强 馬 氏 性 研 究

侯振挺　　　　陈木法
（长沙铁道学院）　　（北京师范大学）

§1 引　　言

在马氏过程理论中，强马氏性是非常重要的基本概念。但在相当长的一段时间内，人们对于强马氏性的认识是十分模糊的。不少人认为强马氏性是马氏性的必然推论。直到1956年左右有人举出了反例之后，才引起普遍的注意。

J.L.Doob 最早（1945）指出需要认真地研究强马氏性。到了五十年代，许多作者从事这方面的研究工作，其中主要有*E*,Б,Дынкин，钟开莱，*A*,*A*,Юшкевич，*D.Ray*，*G.A.Hunt*等。这些作者对于强马氏性的定义也不尽相同。现在常用的强马氏性定义（我们在文中改称为强选马氏性）是Дынкин和Юшкевич在1956年给出的。

1969年，钟开莱应用他和*Doob*所建立的关于可选时（或称停时）的理论([7].1965)，研究了反向马氏过程[8]（即将一个马氏过程的时间的方向颠倒所得到的新过程）。他们发现通常的强选马氏性未必成立。于是提出了中性马氏性（*moderate Markov property*）的新概念，在我们文中，将称作强左料马氏性。他们证明了：一个右连续、左极限存在的强选马氏过程（σ－域族满足“通常条件”），在他们的意义下的反向马氏过程必定是强左料的。1972年，他又证明了*Hunt*过程也是强左料马氏过程[9]。可见，强左料马氏性具有普遍性。

强选马氏性“强”在可选时上，而强左料马氏性则是“强”在一部分可选时——可料时上。这说明，我们可以不在全部可选时上，而是只在一部分可选时上“加强”马氏性。基于这些事实，我们提出了强马氏性的统一的一般性定义。我们特别探讨了介于马氏性与强马氏性之间的新的马氏性。给出了若干等价性定理。特别，我们得到一个马氏过程只要在可料时和绝不可及时上成立马氏性。则在一切可选时上就成立马氏性（即是一个强马氏过程），这就使我们对于“强”马氏性有了更深入的认识。

§2 术 语 和 记 号

记

$\mathbf{R}=(-\infty,\ +\infty)$，　$\overline{\mathbf{R}}=[-\infty,\ +\infty]$，　$\overline{\mathbf{R}}_{+}=[0,\ \infty]$，　$\mathbf{T}=[0,\ \infty]$

$\mathbf{R}$的*Borel*子集所构成的σ－域记作$\underline{\underline{B}}$，$\overline{\mathbf{R}}$的*Borel*子集所构成的σ－域记作$\overline{\underline{\underline{B}}}$，类似地有$\overline{\underline{\underline{B}}}_{+}$。

设$(\Omega,\underline{\underline{F}})$和$(E,\underline{\underline{E}})$是任意的两个可测空间。我们用$f\in\underline{\underline{F}}/\underline{\underline{E}}$表示从$(\Omega,\underline{\underline{F}})$到$(E,\underline{\underline{E}})$的可测映射。如果$(E,\underline{\underline{E}})=(\overline{\mathbf{R}},\overline{\underline{\underline{E}}})$，则简记成$f\in\underline{\underline{F}}$。如果$f$还是有界的，

则记作 $f\in b\underline{\underline{F}}$

设 $(\Omega,\underline{\underline{F}}^0,\mathsf{P})$ 是给定的一个概率空间。把所有的 $(\Omega,\underline{\underline{F}}^0)$ 到 $(\overline{\mathbf{R}}_+,\underline{\underline{\overline{B}}}_+)$ 的可测映射 α 之集记作 $\underline{\underline{A}}^0$。再设 $\{\underline{\underline{F}}_t^0\}_{t\in T}$ 是给定的 $\underline{\underline{F}}^0$ 的上升的子 σ－域族，即 $s,t\in\mathsf{T}$，$s\leqslant t\Rightarrow\underline{\underline{F}}_s^0\subset\underline{\underline{F}}_t^0$。自然，$\underline{\underline{F}}^0$ 关于 P 不必是完备的，其完备化记作 $\underline{\underline{F}}$，相应地也有 $\underline{\underline{A}}$ 和族 $\{\underline{\underline{F}}_t\}_{t\in T}$，命

$$\underline{\underline{F}}_{t-}^0\hat{=}\bigvee_{s<t}\underline{\underline{F}}_s^0\hat{=}\sigma(\bigcup_{s<t}\underline{\underline{F}}_s^0),\quad 0<t<\infty;\tag{1}$$

$$\underline{\underline{F}}_{t+}^0\hat{=}\bigwedge_{s>t}\underline{\underline{F}}_s^0\hat{=}\bigcap_{s>t}\underline{\underline{F}}_s,\quad 0\leqslant t<\infty;\tag{2}$$

并约定 $\underline{\underline{F}}_{0-}^0=\underline{\underline{F}}_0^0$，$\underline{\underline{F}}_\infty^0=\underline{\underline{F}}^0$. 对于 $\forall\alpha\in\underline{\underline{A}}^0$，我们定义如下三个 σ－域：

$$\underline{\underline{F}}_{\alpha-}^0=\sigma\{\underline{\underline{F}}_0^0;\ \{\alpha>t\}\cap\underline{\underline{F}}_t^0,\ t\in\mathsf{T}\}\tag{3}$$

$$\underline{\underline{F}}_\alpha^0=\{\Lambda:\ \Lambda\cap\{\alpha\leqslant t\}\in\underline{\underline{F}}_t^0,\ \forall t\in\mathsf{T}\}\tag{4}$$

$$\underline{\underline{F}}_{\alpha+}^0=\{\Lambda:\ \Lambda\cap\{\alpha<t\}\in\underline{\underline{F}}_t^0,\ \forall t\in\mathsf{T}\}\tag{5}$$

本文将要用到"随机过程通论"中的一些结果。这些结果可在[1]或[2]中找到。关于族 $\{\underline{\underline{F}}_t^0\}_{t\in T}$ 的可选时的全体记作 $\underline{\underline{O}}^0$。关于族 $\{\underline{\underline{F}}_{t+}^0\}_{t\in T}$ 的可料时和关于族 $\{\underline{\underline{F}}_{t+}^0\}_{t\in T}$ 的料时是一回事，全体可料时之集记作 $\underline{\underline{P}}^0$、

族 $\{\underline{\underline{F}}_t^0\}_{t\in T}$ 关于 P 完备化得 $\{\underline{\underline{F}}_t\}_{t\in T}$，再右连续化得 $\{\underline{\underline{F}}_{t+}\}_{t\in T}$（如记 $\underline{\underline{G}}_t=\underline{\underline{F}}_{t+}$，则于此也约定 $\underline{\underline{G}}_{0-}=\underline{\underline{F}}_{0-}$）。关于这两个族的可选时之集分别记作 $\underline{\underline{O}}$ 和 $\underline{\underline{O}}_+$，可料时之集记作 $\underline{\underline{P}}$。关于族 $\{\underline{\underline{F}}_t\}_{t\in T}$ 的可及时和绝不可及时之集分别记作 $\underline{\underline{C}}$ 和 $\underline{\underline{C}}^c$。类似的有 $\underline{\underline{C}}_+$ 和 $\underline{\underline{C}}_+^c$. 这里需要说明的是，[2]中所定义的可及时和绝不可及时的概念（以及本文将要用到的与此有关的结果）均不依赖于 σ－域族的右连续性。

定义1. 设 $(E,\underline{\underline{E}})$ 是任意的可测空间；对于 $0\leqslant t<\infty$，E 中的 x 和 $\underline{\underline{E}}$ 中的 A 所定义的函数 $\mathsf{P}_t(x,A)$ 称为 $(E,\underline{\underline{E}})$ 上的（时齐）马氏转移函数，倘若

(i) 对于每一个固定的 t 和 x，$A\to\mathsf{P}_t(x,A)$ 是 $\underline{\underline{E}}$ 上的概率测度；

(ii) 对于每一个固定的 t 和 A，$x\to\mathsf{P}_t(x,A)$ 是 $\underline{\underline{E}}$ 可测函数；

(iii) 对于每一个 t，s，$A\in\underline{\underline{E}}$，下述 $K-C$ 方程

$$\mathsf{P}_{t+s}(x,A)=\int\mathsf{P}_t(x,dy)\mathsf{P}_s(y,A)\tag{6}$$

成立。

定义在 $(\Omega,\underline{\underline{F}}^0,\mathsf{P})$ 上、取值于 $(E,\underline{\underline{E}})$ 上的随机过程 $(x_t)_{t\in T}$ 称为适应于 $\{\underline{\underline{F}}_t^0\}_{t\in T}$，如果 $\forall t\in\mathsf{T}$，$x_t\in\underline{\underline{F}}^0/\underline{\underline{E}}$。注意我们所讨论的过程 $x=(x_t)_{t\in T}$ 在 $t=\infty$ 时无定义，因此，今后凡涉及 x_α，总是限于 $\{\alpha<\infty\}a.s.$

定义2. 设 $x=(x_t)_{t\in T}$ 是取值于 $(E,\underline{\underline{E}})$、适应于 $\{\underline{\underline{F}}_t^0\}_{t\in T}$ 的随机过程。又设 $\mathsf{P}_t(x,A)$ $(t\geqslant0,\ x\in E,\ A\in\underline{\underline{E}})$ 是 $(E,\underline{\underline{E}})$ 上的马氏转移函数，μ 为 $(E,\underline{\underline{E}})$ 上的一个概率测度。称 x 是关于 $\{\underline{\underline{F}}_t^0\}_{t\in T}$ 具有初始测度 $\mu\mathsf{P}_0$ 和转移函数 $\mathsf{P}_t(x,A)$ $(t\geqslant0,x\in E,A\in\underline{\underline{E}})$ 的马氏过程，倘若

(i) $\mathsf{P}[x_0\in A]=\int\mu(dx)\mathsf{P}_0(x,A),\quad\forall A\in\underline{\underline{E}};$ (7)

(ii) $\mathsf{E}[f\circ x_{t+s}\mid\underline{\underline{F}}_t^0]=\mathsf{P}_s(x_t,f)\qquad t,s\geqslant0,\ f\in b\underline{\underline{E}}$ (8)

其中

$$\mathbf{P}_t(x,f)=\int \mathbf{P}_t(x,dy)f(y) \tag{9}$$

§3. 强马氏性的一般定义

本文将要用到两类函数集：

$\underline{\underline{M}}^0$类：$\mathsf{T}\subset\underline{\underline{M}}^0\subset\underline{\underline{A}}^0$

$\underline{\underline{M}}$类：$\mathsf{T}\subset\underline{\underline{M}}\subset\underline{\underline{A}}$.

这里的T表常值可选时之集。$\underline{\underline{O}},\underline{\underline{P}},\underline{\underline{C}},\mathsf{T}\cup\underline{\underline{C}}^c$都是$\underline{\underline{M}}$类的。

定义3 设$X=(X_t)_{t\in T}$是满足定义 2 中所有条件的马氏过程，如果它还满足

(i) 对于$\forall\alpha\in\underline{\underline{M}}^0$，$\forall t\in\mathsf{T}$

$$X_{\alpha+t}\in\underline{\underline{F}}^0/\underline{\underline{E}}; \tag{10}$$

$$X_\alpha\in\underline{\underline{F}}^0{}_\alpha/\underline{\underline{E}} \tag{11}$$

(ii) 对于$\forall\alpha\in\underline{\underline{M}}$，$\forall f\in b\underline{\underline{E}}$，有

$$\mathbf{E}[f\circ X_{\alpha+t}\mid\underline{\underline{F}}^0{}_\alpha]=\mathbf{P}_t(X_\alpha,f) \tag{12}$$

则称X为强$\underline{\underline{M}}^0$马氏过程。(11)称为强$\underline{\underline{M}}^0$可测性，(12)称为强$\underline{\underline{M}}^0$马氏性。

如果状态空间具有某种拓扑结构，则我们还可以考虑左、右两方的情况。

定义4. 设$(E,\underline{\underline{E}})$是一个拓扑可测空间[10]，$X=(X_t)_{t\in T}$同定义 2 。并设$X$的轨道在$[0,\infty)$的右极限$a.s.$存在，它还满足

(i) 对于$\forall\alpha\in\underline{\underline{M}}^0$，$\forall t\in\mathsf{T}$，

$$X_{\alpha+t}\in\underline{\underline{F}}^0/\underline{\underline{E}}; \tag{13}$$

$$X_{\alpha+}\in\underline{\underline{F}}^0{}_{\alpha+}/\underline{\underline{E}}; \tag{14}$$

(ii) 对于$\forall\alpha\in\underline{\underline{M}}^0$，$\forall f\in b\underline{\underline{E}}$，有

$$\mathbf{E}[f\circ X_{\alpha+t}\mid\underline{\underline{F}}^0{}_{\alpha+}]=\mathbf{P}_t(X_{\alpha+},f) \tag{15}$$

则称X为强右$\underline{\underline{M}}^0$马氏过程。(14)称为强右$\underline{\underline{M}}^0$可测性，(15)称为强右$\underline{\underline{M}}^0$马氏性。

定义5. 设$(E,\underline{\underline{E}})$是一个拓扑可测空间，$X=(X_t)_{t\in T}$如定义 2 。又设$X$的轨道在$(0,\infty)$上左极限$a.s.$存在（约定$X_{0-}=X_0$）。如果它还满足

(i) $\forall\alpha\in\underline{\underline{M}}^0$，$\forall t\in\mathsf{T}$

$$X_{\alpha+t}\in\underline{\underline{F}}^0/\underline{\underline{E}}; \tag{16}$$

(ii) $\forall\alpha\in\underline{\underline{M}}^0$，$\forall f\in b\underline{\underline{E}}$

$$\mathbf{E}[f\circ X_{\alpha+t}\mid\underline{\underline{F}}^0{}_{\alpha-}]=\mathbf{P}_t(X_{\alpha-},f) \tag{17}$$

则称X是强左$\underline{\underline{M}}^0$马氏过程。（17）称为强左$\underline{\underline{M}}^0$马氏性。

我们注意，由［9］引理 2 可知，此时$X_{\alpha-}\in\underline{\underline{F}}^0{}_{\alpha-}$，因而（16）之左端总是$\underline{\underline{F}}^0{}_{\alpha-}$可测

的。

现在，让我们转到完备化情况。把上述定义中的$\underline{\underline{M}}^0$和$\underline{\underline{F}}^0$右上角的“0”去掉，我们得到强$\underline{\underline{M}}$（强左$\underline{\underline{M}}$、强右$\underline{\underline{M}}$）马氏过程概念。自然，此时条件（10）是多余的，因为它含于条件(11)之中。取$\underline{\underline{M}}=\underline{\underline{O}}_+$，我们又可得到强右选马氏过程概念。但此时$X_+=(X_{t+})_{t\in T}$是$\{\underline{\underline{F}}_{t+}\}$循序可测的，故对于$\forall T\in\underline{\underline{O}}_+$，$X_{T^+}\in\underline{\underline{F}}_{T^+}$。于是条件（14）也是多余的。完全类似，我们可以定义强及（强左，右及）马氏过程。强不及（强左、右不及）马氏过程，只是如同前面所指出的，因为$\underline{\underline{P}}=\underline{\underline{P}}_+$，所以在定义强右料马氏过程时，只需用$\underline{\underline{P}}$；而在定义强不及马氏过程时，需取$\underline{\underline{M}}=\mathsf{T}\sqcup\underline{\underline{C}}^c$。这些具体的定义就用不着一一给出了。

为简单起见，下面只考虑完备化情形。今后，我们把上面定义的“强$\underline{\underline{M}}$”等各种概念泛称为“强”。

§4. 隐含关系及等价性定理

定理1. 设$\underline{\underline{M}}_1$和$\underline{\underline{M}}_2$是两个$\underline{\underline{M}}$类函数集，$\underline{\underline{M}}_1\sqsubset\underline{\underline{M}}_2$。则每一个强（左、右）$\underline{\underline{M}}_2$马氏过程都是强（左、右）$\underline{\underline{M}}_1$马氏过程。

定理2. 如果马氏过程X的轨道$a.s.$右连续，则$\forall\alpha\in\underline{\underline{A}}$，$X_\alpha\in\underline{\underline{F}}_\alpha$，$X_{\alpha}\pm\in\underline{\underline{F}}_{\alpha}\pm$。进而对于每一个$\underline{\underline{M}}$：$\underline{\underline{O}}\sqsupset\underline{\underline{M}}\sqsupset\mathsf{T}$，有

强右$\underline{\underline{M}}$马氏性$\Rightarrow$强$\underline{\underline{M}}$马氏性。若更设$\{\underline{\underline{F}}_t\}_{t\in T}$右连续，则这里的“$\Rightarrow$”可换成“$\Leftarrow\Rightarrow$”

定理3. 如果马氏过程X的轨道$a.s.$左连续，则

强$\underline{\underline{M}}$马氏性$\Rightarrow$强左$\underline{\underline{M}}$马氏性。如果再设$\{\underline{\underline{F}}_t\}_{t\in T}$拟左连续，即对于$\forall T\in\underline{\underline{P}}$，$\underline{\underline{F}}_{T^-}=\underline{\underline{F}}_T$。则$X$强料可测，此时$\underline{\underline{C}}=\underline{\underline{F}}$，故

强（左、右）及$\Leftarrow\Rightarrow$强（左、右）料。

上述定理都是显然的。

定理4. 每一个强料马氏过程都是强及马氏过程。即

强及$\Leftarrow\Rightarrow$强料

先建立两条简单的引理

引理1. 设$S,T\in\underline{\underline{O}}$，再设$g\in\underline{\underline{F}}_S$，则

$$gI_{[S=T]}\in\underline{\underline{F}}_T.$$

证明．因为$A\in\underline{\underline{F}}_S\Rightarrow A\cap[S=T]\in\underline{\underline{F}}_T$。由此及单调类定理（见[3]或[4]第0章）立知本引理成立。

引理2 设S，$T\in\underline{\underline{C}}$，$f\in b\underline{\underline{E}}$。又设$X$是强及可测的，则

$$I_{[S=T]}\mathsf{E}[f\circ X_{t+S}|\underline{\underline{F}}_S]=I_{[S=T]}\mathsf{E}[f\circ X_{t+S}|\underline{\underline{F}}_T]\qquad(18)$$

证明．由引理1知，(18)两端都是$\underline{\underline{F}}_S\sqcup\underline{\underline{F}}_T=\underline{\underline{F}}_{S\wedge T}$可测的。注意$[S=T]\in\underline{\underline{F}}_{S\wedge T}$，两边关于$\underline{\underline{F}}_{S\wedge T}$取条件化即得引理2。

定理之证 由定理1，只需证明

强料$\Rightarrow$强及，

对于$\forall T\in\underline{\underline{C}}$，$\exists\{T_n\}_{n\in N}\sqsubset\underline{\underline{P}}$，使得

$$[\![T]\!]\sqsubset\bigcup_{n=1}^{\infty}[\![T_n]\!]$$

$\bigcup\limits_n [[T_n]]$是可料集，故它是两两不交可料时图的可列并。因此无仿假定T_n的图两两不交。由强料可测性，对于$\forall n$，$\forall B\in \underline{\underline{E}}$，$[X_{T_n}\in B,\ T_n<\infty]\in \underline{\underline{F}}_{T_n}$。于是

$$
\begin{aligned}
&[X_T\in B,\ T<\infty]\\
&=\bigcup_{n=1}^{\infty}[X_T\in B,\ T=T_n<\infty]\\
&=\bigcup_{n=1}^{\infty}[X_{T_n}\in B,\ T_n<\infty]\cap[T_n=T]\in \underline{\underline{F}}_{T-}。
\end{aligned}
$$

这便得到强及可测性，下面证明强及马氏性。由引理 2 和强料马氏性，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}[f o X_{t+T}|\underline{\underline{F}}_T]\\
&=\mathbf{E}[\sum_{n=1}^{\infty}I_{\{T=T_n\}}f o X_{t+T}|\underline{\underline{F}}_T]\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}I_{\{T=T_n\}}\mathbf{E}[f o X_{t+T}|\underline{\underline{F}}_T]\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}I_{\{T=T_n\}}\mathbf{E}[f o X_{t+T}|\underline{\underline{F}}_{T_n}]\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{E}[I_{\{T=T_n\}}f o X_{t+T}|\underline{\underline{F}}_{T_n}]\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{E}[I_{\{T=T_n\}}f o X_{t+T_n}|\underline{\underline{F}}_{T_n}]\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}I_{\{T=T_n\}}\mathbf{E}[f o X_{t+T_n}|\underline{\underline{F}}_{T_n}]\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}I_{\{T=T_n\}}\mathbf{P}_t(X_{T_n},f)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}I_{\{T=T_n\}}\mathbf{P}_t(X_T,f)\\
&=\mathbf{P}_t(X_T,f)。
\end{aligned}
$$

定理5. 在强选可测条件下，强选马氏性等价于强料马氏性和强不及马氏性同时成立。

证明　每一个可选时可唯一地分解成可及部分和绝不可及部分。即每一个可选时T的图可表成可及时T_1的图和绝不可及时T_2的图的不交并，由此出发，重复定理 4 的证法即得本定理。

同样可以证明

定理6. 每一个强右料马氏过程都是强右及马氏过程，即强右料$\Leftarrow\Rightarrow$强右及。

定理7. 强右选马氏性等价于强右料马氏性和强右不及马氏性同时成立。

但对于“左方”的情形，这些等价性结果却未必成立。就同一类而言，“左方”也不是“右方”的必然推论。譬如强左料马氏性不能直接从强右选马氏性推出。事实上，要从强右选马氏性导出强左料马氏性，还需要添一些条件（例如见[9]，定理4）。

关于强左料马氏性，[9]作了深入的讨论。在E为具有可数基局部紧 *Hausdorff* 空间条件下，证明了 *Hunt* 过程是强左料马氏过程。特别，*Feller* 过程以及无分枝点的 *Ray* 过程都是强左料马氏过程。

参 考 文 献

[1] *C.Dellacherie et P.A.Meyer Probabilites et potential. Hermann.* (1975)

[2] 中国科学院数学研究所概率统计室，概率基础（一） (1977)

[3] *R.M.Blumenthal and R.K.Getoor.Markov Processes and Potential Theory.Academu Press.*(1968)

[4] 暑期概率论基础讨论班马氏过程小组整理，马氏过程与位势理论（一） (1977)

[5] *C.Dellacherie.Capacites et Processus Stochastigues.Springer-Verlag. Heidelberg.* (1972)

[6] *Chung, K.L.On the boundary thery for Markov chains. Acta Math.* 110. (1963) 19—77.

[7] *K.L.Chung and J.L.Doob. Field, optionality, and measurability, Amer. J.Math.*87(1965) 397—424.

[8] *K.L.Chung and J.B.Walsh.To reverse a Markov process.Acta.Math,* 123(1969),225—251.

[9] *K.L.Chung.On the fundamental hypotheses of Hunt proesses.*(1972)

[10] *E.B.Dynkin.Markov proccsses,Springer,Berlin.*(1965)