# 概率论的一些新进展*

陈木法

(北京师范大学数学系)

近十年来，概率论发展的主要特点是：它与物理（特别是统计物理）、它与数学其它分支之间的相互渗透。下面的看法也许有一定的代表性：

"利用 Gibbs 态概念将抽象概率引进统计力学和材料力学，将动态系统理论和遍历性理论应用于湍流的研究，这是新近数学进入物理学的两个重要例子。这些现象表明，抽象数学和应用数学正在相互接近，两者之间的相互作用正在产生着丰硕的成果。"

——摘自"美国数学研究评审小组报告"，第1节，数学研究中的某些进展。1982。

"概率的技巧出现于越来越多的分支：当然有统计学，还有偏微分方程，泛函分析与 Banach 空间的几何，微分几何与流形上的分析，动力系统，等等……。"

——摘自法国国家科研中心1981年形势报告："数学与数学模型"，第二部分。

（以上两文见《数学译林》，第4卷，第1—2期，1985）。

目前，国内概率论方面正在开展工作的就有近20个不同的方向，涉及面很广。我们不可能逐一介绍。下面仅就笔者较为熟悉的两个侧面，提供一些情况。作为概率与物理相互渗透的例子，我们将介绍无穷质点马氏过程；作为概率与分析、几何相互渗透的例子，我们将介绍 Malliavin 随机变分学。当然，我们将尽力避免过于专门的语言。

## 第一部分：概率与物理——从跳过程到无穷质点马氏过程

跳过程又称纯间断型马氏过程或 q过程。让我们从最简单的例子谈起。

### 1. 简单例子

让我们考虑一个粒子，它有两个状态 ±1（例如磁单子有南、北极）。假设粒子从 −1 变为 +1 的速率为 $b>0$。即在时间 $[t, t+\Delta t]$ 内，从状态 −1 转到状态 +1 的概率为 $b\Delta t+o(\Delta t)$。类似地，从 +1 变为 −1 的速率为 $a>0$。再假定发生两次或两次以上变化的概率为 $o(\Delta t)$。那么，我们可以形式地写出无穷小算子：

$$\Omega f(x)=\sum_{y\in E} q(x,y)(f(y)-f(x))。$$

此处 $E=\{-1,1\}$，$f$ 为定义在 $E$ 上的有界实函数，而

$$Q=(q(x,y))\equiv\begin{pmatrix}-b & b\\ a & -a\end{pmatrix}$$

称为 Q矩阵（非对角线元素非负，行和 $\leqslant 0$ 的矩阵）。当然，Ω唯一决定一个马氏半群：

* 1986年2月15日收到

$$P(t)=e^{tQ}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a+b}(a+be^{-(a+b)t}) & \frac{b}{a+b}(1-e^{-(a+b)t})\\ \frac{a}{a+b}(1-e^{-(a+b)t}) & \frac{1}{a+b}(b+ae^{-(a+b)t})\end{pmatrix}$$

事实上，它有平稳分布 $\mu=(\frac{a}{a+b},\frac{b}{a+b})$，即满足

$$\mu=\mu p(t),t\geqslant 0;\quad \sum_{x\in E}\mu(x)=1。$$

而且，若记 I 为 P(t) 的一切平稳分布的全体，$|I|$ 表示集合 I 的势，那么 $|I|=1$。即平稳分布只有一个。

这个平凡的例子已经反映出一般的情况。在实际中，譬如说物理、生物、化学和公用服务事业中，我们首先知道的并非 P(t)，而是 Ω。因此，对于给定的 Ω，自然问

(Ⅰ)。何时 Ω 唯一决定马氏半群 p(t)？

进一步问

(Ⅱ)。何时 P(t) 有平稳分布，何时唯一？何时非唯一？

这两个问题是这一部分讨论的中心。我们将逐步深入。

## 2. 跳过程

我们给出上例的一种抽象化。设 $(E,\mathcal{E})$ 是任何一个可测空间，$\mathcal{E}$ 包含 E 中的一切单点集。给定 $(E,\mathcal{E})$ 上的次马氏转移函数 $P(t,x,A)$ $(t\geqslant 0,x\in E,A\in\mathcal{E})$，即它关于 x 可测，关于 A 为非负测度，满足压缩性：$P(t,x,E)\leqslant 1$ 和K－C方程：

$$P(t+s,x,A)=\int P(t,x,d_y)P(s,y,A)。$$

如果 $p(t,x,A)$ 还满足

跳条件： $\lim\limits_{t\searrow 0}P(t,x,\{x\})=1$

那么，先是 A. N. Kolmogorov (1951)，后是 D. G. Kendall (1955) 证明了极限

$$\lim_{t\searrow 0}\frac{P(t,x,B)-\delta(x,B)}{t}\equiv q(x,B)-q(x)I_B(x)$$

对于 $B\in\mathbf{R}$：

$$\mathbf{R}\equiv\{A\in\mathcal{E}:\lim_{t\searrow 0}\ \sup_{x\in A}(1-p(t,x,\{x\}))=0\}$$

必定存在，此处 $\delta(x,B)=I_B(x)$ 为示性函数。而且 $q(x,\cdot)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的测度，

$$0\leqslant q(x,B)\leqslant q(x)\leqslant +\infty$$

由于 $q(x)=\infty$ 情形所知结果不多，我们只限于 $q(x)<\infty$ $(x\in E)$ 的情况。此时，$q(x,\cdot)$ 可唯一地扩张成 $\mathcal{E}$ 上的有限测度。称如上的族 $q(x)-q(x,\cdot)$ 为 $(E,\mathcal{E})$ 上的 q 对，而称相应的 $p(t,x,A)$ 为跳过程（或 q 过程，或 q 半群）。

这样，我们的问题（Ⅰ）成为：对于给定的 q 对，何时存在跳过程 $P(t,x,A)$，何时唯一？这个问题最早是 W. Feller (1940) 提出的。存在性由他本人 (1940) 和 J. Doob (1945) 解决。但唯一性却要困难得多。退到 E 为可列集情形，就曾有过大量的研究。我们国内有相当的基础。已出版有研究专著王梓坤〔44〕，侯振挺和郭青峰〔20〕，侯振挺〔17〕及杨向群〔47〕。可列情形的完全解答是侯振挺〔16〕得到的。这是大家比较熟悉

的获奖的结果。对于一般抽象空间，胡迪鹤〔21〕和〔22〕得到部分的解答。完全的解答由笔者和郑小谷〔10〕得到。

## 3. $\lambda_\pi$不变测度猜想

比平稳分布更一般的概念是不变测度：

$$\mu = \mu P_t, \qquad t \geq 0$$

但不假定$\mu$为概率测度。不变测度的存在性始终是概率论、位势理论和遍历性理论研究的重要课题之一。人们早就知道，非平凡不变测度可以不存在。

今设$(E, \mathcal{E})$为"较好的"拓扑空间，$p(t, x, A)$是"较好"的次马氏转移函数。定义

$\lambda_\pi = \inf\{\lambda \in \mathbf{R}$: ∃非零Radon测度$\mu$，使得$\mu P_t$也是Radon测度且$e^{\lambda t}\mu \geq \mu P(t)$ $t \geq 0\}$。

此处$P(t)$是由$P(t, x, A)$所决定的半群。那么，可证$\lambda_\pi \in (-\infty, 0]$。数$\lambda_\pi$是$P(t)$某种意义下常返性与非常返性的分界点。当$P(t)$为自共轭的时，$\lambda_\pi$是它的最小特征根。基于分析和几何的考虑，D. Sullivan和D. W. Stroock〔42〕提出了如下猜想：在相当一般的条件下，一定存在非平凡的Radon测度$\mu$，使

$$e^{\lambda_\pi t}\mu = \mu P(t), \qquad t \geq 0$$

此时称$\mu$为$\lambda_\pi$不变测度。当然，这个猜想在许多情况下是正确的（见〔42〕）。如果这个猜想能够成立，那么，我们可以建立起比通常位势理论漂亮得多的新的位势理论——$\lambda_\pi$位势理论。

1982年，笔者构造出一些反例，说明这一猜想在一般情况下是不对的。更进一步，我们构造出$P(t)$的某种对偶半群$\widetilde{P}(t)$，使得关于$P(t)$的$\lambda_\pi$不变测度的存在性等价于关于$\widetilde{P}(t)$的普通不变测度的存在性。这样，我们就把新理论归结到老理论的框架中去〔9〕。

## 4. Ising 模 型

让我们再回到前面的简单例子。

如果考虑有限多个粒子，每个粒子也取$\pm 1$两种状态，那么，状态空间是$E = \{-1, +1\}^N$ $(N < \infty)$。若设每一粒子与前例有一样的变化率$b_i > 0$和$a_i > 0$，$i = 1, 2, \cdots, N$。那么，我们也有同样的结论：$\Omega$唯一决定马氏半群，而且$|I| = 1$。

如果考虑无穷多个粒子，情况又怎么样呢？

让我们先交待几个记号。假定每个粒子位于d维空间的格子点$Z^d$上。那么，状态空间就是$E = \{-1, +1\}^{Z^d}$。赋紧乘积拓扑。设$\eta \in E$，记$u\eta \in E$如次：

$$u\eta(v) = \begin{cases} \eta(v), & v \neq u \\ -\eta(u), & v = u \end{cases}$$

这里，$\eta$表示这个无穷粒子系统的一个状态，而$u\eta$表示仅有位于$u$位置的粒子状态$\eta(u)$变为它相反的状态$-\eta(u)$。我们用$C(u, \eta)$表示这一变化的变化率。那么，我们可以写出算子

$$\Omega f(\eta) = \sum_{u \in Z^d} c(u, \eta)[f(u\eta) - f(\eta)]$$

此处$f$为$E$上的某种连续函数。称由$\Omega$所决定的过程为自旋变相过程。特别地，取

$$c(x,\eta)=\exp\left[-\beta\sum_{u:|u|=1}\eta(x)\eta(x+u)\right]$$

$$x\in Z^{d},\quad \eta\in E$$

我们便得到Ising模型。此处$|\cdot|$表示欧氏范数，$\beta\geqslant 0$。

对于Ising模型，出现了与有限粒子情形完全不同的现象！例如说$d=2$，我们有

$$|I|=1,\quad 如\beta<\beta_2=\frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2})\approx 0.44$$

$$|I|>1,\quad 如\beta>\beta_2$$

当$d\geqslant 3$,也存在临界值$\beta_d$（但精确值尚未得到！）当$d=1$时，$|I|=1$。换言之，$\beta_1=+\infty$。

这种临界现象物理学家称之为"相变"。通俗地说，水从常温下的液态，而在$\beta=100$℃时变为气态，这就是相变。而100℃是临界值。

Ising模型是E. Ising 1925年提出来的。物理学家和数学物理学家作了大量的研究。现在依然很热闹。就说二维Ising模型，就有一本专著〔31〕。李政道、杨振宁（1952）曾有重要贡献。物理学家使用的是"热力学极限"，他们首先算出了$\beta_2$的值。

1965年，R. L. Dobrushing使用概率论工具，严格地证明了当$d\geqslant 2$时，相变必定存在。诞生了"随机场"的新的概率论分支。作为姐妹分支的"无穷交互作用粒子系统"（又称"无穷质点马氏过程"）也相继出现了。两者的主要区别在于前者是静态的，后者是动态的（即含有时间参数$t\geqslant 0$）。我们上面所使用的语言属于后者。

过去，随机过程研究较多的是单个粒子运动，例如随机游动、生灭过程和布朗运动等。上面，我们已经看到，有限个粒子系统不会有相变。因此，"无穷质点"和以往的随机过程论所研究的对象就有着本质的区别。另一方面，局部地看，Ising模型是一个简单的跳过程。因此，"无穷质点"的研究以跳过程为必要基础。这正好反映了我们工作的特点：从"跳过程"到"无穷质点"。

## 5. 有势性与可逆性

对于Ising模型，之所以能够得到这么好的结果，主要有两个原因：

（i）状态空间$E=\{-1,+1\}^{Z^d}$是紧的：从而$|I|\geqslant 1$；

（ii）$P(t)$（等价地，$\Omega$）关于概率测度$\mu$是可逆的，即它是$L^2(\mu)$上的自共轭算子。

关于跳过程的可逆性，国内有不少工作。早在1979年，我们就出版过研究专著〔36〕。特别地，侯振挺和笔者〔18〕把分析中的古典场论引入跳过程，把跳过程的可逆性归结为判断一个场的有势性。使我们能够使用象"路经无关性"等场论的思想。随后，严士健、丁万鼎、唐守正和笔者以场论作为基本工具，给出了自旋变相过程和其它一些过程的可逆性判判准。这些判准十分简单而有效。而且，我们证明了Gibbs态就是可逆测度。关于这方面，国内有很多工作（见〔5〕—〔7〕，〔11〕，〔12〕，〔28〕，〔36〕，〔37〕，〔43〕，〔46〕，〔48〕和〔49〕）。

如果过程不是可逆的，那么情况远为复杂。为说明这一点，我们介绍一个十多年来一直未能解决的重要猜想：

## 6. 正速度猜想〔29〕。

这是一维的自旋变相过程。假设$C(x,\eta)$满足

(i) 正性：$c(x,\eta)>0, x\in Z=Z^1, \eta\in E=\{-1,+1\}^Z$；

(ii) 平移不变性：$c(x+y,\eta(\cdot+y))=C(x,\eta)$

$$x,y\in Z,\quad \eta\in E;$$

(iii) 有限程：存在$0<L<\infty$，使$C(x,\eta)$只依赖于

$$\{y\in Z: |x-y|\leqslant L\}$$

那么$|I|=1$。

为说明这一猜想的难度，让我们看看最简单的情况：

$$C(x,\eta)=1+a\eta(x)+b\eta(x+1)+c\eta(x)\eta(x+1)$$

$$x\in Z,\ \eta\in E$$

此处a，b和c取为保证$C(x,\eta)>0$的非零常数。依这三个参数的正、负，可分为八种情况。虽经R. Holley & D. W. Stroock，L. Gray和T. M. Liggett等人的努力，这个猜想也只是解决了$\frac{6}{8}+\varepsilon$，并没能完全解决。

顺便指出，在"无穷质点马氏过程"中，存在着大量的未解决问题。刚刚出版的第一本系统的专著〔29〕中，就列举了约60个未解决问题，普遍的看法是：这里的问题在数学上都有相当的难度。

直到目前为止，国外的工作基本上都还是处理经典的统计物理，那么，能否使用这套理论处理现代统计物理呢？我们知道，当今统计物理最活跃的是非平衡相变。典型例子有

## 7. Schlögl模型〔32〕。

状态空间是

$$E=\{0,1,2,\cdots\}^{Z^d},$$

算子（略有简化）是

$$\Omega f(\eta)=\sum_{x\in Z^d}(\lambda_1\eta(x)^2+b)[f(\eta+e_x)-f(\eta)]+\sum_{x\in Z^d}\lambda_2\eta(x)[f(\eta-e_x)-f(\eta)]$$

$$+\sum_{x\in Z^d}\lambda_3\eta(x)\sum_{y\in Z^d}p(x,y)[f(\eta-e_x+e_y)-f(\eta)]$$

此处$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,b>0$，$(P(x,y))$是转移概率矩阵，而$e_x$表示在x处为1、其余地方为0的E中的单位向量。它的直观解释是：把每一个位置$u\in Z^d$想象成一个小盒子，在这个盒子里有化学反应。右方第一项表示生一个，第二项表示死一个；第三项表示不同位置之间的扩散（迁移）。

我们注意，这个状态空间E依乘积拓扑既非局部紧也非σ紧，从而Ω谈不上局部有界。事实上，Ω也不是可逆的。由此可见，Ising模型的两条好处（紧性和可逆性）它都失掉了，因而要困难得多。早在1979年初，我们就关心这个问题，但一直没有搞动。真正的进展开始于1983年秋季。先是严士健和笔者〔45〕完成了有限维情形，然后郑小谷和丁万鼎完成了无穷维线性情形〔51〕，同时做了相变问题〔13〕。

现在，我们已经有了较一般的存在定理〔3，8〕，它包括了Schlögl模型（非线性）等已有的全部结果。我们综合使用了美、苏学者的方法，但更重要的是我们完成了跳过程耦合（Coupling）这一基本工具〔4〕，而这得益于我们先前关于跳过程的研究工作。

回到Schlögl模型。我们已经证明$|I|\geqslant 1$。我们也能够证明在某些情况下有$|I|=1$。详见〔7〕。为了证明相变的存在性，我们还需要证明存在$|I|>1$的情形。我们坚信如此，

但还未完成证明。

## 8. 几 点 说 明

（1）如果状态空间E可列，那么P(t)是一个有限或可数矩阵。看看矩阵论的著作，就会知道跳过程的研究对于矩阵论的影响。下面是一个较近的有趣例子。

任给非负矩阵A，则必定存在对角矩阵V，使得A－V＝Q是一个保守Q矩阵（非对角线元素非负、行和为0）。以下也把V理解为向量。作为新近发展起来的Donsker－Varadhan大偏差理论（Large deviations）的直接理论,我们得到矩阵A的最大特征根为

$$\lambda_{max}(Q+V)=\max_{\substack{\alpha:\alpha_i\geq 0\\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1}}\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i V(i)+\inf_{u_j>0}\sum_{i,j=1}\alpha_i q_{ij}u_j/u_i\right\}$$

此处$(q_{ij})=Q$。这就用概率方法得到矩阵论的一个新结果。那么，能否不用大偏差理论直接证明这个公式呢？M. Kac〔24〕说为回答他1979年在Berkeley提出的这一挑战，一年之后，P. Chernoff和I. M. Singer、D. Friedan找到了直接证明。

上面括号内的第二项的反号在大偏差理论中称为rate function。它实质上相应于统计物理中的Boltzmann熵。这就把大偏差理论与研究统计力学的随机场和无穷质点马程联系系了起来。详见新著〔23〕。

（2）当然，q半群理论应该算作是半群理论的一部分。也许这使我们首先想到的是著名的Hille－Yosida定理。然而，虽然我们的唯一性准则的证明从形式上看是纯分析的，但却与Hille－Yosida定理无关。

（3）跳过程与微分方程的联系是通过Kolmogorov向后微分方程

$$\frac{d}{dt}p(t,x,A)=\int q(x,dy)p(t,y,A)-q(x)p(t,x,A)$$

和向前微分方程

$$\frac{d}{dt}p(t,x,A)=\int p(t,x,dy)q(y,A)-\int_A p(t,x,dy)q(y)$$

来实现的（这是后一部分所讨论的问题的出发点），然而，即使E为可列的情形，我们所得到的也是无穷多个微分方程，不属于通常微分方程所讨论的范围。

虽然有些跳过程并不满足这两个方程。但何时有满足这两个方程（或其一）的解的存在性和唯一性的充要条件都已经得到（见〔19〕和〔50〕）。

（4）应当指出：对于Ising模型等统计物理模型的研究,有许多不同的数学方法。例如说，对于Schlögl模型，我们考虑的是粒子的个数。如果考虑粒子的密度，作为一种近似，我们将得到一个非线性微分方程——反应扩散方程。

（5）介绍几本有代表性的专著。除了上面已经提到的T. M. Liggett〔29〕之外，还有H. O. Georgii〔14〕，D. Griffearh〔15〕和D. W. Stroock〔41〕。我们没有涉及的关于随机场的著作有R. S. Ellis〔23〕，C. H. Preston〔35〕和〔36〕，D. Ruelle〔38〕和〔39〕，Ya. G. Sinai〔40〕，关于渗流理论有H. Kesten〔25〕。与此有关的还有“随机环境中的随机过程”，“多参数（多指标）随机过程”等，目前都十分活跃。

关于概率与物理的另一个值得注意的方向是量子概率。它已不是Kolmogorov公理意

义下了的概率论了。

这一部分内容取材于笔者的〔7〕。

# 第二部分 概率与分析、几何——Malliavin随机变分学

## 1. 偏微分方程与随机微分方程

熟知，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\Delta u \\ \lim\limits_{t\searrow 0} u(t,x)=\varphi(x), x\in R^n, \varphi\in C^2(R^n) \end{cases}$$

有唯一解

$$u_\varphi(t,x)=\int\varphi(y)P(t,x,dy) \quad (1)$$

此处

$$P(t,x,dy)=(2\pi t)^{-n/2}\exp\left[-\frac{|x-y|^2}{2t}\right]dy$$

它是n维布朗运动的转移概率函数。这是把微分方程与概率论联系起来的原始出发点。实际上，上面的热方程相对于关于布朗运动的Kolmogorov向后方程。我们留意，对于每$t>0$，这个$P(t,x,\cdot)$关于Lebesgue测度有光滑密度。

布朗运动的数学描述如次：记$\mathbf{Q}$为定义在$[0,\infty)$上取值于$R^n$的连续函数的全体，初值为零。在$\mathbf{Q}$上赋紧集上一致收敛拓扑，它产生σ代数$\mathbf{B}$。再设$\mathbf{B}_t$是由$\theta(s)$（$0\leqslant s\leqslant t$）（$\theta\in\mathbf{Q}$）生成的σ代数。定义（$\mathbf{Q}$，$\mathbf{B}$）上的Wiener测度如次：

$$\mathbf{w}(\theta(t+h)\in\Gamma \mid \mathbf{B}_t)=(2\pi h)^{-n/2}\int_\Gamma e^{-|y-\theta(t)|^2/2h}dy$$

$$t\geqslant 0, h>0, \Gamma\in\mathbf{B}(R^n)\text{。}$$

我们称$(\{\theta(t)\}_{t\geqslant 0}\ \{\mathbf{B}_t\}_{t\geqslant 0}, \mathbf{w})$为布朗运动。

定义布朗运动的泛函（又称wiener泛函）

$$X(t,x,\theta)=x+\theta(t), \quad (2)$$

则（1）成为

$$u_\varphi(t,x)=E^{\mathbf{w}}\varphi(X(t,x))$$

此处$E^{\mathbf{w}}$表示关于Wiener测度$\mathbf{w}$的数学期望。这样，我们就用泛函$X(t,x,\cdot)$表示了方程的解。再与（1）比较，我们导出如下基本关系：

$$p(t,x,\cdot)=\mathbf{w}_0 X^{-1}(t,x) \quad (3)$$

此处$\mathbf{w}_0 f^{-1}(B)=\mathbf{w}[f\in B]$。当然，因为算子是Δ，在目前的情况下，上式是平凡的。

一般地，代替（2），我们考虑随机积分方程

$$X(T,x)=x+\int_0^T\sigma(X(t,x))d\theta(t)+\int_0^T b(X(t,x))dt$$

（取σ=单位矩阵I，b=0，（4）便化为（2））。那么，

$$E^{\mathbf{w}}[\varphi(X(t,x))]=u_\varphi(t,x)$$

将给出方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial u} = Lu, \\ \lim\limits_{t \searrow 0} u(t,x) = \varphi(x), \qquad x \in R^n \end{cases}$$

的解，此处

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

而$a(x) = \sigma(x)\sigma(x)^*$。与前面一样，我们也得到（3）式。

我们注意，在这种较一般的情况下，（3）式的左方是一个比较抽象的量，没有解析表达式。而其右方可以用迭代法得到：命

$X^{(0)}(T,x) = x$

$X^{(n+1)}(T,x) = x + \int_0^T \sigma(X^{(n)}(t,x))\,d\theta(t) + \int_0^T b(X^{(n)}(t,x))\,dt,\ n \geqslant 1$

则$\lim\limits_{n\to\infty} X^{(n)}(T,x) = X(T,x)$。这表明了用概率方法研究微分方程更具体和更直观。这正是引进Itô积分的原始观点。

## 2. Itô 积分

方程（4）中含有$d\theta(t)$。它不是普通的积分。事实上，布朗运动是几乎处处不可微的，而且被积函数也是随机的。区别于Riemann—Stieltjes积分，Itô取左端点。例如说对于一维布朗运动，

$$\int_0^1 \theta(t)\,d\theta(t) \overset{\text{定义}}{=} \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{2^n-1}\theta\left(\frac{k}{2^n}\right)\left[\theta\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - \theta\left(\frac{k}{2^n}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\theta(1)^2 - \frac{1}{2}\theta(0)^2 - \frac{1}{2}。$$

极限是在$L^2$意义下取的。

相应于微积分基本公式，我们有Itô公式（一维情形）：

$$f(\theta(t)) - f(0) = \int_0^1 f'(\theta(s))\,d\theta(s) + \frac{1}{2}\int_0 f''(\theta(s))\,ds.$$

这里，与通常微分基本公式相比，右方增加了二阶项。

我们已经从分析的角度看出了Itô积分与通常积分的不同之处。如果用几何的语言来说，为描述随机曲面，用一阶切向量去逼近是不够的，换言之，随机微分几何本质上应当是“二阶微分几何”。这是它区别于通常微分几何（无妨称为“一阶微分几何”）的主要标志。

相应于微积分另一基本公式——分部积分公式，我们也有随机积分的分部积分公式。不过，应把对布朗运动的随机积分改成对半鞅的随机积分，此公式才能得到较好的描述。然而，困难得多的是另一种意义下的分部积分公式。这是下节的主题。

## 3. Malliavin 微分

P. Malliavin通过对泛函$X(t,x)$的某种微分引出Wiener空间上的一个分部积分公式。以此来研究$P(T,x,\cdot) = E^w 0 X^{-1}(T,x)$的密度的光滑性。

先看密度函数的存在性。由经典的Sobolev空间理论知道：如果$\mu$是$R^n$上的一个概率测度，对于每$k$，存在$\psi_k \in L^1(\mu)$使

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\,du = -\int \varphi\psi_k\,du,\quad \varphi \in c_0^\infty(R^n)$$

则μ有密度f。即$\mu(dx)=f(x)dx$。这实质上是一种分部积分公式。把μ换成$p(t,x,\cdot)=\mathbf{W}\circ x(t,x)^{-1}$，我们要做的就是寻求$\psi_k(t,x,X(t,x))\in L^1(\mathbf{W})$，$1\leqslant k\leqslant n$，使得

$$E^{\mathbf{W}}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\circ x(t,x)\right]=-E[\varphi\circ x(t,x)\psi_k(t,x,X(t,x))]$$

$\varphi\in C_0^\infty(R^n)$。

这是 Wiener空间（$\mathbf{Q},\mathbf{B},\mathbf{W}$）上的分部积分公式。

当然，$\psi_k$应当由关于$X(t,x)$的某种微分运算得到。问题在于：$X(t,x)$关于$\mathbf{Q}$上的任何一种Banach范数都不连续，更谈不上使用Banach空间上的微分法。Malliavin的主要贡献之一是引进算子$\mathbf{L}$——它是无穷维Ornstein—Uhlenbeck过程的无穷小算子，来刻划上述的$\psi_k$。这种方法经过D. W. Stroock的发展而称为Malliavin—Stroock方法。它的优点是比较自然和直观。第二种方法是使用Frechet导数。这种方法使用较多的泛函分析，更为直接，称为Meyer—Shigckawa方法。第三种方法是直接的概率方法，属于J. M. Bismut。前两种方法实质上是等价的。后一种方法有所不同。

理解这些方法最好的途径是考察有限维空间。例如说对于第二种，取$\mathbf{Q}=R^N$，

$$\mathbf{W}(d\theta)=(2\pi)^{-N/2}\exp(-|\theta|^2/2)d\theta$$

此处$|\cdot|$为通常的欧氏范数。为了与后面一致，我们也用H表示$R^n$，并用$(\cdot,\cdot)_H$表示通常的欧氏内积。对于任给的$\phi\in C_\uparrow^\infty(R^N)=C_\uparrow^\infty(R^n,R)$（$R^N$上光滑实函数、函数本身及各阶偏导数均为多项式所控制），定义$D\phi$：$\mathbf{Q}\to H$如次

$$(D\phi(\theta),h)_H=\frac{d}{d\xi}\phi(\theta+\varepsilon h)|_{\xi=0}$$

显然，$D\phi$是通常的$\mathrm{grad}\phi$。其次，设$\psi\in C_\uparrow^\infty(R^N,H)$，并定义

$$\partial\psi(\theta)=\sum_\mu[-(D\psi(\theta),h_\mu\otimes h_\mu)_{H\otimes H}+(\theta,h_\mu)_H(\psi(\theta),h_\mu)_H]$$

此处$\{h_\mu\}$为H中的标准正交基。如使用通常记号，则

$$\partial\psi=-\mathrm{div}\psi+\theta\cdot\psi。$$

现在，由分部积分立得

$$\int(D\phi,\psi)_H d\mathbf{W}=\int\phi\partial\psi d\mathbf{W}。$$

其次，记$A=(D\phi,D\phi)_H$，并设$\varphi\in C_0^\infty(R^1)$，如果$A\geqslant\varepsilon>0$，那么，我们将立即得到

$$E^{\mathbf{W}}[\varphi'\circ\phi]=-E^{\mathbf{W}}[\varphi\circ\phi\psi]$$

这儿

$$\psi=A^{-2}(DA,D\phi)_H-A^{-1}\partial D\phi。$$

这便导出所需的结果。

在这种简单情形下，对$\phi$已提出了两个要求：$\phi$的光滑性及A的正性。把这一手法推广到Wiener空间，要点是：以Sobolev光滑性代替$C_\uparrow^\infty$，而用$1/A$的可积性代替$A\geqslant\varepsilon$。

现在，考虑一般情况。不失一般性，可把前面的$\mathbf{Q}$改为

$$\mathbf{Q}=\{\theta\in c([0,\infty);R^n):\theta(0)=0,\ \lim_{t\to\infty}\frac{|\theta(t)|}{1+t}=0\}$$

它是以

$$\|\theta\|_Q\equiv\sup_{t\geqslant0}\frac{|\theta(t)|}{1+t}$$

为范数的Banach空间。再记

$H=\{h\in\mathbf{Q}:h$绝对连续且导函数$\dot h\in L^2([0,\infty);R^n)\}$那么，H是以

$$\|h\|_H \equiv \|\dot{h}\|_{L^2((0,\infty),R^n)}$$

为范数的Hilbert空间。H可连续地嵌入Q，而且在Q中稠。

我们有

$$Q^* \subset H^* = H \subset Q。$$

取定H中的标准正交基$\{h_\mu: \mu \geqslant 1\} \subset Q^*$。定义坐标函数

$$x_\mu(\theta) = \langle h_\mu, \theta \rangle, \quad \theta \in Q。$$

记P为$x_\mu$的多项式函数的全体，即形如$\{x_{\mu_1}^{k_1} \cdots x_{\mu_n}^{k_n}: k_1, \cdots, k_n \geqslant 1, n \geqslant 0\}$的线性组合。

给定实可分Hilbert空间E，设$P(E)$为$\phi e$（$\phi \in P$，$e \in E$）的线性扩张，$P(E)$中的元素称为定义在Q上取值于E的多项式。对于每$q \in (1,\infty)$，$P(E)$是

$L^q(W; E) \equiv \{\phi$：$\phi$是从Q到E的可测映射且

$$\|\phi\|_q \equiv (\int \|\phi\|_E^q dW)^{1/q} < \infty\}$$

的稠子集。再则，定义

$$H^0(E) = E, H^{m+1}(E) = H \otimes H^m(E), m \geqslant 0。$$

给定$\phi \in P(E)$，定义$D\phi$：$Q \to H(E)$如下

$$(D\phi(\theta), h \otimes e)_{H(E)} = \frac{d}{d\xi}(\phi(\theta + \xi h), e)_E \Big|_{\xi=0},$$

$$h \in H, \ e \in E。$$

对于$\psi \in P(H(E))$，我们定义$\partial\psi$：$Q \to E$如次：

$$(\partial\psi(\theta), e)_E = \sum_\mu [-(D\psi(\theta), h_\mu \otimes h_\mu \otimes e)_{H^2(E)} + x_\mu(\theta)(\psi(\theta), h_\mu \otimes e)_{H(E)}]$$

那么，$D\phi \in P(H(E))$，$\partial\psi \in P(E)$而且

$$\int (D\phi, \psi)_{H(E)} dW = \int (\phi, \partial\psi)_E dW$$

这与有限维空间情形完全一样。固定$p \in (1,\infty)$，不难证明D：$L^p(W; E) \to L^p(W; H(E))$是可闭算子，记其闭扩张为$\bar{D}^p$。由它导出伴随算子$(\bar{D}^p)^{*p}$：$L^{p'}(W; H(E)) \to L^{p'}(W; E)$，此处$p'$为p的共轭指数：$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$。关于$\partial$也有类似的断言。这方面最深刻的结果之一（主要归功于P. A. Meyer）是：$(\bar{D}^p)^{*p} = \bar{\partial}^{p'}$，即

$$E^W[(D\phi, \psi)_{H(E)}] = E^W[(\phi, \partial\psi)_E]$$

$$\phi \in Dom(\bar{D}^p; E), \psi \in Dom(\bar{\partial}^{p'}; H(E))。$$

其证明类似于Sobolev空间的构造方法。然而，在经典的Sobolev空间理论中，使用的是$R^n$上的Fourier分析。在那里Lebesgue测度的平移不变性起着决定性作用。但在这里，即在Wiener空间上，W并非平移不变的，而只是拟不变的，因而要困难得多。实际上，最近才搞得比较清楚。

类似地，对于每$m \geqslant 1$，我们定义可$D^m$：$P(E) \to P(H^m(E))$和$\partial^m$：$P(H^m(E)) \to P(E)$及它们的闭扩张$\bar{D}^{m,p}$等。记$W_p^m(E) = Dom(\bar{D}^{m,p}; E)$，

$$T(E) = \bigcap_{p \in (1,\infty)} \bigcap_{m=1}^{\infty} W_p^m(E)$$

在$W_p^m(E)$上定义范数

$$|||\phi|||_p^{(m)}=\left[\sum_{\mu=0}^{m}\|D^\mu\phi\|^p_{L^p(W;H^m(E))}\right]^{1/p}$$

由这一族范数所决定的$\mathbf{T}(E)$上的拓扑，$\mathbf{T}(E)$是一个可分的Fréchet空间。$\mathbf{T}(E)$中的元素称为光滑的，它就是我们前面所述的Sobolev光滑性。

下面是Malliavin的基本定理。

设$\phi\in\mathbf{T}(R^n)$并置$A=[(D\phi_i,D\phi_j)_H]_{1\leqslant i,j\leqslant n}$。$\Delta=\det A$。如果$1/\Delta\in\bigcap_{p=1}^{\infty}L^p(W)$，则对于每一个$\psi\in\mathbf{T}(R^1)$和$\varphi\in C_0^\infty(R^n)$，我们有

$$E^W\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\circ\phi\right)\psi\right]=-E^W\left[(\varphi\circ\phi)(R_i\psi)\right]$$

$$1\leqslant i\leqslant n$$

此处$R_i\psi\in\mathbf{T}(R^1)$：

$$-R_i\psi=\sum_{j=1}^{n}\left(\psi[D(A^{-1})^{ij},D\phi_j)_H\right.$$

$$\left.+(A^{-1})^{ij}\partial D\phi_j]+(A^{-1})^{ij}(D\psi,D\phi_j)_H\right)。$$

## 4. 亚 椭 圆 性

将上述结果应用于$\phi=X(t,x)$（它是前面所述随机积分方程的解），关键在于估计Malliavin协方差矩阵$A=[(DX_i(t,x),DX_j(t,x))_H]_{1\leqslant i,j\leqslant n}$。这之所以可能，是因为后者仍然是某个随机积分方程的解。显然，如果$X(t,x)$所对应的扩散过程的随机性越大（即协方差阵A的det越大），那么，$1/\Delta$的可积性越好，进而$P(t,x,\cdot)=W\circ X(t,x)^{-1}$的光滑性也就越好。这样，矩阵A是微分方程基本解$p(t,x,\cdot)$光滑性的一种非常精细的刻划——轨道观点的刻划。

熟知，对于二阶椭圆型微分算子L，

椭圆性⇒次椭圆性⇒亚椭圆性。

L. Hörmander（1967）对于形如

$$L=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\gamma}X_j^2+X_0+c$$

（此处$X_i,c\in C_0^\infty(R^n)$）的算子，证明了：只要$\mathrm{Lie}(X_0,\cdots\cdots,X_r)$在开集$G\subset R^n$上满秩，那么L在G上就是亚椭圆的。他实际上证明了次椭圆性。Hörmander的估计是如此之精确，以至于人们能够证明：若$X_i$, C为实解析的，那么，为保证L的次椭圆性，满秩性条件也是必要的。然而，早就有反例（参见〔33〕）表明这个条件对于亚椭圆性并非必要。

Malliavin随机变分学最先的应用是亚椭圆性研究。新近，S. Kusuoka & D. W. Stroock在他们的长篇论文〔26〕中对于Hörmander算子，给出了至今为止最一般的亚椭圆性的充分条件。对于一种特殊情况，他们得到了充要条件。

## 5. 指 标 定 理

使用Malliavin calculus，J. M. Bismut〔1〕给出了Atiyah—Singer指标定理和Lefschetz不动点公式的概率证明。新近，他在〔2〕中给出了Witten和Atiyah关于Dirac算子指标的轨道积分表现想法的严格证明。还讨论了陈省身示性类的某种推广。

在第一部分里，我们考虑的是“离散”的状态空间$\{-1,+1\}^{Z^d}$或$\{0,1,2,\cdots\}^{Z^d}$。如果考虑“连续”的状态空间$R^{Z^d}$,我们自然导出另一类无穷质点马氏过程——无穷维扩散过程。Holley和Stroock曾使用Malliavin随机变分学，研究了连续型Ising模型有限维分布的密度的存在性。这是Malliavin随机变分学对于统计物理的应用。这一工具也已应用于量子场论。关于Malliavin随机变分学对于分析、几何和随机控制等的众多的应用，请参考他本人的综合报告〔30〕。对于这一部分，我们只列举少量〔30〕中没有的近期文献。

## 参考文献


〔1〕Bismut, J. M., The Atiyah—Singer theorems. A probabilistic approach. I. The index theorem. J. Funct. Anal. 57, 56—99 (1984); II. The Lefschetz fixed point formulas. J. Funct. Anal. 57, 329—348 (1984).

〔2〕Bismut, J. M., Index theorem and equivariant cohomology on the loop space, Commun. Math. Phys. 98, 213—237 (1985).

〔3〕Chen, M. F., Infinite dimensional reaction—diffusion processes, 已投“数学学报”.

〔4〕Chen, M. F., Couplings for jump processes, 已投“数学学报”.

〔5〕陈木法，抽象空间中的可逆马尔可夫过程，数学年刊，1,437—451 (1980)。

〔5〕陈木法，有限流出有势Q过程，数学学报，25，136—166 (1982)。

〔7〕陈木法，跳过程与粒子系统，北京师大出版社，1986.

〔8〕Chen, M. F., Existence theorems for interacting particle systems with non—compact state space, 已投“中国科学”.

〔9〕Chen, M. F., Strooch, D. W., $\lambda_\pi$—invarant measures, Lectures, Notes in Mathematics, 986,205—220 (1983).

〔10〕陈木法、郑小谷，抽象空间中q过程的唯一性准则，中国科学，中文版：4,298—308 (1982)，英文版，1,11—24 (1983)。

〔11〕戴永隆，Gibbs态与可逆随机场，数学学报。

〔12〕丁万鼎、陈木法，紧邻速度函数的拟可逆测度，数学年刊，2,47—59 (1981)。

〔13〕Ding Wen—ding, Zheng, Xiao—gu, Ergodic theorems for linear growth processes with diffusion, preprint.

〔14〕Georgii, H. O., G Canonical Gibbs States, Lecture Notes in Mathematics, 761 (1979)。

〔15〕Griffeath, D., Additive and Cancellative Interacting Particle Systems, Lecture Notes in Mathematics, 724 (1979)。

〔16〕侯振挺，Q过程的唯一性准则，中国科学，中文版：2,115—130 (1974)；英文版：15，141—159 (1974)。

〔17〕侯振挺，Q过程的唯一准则，湖南科学技术出版社，1982。

〔18〕侯振挺、陈木法，马尔可夫过程与场论，科学通报，中文：20，913—916 (1980)；英文：10，807—811 (1980)。

〔19〕侯振挺、郭青峰，齐次马可列夫过程构造论中的定性理论，4,239—262 (1976)。

〔20〕侯振挺、郭青峰，齐次可列马尔可夫过程，科学出版社，1978．

〔21〕胡迪鹤，抽象空间中q过程的构造理论，数学学报，2,150—165（1966）。

〔22〕胡迪鹤，抽象空间中q过程的唯一性准则，数学学报，5,750—757（1980）。

〔23〕Ellis, R. S., Entropy, Large Deviations, and Statistical Mechanics, Springer—Verlag 1985.

〔24〕Kac, M., Integration in Function Spaces, Fermi Lectuqes. Academia Nazionale dei Lincei Scuola Normale Superiore, Pisa, 1980。

〔25〕Kesten, H. Percolation Theory for Mathematicians. Birkhauser, Boston, 1982.

〔26〕Kusuoka, S. and Stroock, D. W., Applications of Malliavin calculus, p Part II. Univ. Tokyo, 1985.

〔27〕Kusuoka, S. and Stroock, D. W., The partial Malliavin calculus and its applicatcon to non—linear filtering, Stochastics (1984).

〔28〕李世取，混合型无穷质点马氏过程的有势性和可逆性，数学年刊，6,773—780（1983）。

〔29〕Liggctt, T. M., Interacting particle Systems. Springer—Verlag, 1985.

〔30〕Malliavin, p., Analyes differentielle sur l' espace de Wiener, Proceeding of the International Congress of Mathematicians, 10—14 (1983), Warszawa.（严加安译，数学译林，4：3（1985））.

〔31〕Mccoy, B. M., and Wu Tai Tsun, The Two—Dimensional Ising Model Harvard Univ. Press. Cambridgc, Massachusetts, 1973.

〔32〕Nicolis, G. and Prigogine, I., Self—Organization in Nonequilibrium Systems, John Wiley & Sons, 1977。

〔33〕Oleinik, O. A., and Radkevic, E. V., Second Order Equations With Nonnegative Characteristic Form. 1973.

〔34〕Preston, C., Gibbs States on Countable Sets, Combridge Tracts in Maths. No: 68, London, Cambribge Univ. Press. 1974.

〔35〕Preston, C., Random Fields, Lecture Notes in Mathematics, 534 (1976)（严士健、陈木法、丁万鼎译：随机场，北京师大出版社，1982）。

〔36〕钱敏、侯振挺等，可逆马尔可夫过程，湖南科技出版社，1979．

〔37〕任开隆，Potentiality and reversibility for the N—Spin—flip processes, Acta Math. Sci (China), 3,300—320 (1983).

〔38〕Ruelle, D., Statistical Mechanics, Rigorous Results. Benjamn, Reading. 1969。

〔39〕Ruelle, D., Thermodynamic Formalism. Addison—Wesley, Reading, 1978。

〔40〕Sinai, Ya. G., Theory of Phase Transitions, Rigorous Results. Pergamon, Oxford, 1982。

〔41〕Stroock, D. W., Lectures on Infinite Interacting Systems, Lectures in Math. Kyoto Univ. 11. 1978。

〔42〕Stroock, D. W., On the spectrum of Markov semigroups and the existencae of invariant measures, Functional Analysis in Markov Processes, Proceedings Edited by M. Fukushima. Springer—Verlag, 287—307, 1981。

〔43〕唐守正，自旋变相过程的可逆性，数学学报，25, 306—314（1982）.

〔44〕王梓坤，生灭过程与马尔可夫链，科学出版社，1980 .

〔45〕严士健、陈木法，Multidtimensional Q—processes, 已投"数学年刊".

〔46〕Yan, S. J., Chen, M. F. and Ding, W. D., Potentiality and reversibility for general speed functions, Chinsee Ann. Math. （I）。5, 572—586（1982）；（II）。6, 705—720（1982）.

〔47〕杨向群，可列马尔可夫过程构造论，湖南科技出版社，1981 .

〔48〕曾文曲，两类无穷质点马氏过程的可逆性，数学年刊，6, 763—772（1983）,

〔49〕郑小谷，抽象空间中的有势马尔可夫过程，北京师大学报，（I）。4, 15—32（1981）；（II）1, 1—10（1983）。

〔50〕郑小谷，Qualitative theory for q—processes in abstract space, Acta Math. & Phys. 2:1.（1982）.

〔51〕郑小谷、丁万鼎，广义线性增长过程的存在定理，已投"数学物理学报"。

# SOME NEW DEVELOPMENTS IN PROBABILITY THEORY

**Mu-Fa Chen**

(Beijing Normal University)

This paper is based on the lecture presented at the 50th anniversiry conference of Chinese Mathematical Society. our purpose is to introduce the current features of probability theory to the audiences come form various branches of mathematics. We emphasize on the permeations between probability theory and physics, analysis and geometry. In the first part. we start at a classical subject, jump processes, by showing some new contributions to it, then go to infinite interacting particlensystems and large deviatons. In the second part, we begin with Itô's stoehastical integral, then go to Malliavin calculus and aits applications to partial differential equations and geometry .