数 学 年 刊
1 (3, 4) 1980

抽象空间中的可逆马尔可夫过程

陈 木 法
(北京师范大学)

§1. 引 言

马尔可夫过程中的可逆性概念来源于统计物理，它刻划了某种微观可逆性，即所谓“细致平衡”. Spitzer[11] 等人讨论了有限状态情况的可逆性. 对于可列状态情形，近两年来，国内已有一系列工作，而且大部分工作已汇集成册出版[1-4].

毫无疑问，非可列状态空间马尔可夫过程的可逆性问题是很值得研究的. Liggett[12] 等注意到形如 $\{0, 1\}^S$(S 为可列集)的状态空间，它是非可列的. 对于 Dirichlet 空间，Sitverstein 做了不少工作[15]，然而，一般状态空间中的可逆过程(特别是可逆 q-过程)则未曾触及. 而这正是本文的目标. 应当指出，状态空间的抽象化，使得有关概念、结果以及论证方法都与可列情形有着很大区别，虽然可列情形的一些精细结果失去了意义，但可列情形的大多数结果在抽象空间中依然保留，这是令人满意的.

在本文中，我们证明了平稳 q 过程的可逆性等价于转移函数的可逆性；我们给出了转移函数和 q 函数对可逆性的各种等价形式；证明了对于可逆 q 过程，柯氏向前方程关于可逆测度 μ 几乎成立(柯氏向后微分方程总成立)；我们研究了最小 q 过程的可逆性；建立了可逆 q 过程的唯一性准则和不断可逆 q 过程的存在准则.

§2. 可逆马尔可夫过程

记 $\mathbf{R}=(-\infty, +\infty)$, $\overline{\mathbf{R}}=[-\infty, +\infty]$, $\mathbf{T}=[0, \infty)$.

$\mathbf{R}$ 的 Borel 子集所构成的 σ-域记作 $\mathscr{B}$, $\overline{\mathbf{R}}$ 的 Borel 子集所构成的 σ-域记作 $\overline{\mathscr{B}}$.

设$(\Omega, \mathscr{F})$和$(E, \mathscr{E})$是任意的两个可测空间. 我们用 $f\in\mathscr{F}/\mathscr{E}$ 表示从$(\Omega, \mathscr{F})$到$(E, \mathscr{E})$的可测映射. 如果$(E, \mathscr{E})=(\overline{\mathbf{R}}, \overline{\mathscr{B}})$，则简记成 $f\in\mathscr{F}$. 如果 f 还是有限(有界)的，则记作 $f\in r\mathscr{F}$ ($f\in b\mathscr{F}$). 若 f 非负 $\mathscr{F}$ 可测，就记成 $f\in\mathscr{F}_+$.

如无特别声明，恒设$(E, \mathscr{E})$为一个任意给定的抽象可测空间，$\mathscr{E}$ 包含一切单点集.

定义 2.1 称 $P_t(x, A)$ ($t\geqslant 0$, $x\in E$, $A\in\mathscr{E}$)是$(E, \mathscr{E})$上的(时齐)转移函数，倘若

(i) 对于每一个固定的 t 和 x, $A\mapsto P_t(x, A)$是 $\mathscr{E}$ 上的有限测度，而且 $P_t(x, E)\leqslant 1$;

(ii) 对于每一个固定的 t 和 A, $x\mapsto P_t(x, A)$是 $\mathscr{E}$ 可测函数；

(iii) 对于每一个 t 和 s, 每一个 $A\in\mathscr{E}$, 下述 K-C 方程

本文 1979 年 10 月 20 日收到.

$$P_{t+s}(x, A)=\int P_t(x, dy)P_s(y, A) \tag{2.1}$$

成立,

(iv) 标准性. 对于每一个 $x\in E$ 和 $A\in\mathscr{E}$,

$$\lim_{t\to 0^+} P_t(x, A)=P_0(x, A)=I_A(x), \tag{2.2}$$

称 $P_t(x, A)$ 是诚实(不断)的,如果

$$P_t(x, E)=1, \quad (\forall t\geqslant 0, \forall x\in E). \tag{2.3}$$

今设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是一个完备概率空间, $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in T}$ 是 $\mathscr{F}$ 的子 σ-域的上升族, 定义在 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上、取值于 $(E, \mathscr{E})$ 中的随机过程 $(X_t)_{t\in T}$ 称为 $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in T}$ 适应的, 如果 $\forall t\in T$, $X_t\in\mathscr{F}_t$. 在没有具体指明 $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in T}$ 时, 约定 $\mathscr{F}_t=\sigma(X_s, s\leqslant t)$.

定义 2.2 设 $X=(X_t)_{t\in T}$ 是定义在 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上, 取值于 $(E, \mathscr{E})$ 并适应于 $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in T}$ 的随机过程. 又设 $P_t(x, A)$ $(t\geqslant 0, x\in E, A\in\mathscr{E})$ 是 $(E, \mathscr{E})$ 上的转移函数, μ 为 $(E, \mathscr{E})$ 上的一个概率测度. 称 X 是关于 $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in T}$ 具有初始分布 μ 和转移函数 $P_t(x, A)$ 的马尔可夫过程, 倘若

(i) $$\mu(A)=P[X_0\in A], \quad (\forall A\in\mathscr{E}). \tag{2.4}$$

(ii) $$E(f\circ X_{t+s}|\mathscr{F}_t)=P_s(X_t, f), \quad (t, s\geqslant 0, f\in b\mathscr{E}) \tag{2.5}$$

其中

$$P_t(x, f)\triangleq P_tf(x)\triangleq\int P_t(x, dy)f(y). \tag{2.6}$$

定义 2.3 称马尔可夫过程 $X=(X_t)_{t\in T}$ 是可逆的, 如果对于任意的 $0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_n$ 和任意的 $A_1, A_2, \cdots, A_n\in\mathscr{E}$, 只要

$$t_n-t_{n-1}=t_2-t_1, \quad t_{n-1}-t_{n-2}=t_3-t_2, \cdots. \tag{2.7}$$

就有

$$\begin{aligned} &P[X_{t_1}\in A_1, X_{t_2}\in A_2, \cdots, X_{t_n}\in A_n] \\ &=P[X_{t_1}\in A_n, X_{t_2}\in A_{n-1}, \cdots, X_{t_n}\in A_1]. \end{aligned} \tag{2.8}$$

定理 2.1 过程 $X=(X_t)_{t\in T}$ 可逆的充要条件是: 对于每一个 $n\geqslant 1$, 每一组满足(2.7)的 $\{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$, 每一个 $f\in b\mathscr{E}^n$ $(\mathscr{E}^n=\mathscr{E}\times\mathscr{E}\times\cdots\times\mathscr{E}$ (n 重)), 都有

$$E[f(X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_n})]=E[f(X_{t_n}, X_{t_{n-1}}, \cdots, X_{t_1})]. \tag{2.9}$$

证 由定义 2.3 及单调类定理(见[9; 第 0 章])立得本定理.

注 定义 2.3 和定理 2.1 并不需要转移函数. 但若 $X=(X_t)_{t\in T}$ 可逆, 并有初始分布 μ 和不断的转移函数 $P_t(x, A)$, 则从定义 2.3 可见,

$$\int_A \mu(dx)P_t(x, B)=\int_B \mu(dx)P_t(x, A) \quad (\forall A、B\in\mathscr{E}, \forall t\geqslant 0).$$

定义 2.4 称转移函数 $P_t(x, A)$ $(t\geqslant 0, x\in E, A\in\mathscr{E})$ 是可逆的, 如果存在 $(E, \mathscr{E})$ 上的一个概率测度 μ, 使得

$$\int_A \mu(dx)P_t(x, B)=\int_B \mu(dx)P_t(x, A), \quad (\forall A, B\in\mathscr{E}, \forall t\geqslant 0). \tag{2.10}$$

当条件(2.10)满足时, 称 μ 为 $P_t(x, A)$ 的可逆(概率)测度.

注 当 E 为可列集时, 条件(2.10)化成

$$\mu_i p_{ij}(t)=\mu_j p_{ji}(t), \quad (\forall i, j\in E, \forall t\geqslant 0).$$

但这里的定义与可列状态空间情形的定义[4]不同. 那里在定义可配称时要求 $\mu_i>0$ $(\forall i\in E)$, 而在定义可逆时还要求 $p_{ij}(t)$ 是遍历的.

定理 2.2　设 $\mathscr{D}$ 是一个 π 一系, $\sigma(\mathscr{D})=\mathscr{E}$, 并且存在 $\{B_n\}\subset\mathscr{D}$, 使 $B_n\uparrow E$, 则 $(E,\mathscr{E})$ 上的概率测度 μ 为转移函数 $P_t(x, A)(t\geqslant 0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})$ 的可逆测度的充要条件是

$$\int_A \mu(dx)P_t(x, B)=\int_B \mu(dx)P_t(x, A), \quad (\forall A、B\in\mathscr{D},\ \forall t\geqslant 0). \tag{2.11}$$

证　任意固定 $A\in\mathscr{D}$, 并令

$$\mathscr{D}_A=\{B\in\mathscr{E}: (2.11)\text{式对 } A、B \text{ 成立}\}$$

易证 $\mathscr{D}_A$ 是一个 d 一系. 但 $\mathscr{D}_A\supset\mathscr{D}$, 因而 $\mathscr{D}_A=\mathscr{E}$.

再对于任意固定的 $A\in\mathscr{E}$, 令

$$\mathscr{D}'_A=\{B\in\mathscr{E}: (2.11)\text{式对于 } A、B \text{ 成立}\}.$$

同样可证 $\mathscr{D}'_A$ 是一个 d 一系. 并且由前段所证知 $\mathscr{D}'_A\supset\mathscr{D}$. 故 $\mathscr{D}'_A=\mathscr{E}$. 由于 A 任意, 故定理成立.

定理 2.3　下述断言等价

(i) $P_t(x, A)(t\geqslant 0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})$ 关于 μ 可逆;

(ii) 对于 $\forall A、B\in\mathscr{E}$, $\forall f\in b\mathscr{E}$(或 $f\in\mathscr{E}_+$), 有

$$\int \mu(dx)f(x)P_t(x, B)=\int_B \mu(dx)\int P_t(x, dy)f(y), \quad (\forall t\geqslant 0); \tag{2.12}$$

(iii) 对于 $\forall f,\ g\in b\mathscr{E}$(或 $\mathscr{E}_+$),

$$\int f(x)P_tg(x)\mu(dx)=\int g(x)P_tf(x)\mu(dx), \quad (\forall t\geqslant 0), \tag{2.13}$$

其中 $P_tf(x)$ 见(2.6).

证　使用单调类定理易证(i)⇒(ii)⇒(iii). (iii)⇒(i)则是显然的.

定理 2.4　如果 $(E, \mathscr{E})$ 是距离可测空间[10], 则 $P_t(x, A)(t\geqslant 0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})$ 可逆的充要条件是: 存在 $(E, \mathscr{E})$ 上的概率测度 μ, 使得对于一切 $f,\ g\in b\mathscr{C}$, 有

$$\int f(x)P_tg(x)\mu(dx)=\int g(x)P_tf(x)\mu(dx), \quad (\forall t\geqslant 0), \tag{2.14}$$

其中 $b\mathscr{C}$ 表 $(E, \mathscr{E})$ 上有界连续函数的全体.

证　由[10; 附篇引理 8]知, 这里的条件等价于定理 2.3 中的条件(iii). 故由定理 2.3 知, 本定理成立.

定义 2.5　称马氏过程 $X=(X_t)_{t\in\mathbf{T}}$ 是平稳的, 如果存在 $(E, \mathscr{E})$ 上的概率测度 μ, 使得对于任意有限个 $t_1, t_2, \cdots, t_n\in\mathbf{T}$ 和任意的 $A_1, A_2, \cdots, A_n\in\mathscr{E}$, 有

$$\begin{aligned}&P[X_{t_1}\in A_1,\ X_{t_2}\in A_2,\ \cdots,\ X_{t_n}\in A_n]\\&=P[X_{t_1+s}\in A_1,\ X_{t_2+s}\in A_2,\ \cdots,\ X_{t_n+s}\in A_n] \quad (\forall s\geqslant 0).\end{aligned} \tag{2.15}$$

定理 2.5　设 $X=(X_t)_{t\in\mathbf{T}}$ 是一个平稳马氏过程, 它有诚实的转移函数 $P_t(x, A)$ $(t\geqslant 0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})$, 则过程 X 可逆等价于它的转移函数可逆.

证　首先, 由[9; 第一章(2.8)式]知, 对于任何的 $0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_n$, 任何的 $f\in b\mathscr{E}^n$, 有

$$\begin{aligned}&E[f(X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_n})]\\&=\int\mu(dx_1)\int P_{t_2-t_1}(x_1, dx_2)\int\cdots\int P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n)\cdot f(x_1, x_2, \cdots, x_n).\end{aligned} \tag{2.16}$$

由此可见，若 $X=(X_t)_{t\in T}$ 可逆，则

$$P[X_0\in A,\ X_t\in B]=P[X_0\in B,\ X_t\in A]. \tag{2.17}$$

即

$$\int_A \mu(dx)P_t(x,\ B)=\int_B \mu(dx)P_t(x,\ A). \tag{2.18}$$

必要性成立．今证充分性．设 $P_t(x,\ A)$ 可逆，则由定理 2.3 知 (2.13) 成立．今设 $(t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n)$ 满足 (2.7)，并记

$$g_n(x_1)=\int f_{n-1}(x_2)P_{t_2-t_1}(x_1,\ dx_2)\int f_{n-2}(x_3)P_{t_3-t_2}(x_2,\ dx_3)$$
$$\int\cdots\int f_1(x_n)P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},\ dx_n). \tag{2.19}$$

其中

$$f_i\in b\mathscr{E},\quad (1\leqslant i\leqslant n). \tag{2.20}$$

则

$$g_n(x_1)=P_{t_2-t_1}(f_{n-1}(\cdot)g_{n-1}(\cdot))(x_1). \tag{2.21}$$

反复使用 (2.13) 和 (2.21)，我们得到

$$\begin{aligned}
&E[f_n(X_{t_1})f_{n-1}(X_{t_2})\cdots f_1(X_{t_n})]\\
&=\int f_n(x_1)\mu(dx_1)\int f_{n-1}(x_2)P_{t_2-t_1}(x_1,\ dx_2)\int\cdots\int f_1(x_n)P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},\ dx_n)\\
&=\int f_n(x_1)\mu(dx_1)\int f_{n-1}(x_2)P_{t_2-t_1}(x_1,\ dx_2)g_{n-1}(x_2)\\
&=\int f_n(x_1)P_{t_2-t_1}(f_{n-1}(\cdot)g_{n-1}(\cdot))(x_1)\mu(dx_1)\\
&=\int (f_{n-1}(x_2)g_{n-1}(x_2))(P_{t_2-t_1}f_n(\cdot))(x_2)\mu(dx_2)\\
&=\int \mu(dx_2)f_{n-1}(x_2)\int f_n(y_n)P_{t_n-t_{n-1}}(x_2,\ dy_n)g_{n-1}(x_2)\\
&=\int \mu(dx_2)\Big(f_{n-1}(x_2)\int f_n(y_n)P_{t_n-t_{n-1}}(x_2,\ dy_n)\Big)\cdot(P_{t_3-t_2}(f_{n-2}(\cdot)g_{n-2}(\cdot)))(x_2)\\
&=\int \mu(dx_3)f_{n-2}(x_3)g_{n-2}(x_3)\Big(P_{t_3-t_2}\Big(f_{n-1}(\cdot)\int f_n(y_n)\cdot P_{t_n-t_{n-1}}(\cdot,\ dy_n)\Big)\Big)(x_3)\\
&=\cdots=\int f_1(y_1)\mu(dy_1)\int f_2(y_2)P_{t_2-t_1}(y_1,\ dy_2)\int\cdots\int f_n(y_n)P_{t_n-t_{n-1}}(y_{n-1},\ dy_n)\\
&=E[f_1(X_{t_1})f_2(X_{t_2})\cdots f_n(X_{t_n})].
\end{aligned} \tag{2.22}$$

特别，取 $f_i=I_{A_i}(1\leqslant i\leqslant n)$，便得 (2.8)． 证毕．

定理 2.5 的意义在于，它把平稳马氏过程的可逆性化为它的转移函数的可逆性．以后，我们把具有同样转移函数的马氏过程视为同一的．因此，我们也直接称转移函数 $P_t(x,\ A)\ (t\geqslant 0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})$ 为马尔可夫过程．

§3. 可逆 q 过程

Kendall. D. G. 在[5]中证明了：对于任何一个马尔可夫过程 $P_t(x,\ A)$ 来说，下列两极限存在

$$\lim_{t\to0^+}\frac{1-P_t(x,\ \{x\})}{t}=q(x),\quad (x\in E),\tag{3.1}$$

$$\lim_{t\to0^+}\frac{P_t(x,\ A)}{t}=q(x,\ A),\quad (x\in E\backslash A,\ A\in\mathscr{R}).\tag{3.2}$$

而且

$$0\leqslant q(x)\leqslant+\infty,\quad 0\leqslant q(x,\ A)<+\infty.\tag{3.3}$$

其中

$$\mathscr{R}=\{A:\ A\in\mathscr{E},\ \lim_{t\to0^+}\sup_{x\in A}(1-P_t(x,\ \{x\}))=0\}\tag{3.4}$$

为方便，我们命

$$q(x,\ A)=q(x,\ A\backslash\{x\}).\tag{3.5}$$

这样，$q(x,\ A)$ 对于一切 $x\in E$ 和 $A\in\mathscr{R}$ 都有定义．在[10]中还证明了：在某些条件下，对于任何 $x\in E$, $A\in\mathscr{E}$，恒有

$$\lim_{t\to0^+}\frac{P_t(x,\ A)}{t}=q(x,\ A),\quad (x\notin A).\tag{3.6}$$

而且对于固定的 x, $q(x,\ \cdot)$ 是 $\mathscr{E}$ 上的有限测度；对于固定的 A, $q(\cdot,\ A)$ 是 $\mathscr{E}$ 可测函数.

在实际中，先知道的往往不是过程 $P_t(x,\ A)$ 本身，而是它的 q 函数对 $q(x)-q(x,\ A)$，因此，研究对于什么样的 $q(x)-q(x,\ A)$，存在过程 $P_t(x,\ A)$ 以之为 q 函数对；如果存在，何时唯一？何时可逆？这些问题就格外重要.

定义 3.1　称 $q(x)-q(x,\ A)$ $(x\in E,\ A\in\mathscr{E})$ 为 q 函数对，如果

（i）对于固定的 $A\in\mathscr{E}$, $q(\cdot)$, $q(\cdot,\ A)\in r\mathscr{E}_+$;

（ii）对于固定的 x, $q(x,\ \cdot)$ 是 $\mathscr{E}$ 上的有限测度，且

$$q(x,\ E)\leqslant q(x),\quad q(x,\ \{x\})=0,\quad (\forall x\in E).\tag{3.7}$$

若还有

$$q(x,\ E)=q(x),\quad (\forall x\in E).\tag{3.8}$$

则称 q 函数对 $q(x)-q(x,\ A)$ 是保守的.

定义 3.2　称转移函数 $P_t(x,\ A)$ $(t\geqslant0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})$ 是一个 q 过程，如果

$$\lim_{t\to0^+}\frac{P_t(x,\ A)-P_0(x,\ A)}{t}=q(x,\ A)-I_A(x)q(x),\quad (\forall x\in E,\ \forall A\in\mathscr{E}).\tag{3.9}$$

若还有

$$P_t(x,\ E)=1,\quad (\forall t\geqslant0,\ \forall x\in E).\tag{3.10}$$

则称 q 过程 $P_t(x,\ A)$ 是诚实(不断)的.

命题 3.1　如果，q 过程 $P_t(x,\ A)$ 关于 μ 可逆，则我们有

$$\int_A\mu(dx)q(x,\ B)=\int_B\mu(dx)q(x,\ A),\quad (\forall A,\ B\in\mathscr{E}).\tag{3.11}$$

证　由于 $P_t(x,\ A)$ 关于 μ 可逆，故有

$$\int_A\mu(dx)P_t(x,\ B)=\int_B\mu(dx)P_t(x,\ A),\quad (\forall A,\ B\in\mathscr{E},\ \forall t\geqslant0).\tag{3.12}$$

熟知[5]

$$P_t(x,\ \{x\})\geqslant e^{-q(x)t},\quad (\forall x\in E,\ \forall t\geqslant0).\tag{3.13}$$

因而

$$\frac{1-P_t(x,\ \{x\})}{t}\leqslant q(x),\quad (\forall x\in E,\ \forall t>0).\tag{3.14}$$

于是

$$\frac{P_t(x,B)}{t}\leqslant\frac{P_t(x,E\backslash\{x\})}{t}\leqslant\frac{1-P_t(x,\{x\})}{t}\leqslant q(x)\quad(\forall x\notin B,\ \forall t>0).\tag{3.15}$$

下面分三种情况讨论

(i) $A\cap B=\emptyset$.

记 $G_n=[x:q(x)\leqslant n]$，则 $G_n\uparrow E$，由(3.12)和(3.15)知

$$\int_A\mu(dx)q(x,B)=\lim_{n\to\infty}\int_{A\cap G_n}\mu(dx)q(x,B\cap G_n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\lim_{t\to0^+}\int_{A\cap G_n}\frac{P_t(x,B\cap G_n)}{t}\mu(dx)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\lim_{t\to0^+}\int_{B\cap G_n}\frac{P_t(x,A\cap G_n)}{t}\mu(dx)=\int_B\mu(dx)q(x,A).$$

(ii) $A\supset B$.

应用(i)，得

$$\int_A\mu(dx)q(x,B)=\int_B\mu(dx)q(x,B)+\int_{A\backslash B}\mu(dx)q(x,B)$$

$$=\int_B\mu(dx)q(x,B)+\int_B\mu(dx)q(x,A\backslash B)$$

$$=\int_B\mu(dx)q(x,A).$$

(iii) 一般情形．使用(i)和(ii)得

$$\int_A\mu(dx)q(x,B)=\int_A\mu(dx)q(x,AB)+\int_A\mu(dx)q(x,B\backslash A)$$

$$=\int_{AB}\mu(dx)q(x,A)+\int_{B\backslash A}\mu(dx)q(x,A)$$

$$=\int_B\mu(dx)q(x,A).\tag{3.16}$$

证毕.

由命题 3.1，我们可以引进如下的

定义 3.3 称 q 函数对 $q(x)-q(x,A)$ 是可逆的，如果存在 $\mathscr{E}$ 上的概率测度 μ，使得

$$\int_A\mu(dx)q(x,B)=\int_B\mu(dx)q(x,A),\quad(\forall A,\ B\in\mathscr{E}).\tag{3.17}$$

此时称 μ 为 $q(x)-q(x,A)$ 的可逆测度．

注 q 函数对 $q(x)-q(x,A)$ 的可逆性并不依赖于 $q(x)$．因此，有时我们就说 $q(x,A)$ 是可逆的，而不提及 $q(x)$.

在以下定理中，"μ 可积"条件可稍为放宽，但为简洁起见，我们将不这样做．

定理 3.1 设 $\mathscr{D}$ 是一个 π 一系，$\sigma(\mathscr{D})=\mathscr{E}$，并且存在 $\{B_n\}\subset\mathscr{D}$，使 $B_n\uparrow E$．又设 $q(x,E)$ 是 μ 可积的，则概率测度 μ 为 $q(x,A)$ 的可逆测度的充要条件是

$$\int_A\mu(dx)q(x,B)=\int_B\mu(dx)q(x,A)\quad(\forall A,\ B\in\mathscr{D})\tag{3.18}$$

定理 3.2 设 $q(x,E)$ 是 μ 可积的，则下述断言等价

(i) $q(x,A)$ 关于 μ 可逆；

(ii) 对于 $\forall A\in\mathscr{E}$，$\forall f\in b\mathscr{E}$，有

$$\int\mu(dx)f(x)q(x,A)=\int_A\mu(dx)\int q(x,dy)f(x).\tag{3.19}$$

(iii) 对于 $\forall f$、$g\in b\mathscr{E}$, 有

$$\int f(x)qg(x)\mu(dx)=\int g(x)qf(x)\mu(dx), \tag{3.20}$$

其中

$$qf(x)=\int q(x, dy)f(y). \tag{3.21}$$

如果$(E, \mathscr{E})$是距离可测空间,则上述条件又都等价于

(iv) 对于 $\forall f$、$g\in b\mathscr{C}$,

$$\int f(x)qg(x)\mu(dx)=\int g(x)qf(x)\mu(dx). \tag{3.22}$$

此外,若设 f, $g\in r\mathscr{E}_+(\mathscr{C}_+)$, 则"$\mu$ 可积"条件可以去掉.

这两个定理的证明与 § 2 中相应定理的证明类似,不再重述.

有时,使用过程 $P_t(x, A)$ 的拉氏变换更为方便. 令

$$P_\lambda f(x)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}P_tf(x)dt \quad (\lambda>0,\ f\in b\mathscr{E}). \tag{3.23}$$

称 $P_\lambda(x, A)$ $(\lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})$ 为 $P_t(x, A)$ $(t\geqslant 0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})$的拉氏变换. 一个 q 过程的拉氏变换也称为 q 过程.

周知,过程 $P_t(x, A)$的拉氏变换 $P_\lambda(x, A)$必定满足若干条件. 反之, 满足这些条件的 $P_\lambda(x, A)$唯一决定一个过程 $P_t(x, A)$. 详见[6]. 由此及拉氏变换的唯一性定理易见

定理 3.3 过程 $P_t(x, A)$ $(t\geqslant 0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})$可逆的主要条件是它的拉氏变换 $P_\lambda(x, A)$ $(\lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})$可逆, 即存在概率测度 μ, 使得

$$\int_A \mu(dx)P_\lambda(x, B)=\int_B \mu(dx)P_\lambda(x, A), \qquad (\forall A、B\in\mathscr{E},\ \forall\lambda>0) \tag{3.24}$$

§ 4. Колмогоров 向前、向后方程

定义 4.1 设 $P_\lambda(x, A)$ $(\lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})$是一个 q 过程, 则

$$(F_\lambda) \qquad \int P_\lambda(x, dy)(\lambda I_A(y)-[q(y, A)-q(y)I_A(y)])=I_A(x), \tag{4.1}$$

$$(B_\lambda) \qquad (\lambda+q(x))P_\lambda(x, A)-\int q(x, dy)P_\lambda(y, A)=I_A(x)$$

$$(\lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}). \tag{4.2}$$

分别称为过程 $P_\lambda(x, A)$的 Колмогоров 向前、向后方程. 称方程(F_λ) μ 几乎成立, 如果对于每一个 $A\in\mathscr{E}$, 存在一个 μ 零集 $N(A)$, 使得对于每一个 $x\notin N(A)$ 和每一个 $\lambda>0$, (F_λ)成立.

在[7]中已经证明,每一个 q 过程 $P_\lambda(x, A)$ 满足(B_λ), 但却未必满足(F_λ). 但我们有

定理 4.1 对于每一个可逆 q 过程 $P_\lambda(x, A)$来说, 如果 $q(x)$关于 μ 可积, 那么柯氏向前方程(F_λ)关于 μ 几乎成立. 而柯氏向后方程(B_λ)总成立.

证 设 q 过程 $P_\lambda(x, A)$ 关于 μ 可逆，则从 (B_λ) 得

$$\int_A \mu(dx)(\lambda+q(x))P_\lambda(x, B)-\int_A \mu(dx)\int q(x, dy)P_\lambda(y, B)=\mu(AB), \tag{4.3}$$

即

$$\int_A \mu(dx)(\lambda+q(x))P_\lambda(x, B)-\int I_A(x)(qP_\lambda(\cdot, B))(x)\mu(dx)=\mu(AB). \tag{4.4}$$

利用 $q(x, A)$ 的可逆性得

$$\int_A \mu(dx)(\lambda+q(x))P_\lambda(x, B)-\int \mu(dx)P_\lambda(x, B)q(x, A)=\mu(AB), \tag{4.5}$$

即

$$\lambda\int_A \mu(dx)P_\lambda(x, B)-\int \mu(dx)(q(x, A)-q(x)I_A(x))\times \times(P_\lambda I_B(\cdot))(x)=\mu(AB). \tag{4.6}$$

再利用 $P_\lambda(x, A)$ 的可逆性得

$$\lambda\int_B \mu(dx)P_\lambda(x, A)-\int I_B(x)P_\lambda(q(\cdot, A)-q(\cdot)I_A(\cdot))(x)\mu(dx)=\mu(AB), \tag{4.7}$$

即

$$\lambda\int_B \mu(dx)P_\lambda(x, A)-\int_B \mu(dx)\int P_\lambda(x, dy)[q(y, A)-q(y)I_A(y)] =\int_B I_A(x)\mu(dx), \quad (\forall B\in\mathscr{E}). \tag{4.8}$$

两边关于 μ 取 Radon-Nikodym 导数，得

$$\lambda P_\lambda(x, A)-\int P_\lambda(x, dy)[q(y, A)-q(y)I_A(y)]=I_A(x), \qquad \mu\text{-a.e.} \tag{4.9}$$

例外集依赖于 A 和 λ. 但 $P_\lambda(x, A)$ 依 λ 连续（注意由定义 2.1 可推出 $t\mapsto P_t(x, A)$ 一致连续），故例外集可选为只依赖于 A 的. 定理得证.

§5. 最小 q 过程的可逆性

定义 5.1 称 q 过程 $P_\lambda^{\min}(x, A)$ $(\lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})$ 是最小 q 过程，如果对任一 q 过程 $P_\lambda(x, A)$ 来说，都有

$$P_\lambda(x, A)\geqslant P_\lambda^{\min}(x, A), \quad (\forall\lambda>0,\ \forall x\in E,\ \forall A\in\mathscr{E}). \tag{5.1}$$

定理 5.1 最小 q 过程 $P_\lambda^{\min}(x, A)$ 是方程 (B_λ) 的最小正解，它可用如下方式得到：令

$$P_\lambda^{(1)}(x, A)=\frac{\delta(x, A)}{\lambda+q(x)}, \quad (\lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}), \tag{5.2}$$

$$P_\lambda^{(n+1)}(x, A)=\int\frac{q(x, dy)}{\lambda+q(x)}P_\lambda^{(n)}(y, A), \quad (n\geqslant 1), \quad (\lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}). \tag{5.3}$$

则

$$P_\lambda^{\min}(x, A)=\sum_{n=1}^{\infty}P_\lambda^{(n)}(x, A), \quad (\lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}). \tag{5.4}$$

证 由[8; 定理 1]及[11]知，最小 q 过程存在唯一. 然后由[8; 定理 3 的推论 1]立得本定理.

定理 5.1 表明了对于固定的 λ 和 A，关于 x，$P_\lambda^{\min}(x, A)$ 的最小性. 下面的定理 5.2 则表明对于固定的 λ 和 x，$P_\lambda^{\min}(x, A)$ 关于 A 也具有最小性. 为此，先建立两条引理.

设给定 $U(\cdot,\ \cdot)$ 和 $\nu(\cdot)$. 对于 $\forall A\in\mathscr{E}$, $U(\cdot,\ A)\in r\mathscr{E}_+$; 对于 $\forall x\in E$, $U(x,\ \cdot)$ 和 $\nu(\cdot)$ 都是 $\mathscr{E}$ 上的测度, 并且 $\nu(E)<+\infty$.

定义 5.2　如果 $\mathscr{E}$ 上的测度 μ 满足

$$\mu(A)=\int\mu(dx)U(x,\ A)+\nu(A),\quad (A\in\mathscr{E}),\tag{5.5}$$

则称 μ 是方程(5.5)的解. 称 μ^* 是方程(5.5)的最小解, 如果 μ^* 满足(5.5), 并且对于方程(5.5)的任一解 μ, 都有

$$\mu(A)\geqslant\mu^*(A),\quad (\forall A\in\mathscr{E}).\tag{5.6}$$

(5.6)称为最小性.

引理 5.1　设 $U(\cdot,\ \cdot)$ 和 $\nu(\cdot)$ 如上. 则方程(5.5)的最小解存在并且唯一. 它可用如下方式得到: 若令

$$\mu^{(0)}(A)\equiv 0,\quad (\forall A\in\mathscr{E}),\tag{5.7}$$

$$\mu^{(n+1)}(A)=\int\mu^{(n)}(dx)U(x,\ A)+\nu(A),\quad (\forall A\in\mathscr{E},\ n\geqslant 0).\tag{5.8}$$

则

$$\mu^{(n)}\uparrow\mu^*\quad (n\uparrow\infty).\tag{5.9}$$

证　(i) 先证 $\mu^{(n)}$ 的单调性.

显见 $\mu^{(1)}(A)=\int\mu^{(0)}(dx)U(x,\ A)+\nu(A)=\nu(A)\geqslant\mu^{(0)}(A)\ (\forall A\in\mathscr{E})$, 且 $\mu^{(0)}$ 和 $\mu^{(1)}$ 都是 $\mathscr{E}$ 上的测度. 今设

$$\mu^{(n)}(A)\geqslant\mu^{(n-1)}(A),\quad (\forall A\in\mathscr{E}).\tag{5.10}$$

并设 $\mu^{(n-1)}$ 和 $\mu^{(n)}$ 都是 $\mathscr{E}$ 上的测度, 则易证

$$\int\mu^{(n)}(dx)f(x)\geqslant\int\mu^{(n-1)}(dx)f(x)\quad (\forall f\in r\mathscr{E}_+).\tag{5.11}$$

因而

$$\begin{aligned}\mu^{(n+1)}(A)&=\int\mu^{(n)}(dx)U(x,\ A)+\nu(A)\geqslant\int\mu^{(n-1)}(dx)U(x,\ A)+\nu(A)\\&=\mu^{(n)}(A),\quad (\forall A\in\mathscr{E}).\end{aligned}\tag{5.12}$$

故 $\mu^{(n+1)}$ 也是一个测度并且单调增成立. 今记

$$\mu^*(A)=\lim_{n\to\infty}\mu^{(n)}(A).\quad (\forall A\in\mathscr{E}),\tag{5.13}$$

现证(ii) μ^* 是 $\mathscr{E}$ 上的测度.

显然 $\mu^*(A)\geqslant 0$, $(\forall A\in\mathscr{E})$, $\mu(\emptyset)=0$, 并且 μ^* 是有限可加的. 若

$$\mathscr{E}\ni A_m\uparrow A,\quad (m\uparrow\infty).\tag{5.14}$$

则因 $\mu^{(n)}(A_m)$ 对于 n 和 m 都是单调增的, 于是

$$\mu^*(A)=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\mu^{(n)}(A_m)=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\mu^{(n)}(A_m)=\lim_{m\to\infty}\mu^*(A_m).\tag{5.15}$$

故 μ^* 是从下连续的. 因而 μ^* 是 σ-可加的[14; p84 定理 A].

(iii) μ^* 是方程(5.5)的解.

留到下一引理中去证明.

(iv) 最小性.

设 μ 是方程(5.5)的任一解, 那么

$$\mu(A)=\int\mu(dx)U(x,A)+\nu(A)\geqslant\mu^{(0)}(A),\quad(\forall A\in\mathscr{E}).\tag{5.16}$$

假设已有

$$\mu(A)\geqslant\mu^{(n)}(A),\quad(\forall A\in\mathscr{E}),\tag{5.17}$$

则

$$\mu(A)=\int\mu(dx)U(x,A)+\nu(A)\geqslant\int\mu^{(n)}(dx)U(x,A)+\nu(A)$$
$$=\mu^{(n+1)}(A),\quad(\forall A\in\mathscr{E}).\tag{5.18}$$

因而对于一切 $n\geqslant 0$, 有

$$\mu(A)\geqslant\mu^{(n)}(A),\quad(\forall A\in\mathscr{E}).\tag{5.19}$$

故

$$\mu(A)\geqslant\lim_{n\to\infty}\mu^{(n)}(A)=\mu^*(A),\quad(\forall A\in\mathscr{E}).\tag{5.20}$$

故最小性成立.

引理 5.2 若令

$$\tilde{\mu}^{(1)}(A)=\nu(A),\quad(\forall A\in\mathscr{E}),\tag{5.21}$$

$$\tilde{\mu}^{(n+1)}(A)=\int\tilde{\mu}^{(n)}(dx)U(x,A),\quad(\forall A\in\mathscr{E},\ n\geqslant 1).\tag{5.22}$$

则

$$\mu^*=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\mu}^{(n)}.\tag{5.23}$$

证 于(5.22)的两边对 n 求和, 得

$$\sum_{k=1}^{n}\tilde{\mu}^{(k+1)}(A)=\int\left(\sum_{k=1}^{n}\tilde{\mu}^{(k)}\right)(dx)U(x,A),\quad(\forall A\in\mathscr{E}).\tag{5.24}$$

显然 $\tilde{\mu}^{(n)}$, $\sum_{k=1}^{n}\tilde{\mu}^{(k)}(n\geqslant 1)$, $\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\mu}^{(n)}$ 都是 $\mathscr{E}$ 上的测度. 现令

$$\mathscr{L}=\left\{f\in\mathscr{E}:\ \lim_{n\to\infty}\int\left(\sum_{k=1}^{n}\tilde{\mu}^{(k)}\right)(dx)f(x)=\int\left(\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\mu}^{(n)}\right)(dx)f(x)\right\}.\tag{5.25}$$

则 $1\in\mathscr{L}$, $\mathscr{L}$ 对于锥射运算封闭. 今设

$$\mathscr{L}\ni f_m\uparrow f\in\mathscr{E},\quad f_m\geqslant 0.\tag{5.26}$$

则因 $\int\left(\sum_{k=1}^{n}\tilde{\mu}^{(k)}\right)(dx)f_m(x)$ 对于 n 和 m 都是单调增的, 故

$$\lim_{n\to\infty}\int\left(\sum_{k=1}^{n}\tilde{\mu}^{(k)}\right)(dx)f(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int\left(\sum_{k=1}^{n}\tilde{\mu}^{(k)}\right)f_m(x)$$
$$=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int\left(\sum_{k=1}^{n}\tilde{\mu}^{(k)}\right)f_m(x)=\int\left(\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\mu}^{(n)}\right)(dx)f(x).\tag{5.27}$$

但

$$\mathscr{L}\supset\mathscr{D}=\{I_A:\ A\in\mathscr{E}\},\tag{5.28}$$

故

$$\mathscr{L}\supset r\mathscr{E}_+.\tag{5.29}$$

于是 $\sum_{n=1}^{\infty}\mu^{(n)}$ 是方程(5.5)的解.

另一方面, 显见

$$\mu^{(1)}(A)\geqslant\tilde{\mu}^{(1)}(A),\quad(\forall A\in\mathscr{E}).\tag{5.30}$$

若设

$$\mu^{(n)}(A)\geqslant\sum_{k=1}^{n}\tilde{\mu}^{(k)}(A),\quad(\forall A\in\mathscr{E}).\tag{5.31}$$

则易见

$$\mu^{(n+1)}(A)=\int\mu^{(n)}(dx)U(x,\ A)+\nu(A)\geqslant\int\left(\sum_{k=1}^{n}\tilde{\mu}^{(k)}\right)(dx)U(x,\ A)+\nu(A)$$
$$=\sum_{k=2}^{n+1}\tilde{\mu}^{(k)}(A)+\tilde{\mu}^{(1)}(A)=\sum_{k=1}^{n+1}\tilde{\mu}^{(k)}(A),\quad(\forall A\in\mathscr{E}).\tag{5.32}$$

故

$$\mu^{*}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\mu}^{(n)}.\tag{5.33}$$

现在，由已证的 $\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\mu}^{(n)}$ 满足方程(5.5)、引理 5.1 证明中的(iv)以及(5.33)立知本引理成立. 我们同时证明了引理 5.1 中的(ii).

定理 5.2 对于固定的 λ 和 x, $P_{\lambda}^{\min}(x,\ \cdot)$ 是方程

$$P_{\lambda}(x,\ \cdot)=\int P_{\lambda}(x,\ dy)\int_{\cdot}\frac{q(y,\ dz)}{\lambda+q(z)}+\frac{\delta(x,\ \cdot)}{\lambda+q(x)}\tag{5.34}$$

的最小解.

证 由定理 5.1, 引理 5.1 和引理 5.2, 我们只需证明, 若令

$$\tilde{P}_{\lambda}^{(1)}(x,\ A)=\frac{\delta(x,\ A)}{\lambda+q(x)},\quad(A\in\mathscr{E}),\tag{5.35}$$

$$\tilde{P}_{\lambda}^{(n+1)}(x,\ A)=\int\tilde{P}_{\lambda}^{(n)}(x,\ dy)\int_{A}\frac{q(y,\ dz)}{\lambda+q(z)},\quad(A\in\mathscr{E}).\tag{5.36}$$

则

$$P_{\lambda}^{(n)}(x,\ A)=\tilde{P}_{\lambda}^{(n)}(x,\ A),\quad(n\geqslant1,\ A\in\mathscr{E}).\tag{5.37}$$

由(5.2), (5.35)知(5.37)对于 $n=1$ 成立, 当 $n=2$ 时,

$$\tilde{P}_{\lambda}^{(2)}(x,\ A)=\int\tilde{P}_{\lambda}^{(1)}(x,\ dy)\int_{A}\frac{q(y,\ dz)}{\lambda+q(z)}=\frac{1}{\lambda+q(x)}\int_{A}\frac{q(x,\ dz)}{\lambda+q(z)}$$
$$=P_{\lambda}^{(2)}(x,\ A),\quad(A\in\mathscr{E}).\tag{5.38}$$

今设对于 $k=n-1$ 和 $k=n$ 已有

$$\tilde{P}_{\lambda}^{(k)}(x,\ A)=P_{\lambda}^{(k)}(x,\ A),\quad(\forall A\in\mathscr{E}).\tag{5.39}$$

则

$$\tilde{P}_{\lambda}^{(n+1)}(x,\ A)=\int\tilde{P}_{\lambda}^{(n)}(x,\ dy)\int_{A}\frac{q(y,\ dz)}{\lambda+q(z)}=\int P_{\lambda}^{(n)}(x,\ dy)\int_{A}\frac{q(y,\ dz)}{\lambda+q(z)}$$
$$=\int\frac{1}{\lambda+q(x)}\left(\int q(x,\ du)P_{\lambda}^{(n-1)}(u,\ dy)\right)\int_{A}\frac{q(y,\ dz)}{\lambda+q(z)}$$
$$=\int\frac{q(x,\ du)}{\lambda+q(x)}\left(\int P_{\lambda}^{(n-1)}(u,\ dy)\int_{A}\frac{q(y,\ dz)}{\lambda+q(z)}\right)$$
$$=\int\frac{q(x,\ du)}{\lambda+q(x)}\left(\int\tilde{P}_{\lambda}^{(n-1)}(u,\ dy)\int_{A}\frac{q(y,\ dz)}{\lambda+q(z)}\right)$$
$$=\int\frac{q(x,\ du)}{\lambda+q(x)}\tilde{P}_{\lambda}^{(n)}(u,\ A)=\int\frac{q(x,\ du)}{\lambda+q(x)}P_{\lambda}^{(n)}(u,\ A)$$
$$=P_{\lambda}^{(n+1)}(x,\ A),\quad(\forall A\in\mathscr{E}).\tag{5.40}$$

证毕.

定理 5.3 若 q 函数对 $q(x)-q(x,\ A)$ 可逆, 则最小 q 过程也可逆, 并有相同的可逆测度.

证 设 $q(x,\ A)$ 关于 μ 可逆, 则

$$\int_A \mu(dx) P_\lambda^{(1)}(x, B) = \int_A \mu(dx) \frac{\delta(x, B)}{\lambda + q(x)}$$

$$= \int_{AB} \frac{\mu(dx)}{\lambda + q(x)}, \quad (\forall A,\ B \in \mathscr{E},\ \forall \lambda > 0). \tag{5.41}$$

关于 A、B 对称，所以

$$\int_A \mu(dx) P_\lambda^{(1)}(x, B) = \int_B \mu(dx) P_\lambda^{(1)}(x, A), \quad (\forall A,\ B \in \mathscr{E},\ \forall \lambda > 0). \tag{5.42}$$

今设

$$\int_A \mu(dx) P_\lambda^{(n)}(x, B) = \int_B \mu(dx) P_\lambda^{(n)}(x, A), \quad (\forall A,\ B \in \mathscr{E},\ \forall \lambda > 0). \tag{5.43}$$

则由定理 3.2 得

$$\int_A \mu(dx) P_\lambda^{(n+1)}(x, B) = \int_A \mu(dx) \int \frac{q(x, dy)}{\lambda + q(x)} P_\lambda^{(n)}(x, B)$$

$$= \int \mu(dx) \left(\frac{\delta(x, A)}{\lambda + q(x)}\right) q(P_\lambda^{(n)}(\cdot, B))(x)$$

$$= \int P_\lambda^{(n)}(x, B) q\left(\frac{\delta(\cdot, A)}{\lambda + q(\cdot)}\right)(x) \mu(dx)$$

$$= \int P_\lambda^{(n)}(x, B) \int_A \frac{q(x, dy)}{\lambda + q(y)} \mu(dx),$$

$$(\forall A,\ B \in \mathscr{E},\ \forall \lambda > 0), \tag{5.44}$$

由(5.43)和单调类定理易证

$$\int \mu(dx) f(x) P_\lambda^{(n)}(x, B) = \int_B \mu(dx) \int P_\lambda^{(n)}(x, dy) f(y), \quad (\forall f \in r\mathscr{E}_+). \tag{5.45}$$

于是由(5.45)和(5.37)知，(5.44)的右方

$$= \int_B \mu(dx) \int P_\lambda^{(n)}(x, dy) \int_A \frac{q(y, dz)}{\lambda + q(z)}$$

$$= \int_B \mu(dx) P_\lambda^{(n+1)}(x, A), \quad (\forall A,\ B \in \mathscr{E},\ \forall \lambda > 0). \tag{5.46}$$

这样，对于一切 $n \geqslant 1$，有

$$\int_A \mu(dx) P_\lambda^{(n)}(x, B) = \int_B \mu(dx) P_\lambda^{(n)}(x, A), \quad (\forall A,\ B \in \mathscr{E},\ \forall \lambda > 0). \tag{5.47}$$

故由定理 5.1 和(5.47)知

$$\int_A \mu(dx) P_\lambda^{\min}(x, A) = \int_B \mu(dx) P_\lambda^{\min}(x, A), \quad (\forall A,\ B \in \mathscr{E},\ \forall \lambda > 0). \tag{5.48}$$

证毕.

§6. 可逆 q 过程的存在唯一性

本节研究对于给定的 q 函数对 $q(x) - q(x, A)$，可逆 q 过程的存在唯一性问题.

由命题 3.1 和定理 5.3 立即得到

定理 6.1 可逆 q 过程存在的充要条件是 q 函数对可逆. 而在 q 函数对可逆时，最小 q 过程 $P_\lambda^{\min}(x, A)$ $(\lambda > 0,\ x \in E,\ A \in \mathscr{E})$ 就是一个可逆 q 过程.

定义 6.1 称两个过程 $P_\lambda(x, A)$ 和 $\bar{P}_\lambda(x, A)$ 是 μ 无区别的，如果

$$\mu[x: \exists\lambda>0,\ \exists A\in\mathscr{E}\ 使\ P_\lambda(x, A)\neq\bar{P}_\lambda(x, A)]=0. \tag{6.1}$$

容易看出

引理 6.1　两个 μ 无区别的 q 过程关于 μ 同时可逆或同时不可逆.

因此，在研究可逆 q 过程的唯一性时，两个 μ 无区别 q 过程是可以不加区别的.

记

$$\mathscr{U}_\lambda=\left\{\xi_\lambda(x):\ \begin{array}{c}\int_E q(x, dy)\xi_\lambda(y)=(\lambda+q(x))\xi_\lambda(x),\\ 0\leqslant\xi_\lambda(\cdot)\leqslant 1\quad(\lambda>0).\end{array}\right\} \tag{6.2}$$

并用 $\dim\mathscr{U}_\lambda$ 表 $\mathscr{U}_\lambda$ 的维数(见[6]．那里已证 $\dim\mathscr{U}_\lambda$ 与 $\lambda>0$ 无关).

定义 6.2　称 $\mathscr{U}_\lambda$ 是 μ 几乎零维的，如果

$$\mu[x: \bar{\xi}_\lambda(x)\neq 0]=0. \tag{6.3}$$

记作 $\dim\mathscr{U}_\lambda\overset{\mu}{=}0$．此处

$$\bar{\xi}_\lambda(x)=1-\lambda P_\lambda^{\min}(x, E) \tag{6.4}$$

是 $\mathscr{U}_\lambda$ 的最大元，即是方程

$$\left.\begin{array}{c}\int_E q(x, dy)\xi_\lambda(y)=(\lambda+q(x))\xi_\lambda(x)\\ 0\leqslant\xi_\lambda(\cdot)\leqslant 1,\quad\lambda>0.\end{array}\right\} \tag{6.5}$$

的最大解(见[6; 定理 4.1]).

由[6; 定理 4.3]知，对于 $\forall x\in E$,

$$\bar{\xi}_\lambda(x)=0\Leftrightarrow\bar{\xi}_\mu(x)=0. \tag{6.6}$$

故 $\dim\mathscr{U}_\lambda\overset{\mu}{=}0$ 也与 $\lambda>0$ 无关.

定理 6.2　设 $q(x)-q(x, A)$ 保守，则可逆 q 过程在 μ 无区别意义下唯一的充要条件是

（i）$q(x, A)$ 关于 μ 可逆;

（ii）$\dim\mathscr{U}_\lambda\overset{\mu}{=}0$

同时成立.

证　若 $\dim\mathscr{U}_\lambda=0$，则由[6; 定理 4.1 的系 1]知 q 过程唯一，它就是 $P_\lambda^{\min}(x, A)$．于是由条件(i)及定理 5.3 立知此时可逆 q 过程唯一.

若 $\dim\mathscr{U}_\lambda=0$ 不真，但 $\dim\mathscr{U}_\lambda\overset{\mu}{=}0$，则由[7; 命题 3]知，此时存在无穷多个 q 过程．任取其中一个，记作 $\bar{P}_\lambda(x, A)$．由于 $\bar{P}_\lambda^{\min}(x, A)$ 和 $\bar{P}_\lambda(x, A)$ 都满足 (B_λ)．故对于 $\forall A\in\mathscr{E}$，$(\lambda\bar{P}_\lambda(x, A)-\lambda P_\lambda^{\min}(x, A))$ 满足齐次方程(6.5)．由 $\bar{\xi}_\lambda(x)$ 的最大性得

$$0\leqslant\lambda(\bar{P}_\lambda(x, A)-P_\lambda^{\min}(x, A))\leqslant\bar{\xi}_\lambda(x)\quad(\forall\lambda>0,\ \forall x\in E,\ \forall A\in\mathscr{E}). \tag{6.7}$$

于是由 $\dim\mathscr{U}_\lambda\overset{\mu}{=}0$ 知

$$\begin{aligned}0&\leqslant\mu[x: \exists\lambda>0,\ \exists A\in\mathscr{E}\ 使\ \bar{P}_\lambda(x, A)\neq P_\lambda^{\min}(x, A)]\\ &\leqslant\mu[x: \exists\lambda>0\ 使\ \bar{\xi}_\lambda(x)\neq 0]=\mu[x: \bar{\xi}_\lambda(x)\neq 0]=0\end{aligned} \tag{6.8}$$

故 $\bar{P}_\lambda(x, A)$ 与 $P_\lambda^{\min}(x, A)$ 是 μ 无区别的．因而由引理 6.1 和定理 5.3 知 $\bar{P}_\lambda(x, A)$ 可逆．由于 $\bar{P}_\lambda(x, A)$ 是任意取的，这表明任一 q 过程与 $P_\lambda^{\min}(x, A)$ μ 无区别．因此条件是充分的.

现证必要性．条件(i)显然是必要的．今设条件(i)满足但条件(ii)不真，则

$$\mu[x:\ \bar{\xi}_\lambda(x)\neq 0]>0. \tag{6.9}$$

设 μ 是 $q(x, A)$ 的可逆测度，并取

$$\psi_\lambda(A)=\int_A \mu(dx)\bar{\xi}_\lambda(x) \quad (\lambda>0,\ A\in\mathscr{E}). \tag{6.10}$$

则由(6.9)知

$$\psi_\lambda(E)\neq 0 \quad (\lambda>0). \tag{6.11}$$

另一方面，显然 $\psi_\lambda(\cdot)$ 是 $\mathscr{E}$ 上的有限测度，并且满足

$$\psi_\mu(A)=\int \psi_\lambda(dy)M(\lambda,\ \mu;\ y,\ A) \quad (\lambda,\ \mu>0). \tag{6.12}$$

此处，

$$M(\lambda,\ \mu;x,\ A)=\delta(x,\ A)+(\lambda-\mu)P_\mu^{\min}(x,\ A) \quad (\lambda,\ \mu>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}). \tag{6.13}$$

(详见[6; 定理 4.3])．故由[6; 定理 5.1]知

$$P_\lambda(x,\ A)=P_\lambda^{\min}(x,\ A)+\frac{\bar{\xi}_\lambda(x)\psi_\lambda(A)}{\lambda\psi_\lambda(E)} \quad (\lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}). \tag{6.14}$$

是一个不断的 q 过程．易见它还是可逆的．再由(6.9)，(6.10)和(6.11)知

$$\begin{aligned}\mu[x:\ \exists\lambda>0\ 使\ P_\lambda(x,\ E)\neq P_\lambda^{\min}(x,\ E)]&=\mu[x:\ \exists\lambda>0\ 使\ \bar{\xi}_\lambda(x)\neq 0]\\&=\mu[x:\ \bar{\xi}_\lambda(x)\neq 0]>0.\end{aligned} \tag{6.15}$$

故可逆 q 过程在 μ 无区别意义下非唯一．这表明条件是必要的．

定理 6.3 存在不断的可逆 q 过程的充要条件是

(i) $q(x,\ A)$ 可逆;

(ii) $q(x)-q(x,\ A)$ 保守

同时成立．

证 由[7; 命题 3]知，存在不断 q 过程的充要条件是 $q(x)-q(x,\ A)$ 保守．故上述条件显然是必要的．现证充分性．如果 $q(x)-q(x,\ A)$ 保守并且 $\dim\mathscr{U}_\lambda=0$，则最小 q 过程不断，它就是一个可逆 q 过程．如果 $\dim\mathscr{U}_\lambda>0$ 但 $\dim\mathscr{U}_\lambda\overset{\mu}{=}0$．则由[7; 命题 3]知，此时存在无穷多个不断的 q 过程，从而由定理 6.2 的充分性证明中可以看出，此时每一个不断的 q 过程都是可逆 q 过程．而若 $\dim\mathscr{U}_\lambda\overset{\mu}{\neq}0$．则由定理 6.2 的必要性证明中可见，此时也存在不断的可逆 q 过程证毕．

本文是在严士健老师和侯振挺老师的指导下完成的．谨致谢意．

参 考 文 献

[1] 钱敏平,平稳马氏链的可逆性, 北京大学学报, **4** (1978).
[2] 侯振挺、郭青峰、陈木法,可逆 Q 过程存在准则, 见[4].
[3] 侯振挺、陈木法,马尔可夫过程与场论,科学通报 **25**:20(1980),见[4].
[4] 钱敏、侯振挺等著,可逆马尔可夫过程,湖南科学技术出版社,(1979).
[5] Kendall, D. G., Some analytical properties of continuous stationary Markov transition functions, *Tran. Amer. Math. Soc.*, **78** (1955), 529—540.
[6] 胡迪鹤,抽象空间中的 q 过程的构造理论, 数学学报, **16**: 2 (1966).
[7] 胡迪鹤,抽象空间中 q 过程的唯一性准则,数学学报, **23**:5(1980).
[8] 陈木法,一类算子方程的最小正解,北京师范大学学报, **3** (1979).
[9] Blumenthal, R. M. and Getoor, R. K., Markov Processes and Potential Theory., New York and London, (1968).
[10] 王梓坤,随机过程论,科学出版社,(1965).
[11] Spitzer, F., *Lecture Notes on Math.*, **390** (1973) Ecole dété de Prob. de Saint Flour.
[12] Liggett, T. M. The stochastic evolution of infinite systems of interacting particles, *Lecture Notes in Math.*, **598** (1976), 188—248. Springer-Verlag, Beilin and New York.
[13] 胡迪鹤,论纯间断的马尔可夫过程,武汉大学学报, **4** (1978), 1—18, **1** (1979), 15—38.
[14] Loéve. Michel. Probability Theory. 3rd. ed. Princeton. *N. J. D. Van Nostrand. Co. Inc.*, (1963).
[15] Silverstein. M. L., Symmetric Markov Processes. *Lecture Notes in Math.*, **426** Springer, Beilin (1974).

REVERSIBLE MARKOV PROCESSES IN ABSTRACT SPACE

CHEN MUFA
(*Beijing Normal University*)

ABSTRACT

Let $(E, \mathscr{E})$ be a measurable space and every single point set $\{x\}$ belong to $\mathscr{E}$. $q(x)-q(x, A)$ $(x\in E, A\in\mathscr{E})$ is said to be a q-pair, if

(i) For fixed A, $q(\cdot)$, $q(\cdot, A)$ is a $\mathscr{E}$-measurable function of x;

(ii) For fixed x, $q(x, \cdot)$ is a measure on $\mathscr{E}$, and

$$0\leqslant q(x, A)\leqslant q(x, E)\leqslant q(x)<+\infty. \quad (\forall x\in E, \forall A\in\mathscr{E})$$

$$q(x, \{x\})=0, \quad (\forall x\in E).$$

A q-pair of functions $q(x)-q(x, A)$ is called conservative when

$$q(x, E)=q(x), \quad (\forall x\in E).$$

$P_t(x, A)$ $(t\geqslant 0, x\in E, A\in\mathscr{E})$ is said to be a q-process, if

(i) For fixed t, A, $P_t(\cdot, A)$ is a $\mathscr{E}$-measurable function of x;

(ii) For fixed t, x, $P_t(x, \cdot)$ is a measure on $\mathscr{E}$ and $0\leqslant P_t(x, E)\leqslant 1$;

(iii) $$P_{s+t}(x, A)=\int_E P_t(x, dy)P_s(y, A), \quad (x\in E, A\in\mathscr{E}, t, s\geqslant 0);$$

(iv) $$\lim_{t\to 0^+}\frac{P_t(x, A)-I_A(x)}{t}=q(x, A)-q(x)I_A(x), \quad (\forall x\in E, \forall A\in\mathscr{E}).$$

It is called honest when

$$P_t(x, E)=1, \quad (\forall t\geqslant 0, \forall x\in E).$$

A q-process $P_t(x, A)$ is called reversible, if there is a probability measure μ on $\mathscr{E}$ such that

$$\int_A \mu(dx)P_t(x, B)=\int_B \mu(dx)P_t(x, A) \quad (\forall t\geqslant 0, \forall A, B\in\mathscr{E}).$$

In this paper, we obtain some criterions for

(i) The existence of a reversible q-process;

(ii) The existence of a honest reversible q-process;

(iii) The uniqueness of the reversible q-processes when the q-pair is conservative.