + x_n - a_n)^2 < Gn$,

гдѣ D и G числа постоянныя.

Съ другой стороны, сравнивая математическое ожиданіе

$$(x_1 - a_1 + x_2 - a_2 + \ldots + x_n - a_n)^2$$

съ математическимъ ожиданіемъ

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n - na)^2,$$

гдѣ

$$a = \text{пред. } a_{k+i} \ (i = \infty),$$

находимъ, что разность математическихъ ожиданій этихъ квадратовъ равна

$$(a_1 - a + a_2 - a + \ldots + a_n - a)^2$$

и сохраняетъ конечное значеніе, при безпредѣльномъ возрастаніи числа n. Слѣдовательно при безпредѣльномъ возрастаніи числа n математическое ожиданіе квадрата

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} - a\right)^2$$

должно приближаться къ предѣлу нуль.

А отсюда тотчасъ вытекаетъ для даннаго случая законъ большихъ чиселъ: какъ бы малы ни были положительныя числа ε и η, вѣроятнотсь выполненія неравенствъ

$$-\varepsilon < \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} - a < \varepsilon$$

будетъ больше $1-\eta$ для всѣхъ достаточно большихъ значеній n.

Итакъ независимость величинъ не составляетъ необходимаго условія для существованія закона большихъ чиселъ.

25-го марта 1907 года

А. Марковъ.

Appendix III

执 着 耕 耘　　桃 李 芬 芳
-----祝贺侯振挺教授七十华诞

今年是侯振挺教授的七十华诞，我们衷心地祝愿我国著名的概率论专家侯振挺教授健康长寿。

侯振挺教授于 1936 年 3 月 1 日出生在河南省密县（现新密市）大隗镇纸房村的一个普通农家。1955 年秋，侯振挺教授考入唐山铁道学院（现西南交通大学）铁道工程系。由于经济困难，1956 年秋至 1957 年秋侯教授曾休学一年，在铁道部速成中学做数学教员。这一年，他不仅通过教学实践进一步熟练了初等数学的内容、方法和技巧，同时还自学了数学分析、线性代数、抽象代数等现代数学的基础课程。1958 年他转入学院新成立的数学力学系应用数学专业，师从黄克欧、郭可詹和苗邦均等教授。从此义无反顾地走上了数学学习和研究的道路，实现了多年的夙愿。1960 年大学毕业后，他被分配到长沙铁道学院任教。1962 年又回唐山铁道学院进修概率论，其间深入地学习了王梓坤教授的《随机过程论》油印讲义（当时尚未出版）和钟开莱教授的名著《Markov Chains with Stationary Transition Probabilities》。1963 年夏至 1964 年夏他在唐山铁道学院助勤，协助他的老师苗邦均教授主持概率专门化课程的教学,主要讲授概率论的极限理论。在此期间他还经常赴中科院运筹室和韩继业、徐光辉、董泽清、方开泰等人师从越民义教授研习排队论，打下了研究概率论的坚实基础。

1964 年回到长沙铁道学院后侯教授潜心于马尔可夫过程的研究，解决了齐次可列马尔可夫过程中的一系列重要理论问题，形成了自己的研究方法和风格，特别是成功地解决了马尔可夫过程构造论中的唯一性问题，建立了 Q 过程的唯一性准则。这项工作在国内外产生了很大的影响，他因此而获得 1978 年度国际戴维逊奖。1978 年英国皇家学会会员、戴维逊基金会主席 P·惠特尔写给中国科学院院长的信中对侯的成就给予非常高的评价。 全国 30 多家大报几乎同一天报道了侯教授的优秀事迹和成就。

1978 年全国科学大会在北京召开，侯振挺教授光荣地出席了这次盛会，并获得全国科学大会成果奖和个人奖。鉴于他在学术上的成就和影响，湖南省人民政府破格将他从助教直接提升为教授。他从这一年开始招收和培养研究生。1981 年，侯振挺教授由国务院批准为全国首批博士生导师。

80 年代中期开始，侯振挺教授和他的学生们对既含稳定态又含瞬时态的一般情形的 Q 矩阵问题进行长达十年的研究，取得一系列的成果。90 年代中期，侯教授开始研究马尔可夫决策过程，与博士生郭先平解决了此领域的一系列问题。近十年，侯教授及其学生刘再明、邹捷中又提出了一类新的随机过程——马尔可夫骨架过程，并奠定了这类过程的理论基础，大大地拓广了马尔可夫过程的研究和应用领域。

侯振挺教授现任湖南省科协名誉主席，中国工程概率学会名誉理事长，湖南省数学会名誉理事长，中南大学教授、博士生导师，中南大学铁道科技研究院副院长，中南大学数学学院名誉院长，中南大学数学学院概率统计研究所所长。曾先后担任第五、六、七、八届全国人大代表、中国数学会理事、中国科协委员、湖南省科协主席、长沙铁道学院副院长、中国概率统计学会常务理事、中国工程概率学会理事长、湖南省数学会理事长、国际权威期刊《Probability Theory and Related Fields》杂志编委、《数理统计与应用概率》杂志主编、《数学年刊》、《应用概率统计》等杂志编委、美国《数学评论》评论员。

侯振挺教授在概率论的科学研究和人才培养两方面倾尽心血，做出了重大的贡献。出版专著 11 部，在国内外发表学术论文 150 余篇；因其杰出的研究成果先后获得 1978 年国际戴维逊奖、1978 年湖南省科学大会奖、铁道部科学大会奖、全国科学大会奖、1981 年全国优秀科技图书奖、1982 年国家自然科学三等奖、1995 年全国优秀科技图书二等奖、1998 年湖南省科技进步一等奖、2001 年湖南省科技进步一等奖、2002 年湖南光召科技奖(湖南最高科技奖)等二十余次省部级以上奖励。

由于在教学、科研等方面做出了突出成就，侯振挺教授于 1978 年被评为全国科学大会先进工作者（全国劳动模范），1982 年被评为湖南省劳动模范、全国铁路劳动模范，1984 年被授予首批“国家级有突出贡献的科技专家”称号，1985 年被评为湖南省、铁道部优秀教师，1987 年被授予“湖南省优秀科技工作者”称号。

一、学术成就

（1）关于排队论

1.早在 1960 年（大学学习期间）侯教授就解决了著名学者巴尔姆和辛钦分别于 1943 和 1955 年提出的公开问题，该成果以论文《排队论中巴尔姆断言的证明》于 1961 年在《数学学报》发表（后由《中国科学》转载）。苏步青院士在《新中国数学工作的回顾》一文中将此成果列为排队论三项主要成果之一。

2.侯教授成功地将马氏骨架过程理论应用于排队论的研究。用补充变量方法可把任一排队过程化为二元特征（H，Q）易计算的马氏骨架过程，而后由向后方程得到瞬时分布。应用此方法解决了几十年来悬而未决的 GI/G/N 排队队长的瞬时分布难题。论文先后在《应用数学学报》英文版、Stochastic Analysis and Applications 等杂志上发表。

3、应用最近得到的 Doob 骨架过程的极限理论和马氏过程的各种遍历性理论，求出了众多排队过程的广义极限分布，极限分布、遍历性、Harris 遍历、几何遍历以及非一致遍历存在的条件。部分论文已在《Journal of Applied Probability》、《ANZIAM Journal》、《Mathematical Methods of Operations Research》等期刊发表。

（2）关于马尔可夫过程

40 多年来,侯教授对马尔可夫过程进行了深入的研究,成功地解决了可列马尔可夫过程中的一系列重要理论问题，其中一些成果目前仍然处于国际领先水平,为国际同行所公认。这些成果总结在专著《Homogeneous Denumerable Markov Processes》（Springer，1988）和专著《马尔可夫过程的 Q 矩阵问题》（湖南科技出版社，1994）中。

1. 侯教授发展了王梓坤院士提出的“极限过渡法”，首创了“最小非负解理论”。他证明了任一 Q 过程的样本函数都是一列一阶 Q 过程的极限，从而可把一般 Q 过程一些问题化为一阶 Q 过程的相应问题研究。而一阶 Q 过程由于其样本函数十分简单，利用最小非负解理论证明了这些过程的特征数字都是某一方程的最小非负解。因此“极限过渡法”和“最小非负解理论”为马尔可夫过程的研究提供了一个强有力的工具。

2. 1974 年发表在《中国科学》第 2 期上的论文《Q 过程唯一性准则》，解决了概率论数十年悬而未决的 Q 过程唯一性问题，这是一项国际领先的成果。1976 年，英国剑桥大学教授 Reuter 发表论文称“Q 过程唯一性准则”为“侯氏定理”。“Q 过程唯一性准则”是侯振挺教授最精彩的成果，在国内外受到高度的评价，并得到国内外学者的广泛引用，影响很大：

1) 该成果获 1978 年度国际戴维逊奖。戴维逊基金会主席 P・惠特尔给中国科学院院长的信(通知得奖)中写道:“…but were unsuccessful until this gifted young man began to publish on the subject. …his remarkable paper: 'The criterion for uniqueness of a Q-process' ⋯ has attached wide attention because of the complete and final character of the solution given there. We greatly esteem Hou's work.”

2) 1990 年，Martin Jacobsen 教授在美国《Mathematical Review》上评论侯的专著《Homogeneous Denumerable Markov Processes》时写道：“the stated conditions are sufficient was originally proved by Hou…It was this work that first drew international attention to the Chinese group. …And as far as the theory of *Q*-processes with only stable states is concerned, the book provides a

state-of-the-art overview”.

3) 1994 年，T. M. Liggett 教授在评论陈木法的一本专著时写道：“Two areas of probability theory to which Chinese probabilists have made substantial contributions over the years are continuous-time Markov chains and interacting particle systems. A major accomplishment in the first area was Z.T. Hou's solution in 1974 of a uniqueness problem for Q-processes.” (《Mathematical Review》)

4) 1991 年，Springer 出版了 W. J. Anderson 总结 30 年来马尔可夫链研究的主要成就的专著《Continuous-Time Markov Chains》将侯的“Q 过程唯一性准则”的成果作为一章收入该书。Yang Xiang-qun 的专著《The Construction Theory of Denumerable Markov Processes》（John Wiley & Sons,1990）、Wang Zikun and Yang Xiangqun 的专著《Birth and Death Processes and Markov Chains》（Springer,1992） 都收入了侯的“Q 过程唯一性准则”和相关定理并给出了证明。

5) 1979 年，苏步青院士在《新中国数学工作的回顾》中两处提到“Q 过程的唯一性准则”，并指出，建国三十年来，陈景润、杨乐、张广厚、侯振挺作出了第一流水平的成果。1988 年出版的《中国大百科全书》将“Q 过程的唯一性准则”收入数学卷中。

3.侯振挺教授解决了全稳定态情形的 Q 过程的定性理论，特别是给出了“既不满足柯氏向后方程也不满足柯氏向前方程的 Q 过程存在准则”，在《数学学报》和《数学年刊》上发表论文“齐次可列马尔可夫过程构造论中的定性理论”，全面发展了“Q 过程唯一性准则”的结果和方法。

4.侯教授和他的一批学生对 D. Williams 教授关于全瞬时态的工作做了严格的分析证明（这个问题十分困难和重要）；对于既含稳定态又含瞬时态的一般情形进行长达十年的研究，取得一系列的成果，使一般情形下的 Q 矩阵问题有了突破性的进展，并出版专著《马尔可夫过程的 Q 矩阵问题》。

（3）开辟新的研究领域——马尔可夫骨架过程

1997 年，侯教授等在国际上首次提出了马尔可夫骨架过程新概念，拓广了马尔可夫过程的研究和应用领域，并进行了一系列理论及应用研究,奠定了该类过程的理论基础， 2000 年出版专著《马尔可夫骨架过程——混杂系统模型》。近年来，侯教授和他的学生们又加强了其应用研究，特别是对排队论的应用已获成功。总结相关成果的英文版专著《Markov Skeleton Processes and Their Applications》已由科学出版社和 International Press 联合出版，得到国内外专家的高度评价，为众多随机过程的研究提供了系统的理论基础，具有广泛的应用前景和潜力，并将对这些领域产生有意义的重大影响。本书必将随着马尔可夫骨架过程的发展而成为该研究方向的具有原创性的基本著作。

二、人才培养

侯振挺教授不仅在数学研究上不断地进取、开拓，取得了一系列杰出成果，而且还特别注重人才的培养和数学在国民经济中的应用。1981 年他所领导的研究室成为国务院首批博士点，迄今已为国家培养了大批人才。其中，与严士健教授联合培养的博士毕业生陈木法已成为当今国际概率统计界知名的数学家，并于 2003 年当选中国科学院院士，博士生邹捷中的博士学位论文获得 1987 年度国际戴维逊奖，成为继侯教授以后我国第二次获得此奖的数学工作者。到目前为止，侯振挺教授共培养博士研究生 30 人， 硕士研究生 28 人。这些学生中大部分已成为所在单位的学科带头人或科研骨干，其中陈安岳、张汉君、张建康、何其美、孙加明、袁肖谨等人分别在英国、澳大利亚、加拿大、美国的大学或研究机构任职并成为骨干；陈学荣担任全国性券商湘财证券有限责任公司董事长。

在发现人才方面，侯振挺教授不拘一格，重能力、重水平。李慰萱原是宁波硫酸厂一个工人，只有高中学历，但很有才华，曾经参加华罗庚先生的小分队推广“优选法、统筹法”的活动，特别是在图论方面的工作已引起国内学者的注意，侯教授极力向单位推荐。1978 年 3 月李慰萱来到长沙铁道学院工作，协助侯教授从事研究生课程教学。由于工作出色，同年 8 月从工人直接晋升为副教授，后来李慰萱成为著名的图论和运筹学专家，在加拿大 Carleton 大学任教至去年退休。在训练学生方面，侯教授积累了丰富的经验。他反对死读书，主张要“站着读，而不是趴着。” 即要跳出书本，抓住直觉。费志凌因患小儿麻痹症左腿致残，1984 年高中毕业后未能继续升学，有人把他介绍给侯教授，侯教授收下了这位来自四川的求知若渴的年轻人，让他跟随自己的研究生一起听课。费志凌在学习期间一直成绩突出，并且和侯教授一道完成了英国著名概率论专家 D. Williams 关于全瞬时态 Q 矩阵判别的著名定理的纯分析证明，后来他考上中科院武汉地球物理研究所的硕士生，并在加拿大获博士学位。邹捷中是 1987 年度国际戴维逊奖获得者，虽然不曾有过大学学历，但他是省级重点中学长沙市一中的高材生。文革期间，他曾下放农村，但没有放弃学习，自修了大学数学和机械方面的课程，1979 年报考侯教授的研究生。尽管他不是大学毕业生，侯教授还是录取了他，后来邹捷中在 P-函数的研究等方面取得了突出成绩。何其美只有初中学历，1982 年参加高考成绩优秀，但由于当时“左”的影响尚未肃清而未被录取。何其美酷爱数学并且在数学研究方面初露端倪，他解答了 1982 年国际数学奥林匹克难题而引起了侯教授和省内一批知名数学教授的注意，侯教授与当时湖南省数学会理事长、国防科技大学副校长孙本旺教授奔走呼吁，终于在开学几个月后

由长沙铁道学院录取何其美入学。在大学期间，何其美在图的连通度方面作了很好的工作，毕业后考入侯教授门下，且在一年多时间就完成了硕士生课程学习和论文答辩。诸如此类的故事还有许多，一直被传为佳话。

三、学术交流

侯振挺教授十分注重国际交流，应邀出国访问讲学 10 多次。1999 年 8 月，在他的倡导和组织下，与澳大利亚南澳大学联合在长沙主办了“马氏过程与受控马氏链”国际会议。来自美、日、澳、英、意、德、荷、加、墨、瑞士和香港地区的 40 余位代表和国内的 110 余位代表出席了这次会议。国际概率界泰斗、美国科学院院士康奈尔大学 E. Dynkin 教授，概率论大师、日本京都大学 S. Watanabe 教授, 国际著名专家、墨西哥 O. Hernandez-Lerma 教授、瑞士 A. Harrie 教授、加拿大科学院院士 S. Sethi 教授等亲临大会并分别作了大会报告。会议结束时，IPC 成员共同签署了一份会议纪要。其中写道：“本次会议云集了世界各地相关领域的知名学者，取得了很大的成功。正是长沙铁道学院侯振挺教授及他的概率论学派的国际声望吸引了如此多的专家学者于 1999 年到长沙相聚。毫无疑问，参加本次会议的代表愿意在不久的将来再次返回长沙举行下一次会议，讨论由本次会议产生的成果，并再续这次建立起来的友谊。”

2003 年 12 月 9 日-2003 年 12 月 16 日, 在侯振挺教授的组织下，马氏骨架过程及排队论高级研讨班暨学术会议在中南大学铁道校区隆重举行。来自全国 13 个高校的研讨班学员代表和我校概率统计专业硕士生、博士生共 70 余人。一些国内外知名的概率论、排队论专家、学者担任本次研讨班主讲人或做学术报告，其中有我校客座教授、概率统计所海外所长美国西北大学数学系 Elton P. Hsu(徐佩) 教授，加拿大 Carleton 大学数学与统计系赵以强教授，中国科学院院士、北京师范大学数学系陈木法教授，南开大学数学学院院长王永进教授，上海大学史定华教授、中山大学郭先平教授、河北工业大学理学院院长刘国欣教授等。

为纪念 A.A. Markov 诞生 150 周年暨马尔可夫过程提出 100 周年，交流国内外马尔可夫过程与相关领域的重要进展，探索未来理论及应用研究的发展趋势， 在侯振挺教授的倡导下，中南大学、北京师范大学将于 2006 年 8 月 21 日－8 月 25 日在中南大学联合举办“马氏过程及相关论题”国际学术研讨会。会议议题主要包括：马尔可夫过程、随机分析、金融数学、马尔可夫骨架过程、排队论、交互粒子系统、测度值随机过程。届时，国内外著名的概率论专家学者将会应邀来到长沙，共同探讨学术上的前沿问题。

代表性论文

[1] 侯振挺，排队论中的巴尔姆断言的证明，数学学报，(2)(1960)，166-169；

[2] Hou Zhenting， On a problem of Palm in the theory of queueing processes, Scientia Sinica，XII(8)(1963),1105-1109；

[3] 侯振挺，齐次可列马尔可夫过程中的概率—分析法，科学通报，(3)(1973)，115-118；

[4] 侯振挺，Q 过程的唯一性准则，科学通报，19(1)(1974)，19-20；

[5] 侯振挺，Q 过程的唯一性准则，中国科学，(2)(1974)，115-130；

[6] Hou Zhenting， The criterion for uniqueness of a Q-process，Scientia Sinica，XVII(2)(1974)，141-159；

[7] 侯振挺，齐次可列马尔可夫过程的样本函数的构造，中国科学，(3)(1975)，259-266;

[8] 侯振挺，齐次可列马尔可夫过程构造论，科学通报，(3)(1975)，130；

[9] 侯振挺，郭青峰，齐次可列马尔可夫过程构造论中的定性理论，数学学报，19(4)(1976)，239-262；

[10] 侯振挺，汪培庄，概率流的分解定理，数学年刊，1(1)(1980)，139-147；

[11] Hou Zhenting， Chen Mufa， Markov processes and field theory， Chinese Science Bulletin，25(10)(1980)，807-811;

[12] Hou Zhenting，Closure of renewal sequences for circle-operation， Scientia Sinica(Series A)，XXV(8)(1982)，816-824；

[13] 侯振挺，郭青峰，齐次可列马尔可夫过程构造论的定性理论（II）(A 辑)，数学年刊，4 (3)(1983)，345-348；

[14] 侯振挺， On A Conjecture of Kendall， D.G. Stochastic Processes and their Applications, 21(1)(1985)，67-68；

[15] 侯振挺，费志凌，关于 Q-矩阵问题的一个 Williams 定理的分析证明（待续），数理统计与应用概率，5(2)(1990)，230-242；

[16] 侯振挺，费志凌，关于 Q-矩阵问题的一个 Williams 定理的分析证明(续完)，数理统计与应用概率，5(3)(1990)，318-335;

[17] Hou Zhenting，Q-matrix problem，Probability and its Application in China, Contemporary Mathematics, 118(1991), American Mathematical Society, 127-148;

[18] Liu Zaiming and Hou Zhenting， Birth-and-death Q-matrix problem with instantaneous states，Chinese Science Bulletin，38(13)(1993)，1063-1066;

[19] 刘再明，侯振挺，含瞬时态生灭 Q 矩阵问题，科学通报，38(7)(1993)，577-579;

[20] 刘再明，侯振挺，生灭 Q-矩阵，数学学报，37(5)(1994)，709-717;

[21] Hou Zhenting， Liu Zaiming， Zou Jiezhong， QNQL processes: (H，Q)-processes and their applications，Chinese Science Bulletin，42(11)(1997)，881-886;

[22] 侯振挺，郭先平，非齐次马氏决策过程的齐次化，数学物理学报，17(4)(1997)，432-438;

[23] Hou Zhenting, Liu Zaiming, Zou Jiezhong， Markov skeleton processes，

Chinese Science Bulletin，43(11)(1998)，881-889;
[24] 李俊平，侯振挺，SG(2，3)上的布朗运动的唯一性，应用概率统计，15(1)(1999)，28-34;
[25] 郭先平，侯振挺，非平稳 MDP 的期望平均准则，系统科学与数学，19(1)(1999)，123-128；
[26] 李俊平，侯振挺，SG(N，3)上的调和分析，数学物理学报（A 辑），20(4)(2000)，528-539;
[27] 侯振挺，刘再明，数学生态学随机模型，生物数学学报，15(3)(2000)，301-307；
[28] 李俊平，侯振挺，Markov 骨架过程积分型泛函的分布和矩及其应用举例，应用数学学报，24(2)(2001)，277-283;
[29] Hou Zhenting, Liu Zaiming, et al, Markov skeleton processes, in Markov Processes and Controlled Markov Chains, Zhenting Hou, Jerzy Filar and Anyue Chen(Eds), Kluwer Academic Publishers, 2002；
[30] Hou Zhenting, Markov skeleton processes and application to queueing systems, Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, 18(40)(2002) pp. 537-552;
[31] 李俊平，侯振挺，Sierpinski Gasket 上布朗运动的维数性质，系统科学与数学，23(4)(2003)，542-549；
[32] Zhenting Hou, et al, Transient Distribution of the Length of GI/G/N Queueing Systems, Stochastic Analysis and Applications, 21(3)(2003), 567–592
[33] Zhenting Hou and Yuanyuan Liu, Explicit criteria for several types of ergodicity of the embedded M/G/1 and GI/M/n queues, J. Appl. Probab. 41(3)(2004), 778–790；
[34] Zhenting Hou, Jiaowan Luo and Peng Shi, Stochastic stability of linear systems with semi-Markovian jump parameters, ANZIAM J. 46(2005), 331-340;
[35] Zhenting Hou, Zheng Yu, Peng Shi，Study on a class of nonlinear time series models and ergodicity in random environment domain, Mathematical Methods of Operations Research, 61(2)(2005), 299-310;
[36] Zhenting Hou, Yuanyuan Liu and Hanjun Zhang, Subgeometric rates of convergence for a class of continuous-time Markov processes, J. Appl. Probab. 42(3)(2005) , 698-712.
[37] Hou Zhenting and Li Xiaohua, Ergodicity of quasi-birth and death processes (II), Chinese Journal of Contemporary Mathematics, 26(2) (2005), 145-156
[38] Yuanyuan Liu, Zhenting Hou, Several types of ergodicity for M/G/1-type Markov chains and Markov processes, J. Appl. Probab, 43(1), 2006,141-158

学术专著

[1] 侯振挺，郭青峰，《齐次可列马尔可夫过程》，科学出版社，1978，北京;
[2] 钱敏，侯振挺，《可逆马尔可夫过程》，湖南科学技术出版社，1979，长沙;
[3] 侯振挺，《Q 过程的唯一性准则》，湖南科学技术出版社，1982，长沙;

[4] 侯振挺，郭青峰，Homogeneous Denumerable Markov Processes，Springer-Verlag 出版公司，科学出版社，1988，德国;
[5] 侯振挺，邹捷中，张汉君，刘再明，肖果能，陈安岳，费志凌，《马尔可夫过程的 Q 矩阵问题》，湖南科学技术出版社，1994，长沙;
[6] 侯振挺，郭先平，《马尔可夫决策过程》，湖南科学技术出版社，1998，长沙;
[7] 侯振挺，刘再明，张汉君，李俊平，邹捷中，袁成桂，《生灭过程》，湖南科学技术出版社，2000，长沙;
[8] 刘国欣，侯振挺，邹捷中，《逐段决定马尔可夫骨架过程》，湖南科学技术出版社，2000，长沙;
[9] 侯振挺，刘万荣，刘再明，刘国欣，邹捷中，李俊平，袁成桂，《马尔可夫骨架过程——混杂系统模型》，湖南科学技术出版社，2000，长沙；
[10] Hou Zhenting, Jerzy Filar, Anyue Chen, Markov Processes and Controlled Markov Chains, (Ed.) Kluwer Academic Publishers, 2002, The Netherlands.
[11] Zhenting Hou and Guoxin Liu, Markov Skeleton Processes and Their Applications, Science Press & International Press, 2005

中南大学数学科学与计算技术学院

二零零六年八月