

## 经济系统的产品排序与结构优化\*

陈彬<sup>1</sup> 陈木法<sup>1,2</sup> 谢颖超<sup>1</sup> 杨婷<sup>1\*</sup> 周勤<sup>1\*</sup>

(<sup>1</sup>江苏师范大学数学研究院, 数学与统计学院, 徐州, 221116)

(<sup>2</sup>北京师范大学数学学院, 数学与复杂系统教育部重点实验室, 北京, 100875)

**摘要:** 作为文 [1] 的继续和深入, 本文围绕经济平衡的中心, 以数学为工具, 探索经济中的两个主题: 一是经济系统中的“支柱”产业和“瓶颈”产业、“拳头”产品和“弱势”产品, 即产品 (产业) 的排序和稳定性分析; 二是预测和调整, 优化经济结构的设计与调试.

**关键词:** 投入产出法; 华罗庚模型的更新; 产品排序; 结构优化; 拟对称化算法

**中图分类号:** F2; F224.9

**英文引用格式:** CHEN B, CHEN M F, XIE Y C, et al. Ordering of products and optimization of structure matrix in economy [J]. Chinese J Appl Probab Statist, 2022, 38(4): 475-504. (in Chinese)

### §1. 引言

现在, 经济的重要性已经不会有什么争议了. 这不仅关乎我们每个人的生活和命运, 也极大地影响着国家的未来. 如同气象预报、医疗诊治一样, 经济是一个极为复杂的系统. 回想卅年前, 能准确预报明日的天气就很不了起了; 现在预报一周、15天天气也已习以为常. 想想当年所有的手术对于每个患者都是天大的事, 如今的微创手术简直太普及了. 究其原因, 就是大量的数学直接进入第一线. 例如微创, 引导者是快速的图像识别, 即高效算法. 相比许多科学分支而言, 经济学中所使用的数学还很有限, 是值得开垦的广阔天地.

作为文 [1, 3] 探索的继续, 本文研究两个问题: 一是经济产品 (产业) 的排序和分类, 二是经济结构的优化. 我们的出发点是文 [1] 对华罗庚经济最优化理论 [3] 的修正和更新. 区别于已有经济理论的主要标志在于: 华先生的理论是定量的, 可计算的. 最近, 我们也已得到适用于本专题的高效算法 [1, 2]. 这些工作构成我们理论分析的基本工具.

本文的组织如下. 在下一节中, 我们概述本文所要用到的预备知识. §3 “产品 (产业) 等级 (排序) 与稳定性分析” 和 §4 “经济结构的优化” 是本文的重心. 我们不仅介绍方法, 而且给出若干例证. 有关理论证明推迟到 §5.

\*国家自然科学基金项目 (批准号: 12090011、11931004、11671178)、国家重点研发计划项目 (批准号: 2020YFA0712900)、教育部“双一流”建设学科和江苏高校优势学科建设工程资助.

\*共同通讯作者, E-mail: yangting@jsnu.edu.cn; graceqinzhou@jsnu.edu.cn.

本文 2022 年 6 月 17 日收到, 2022 年 6 月 21 日收到修改稿.

§3 关于 4 个实际模型的分析, 足以展示经济系统的敏感性, 也说明以数学为工具的深度分析之不可缺, 所得到的结论决非可以主观想象的. 我们相信经济发展以平衡为中心, 破坏了平衡, 必定要付出巨大代价. 例如当前许多国家面临着出生率下降的人口危机, 造成了经济核心要素—劳动力的短缺, 恐怕百年也不足以回补. 所以, 我们需要切实学习经济, 敬畏并忠实于科学. §4 提供了一种以输出产综为目标的优化结果, 既能达到经济目标, 又能保持经济系统的稳定性, 还提供了提高经济发展速度的可行选择.

本文是应用华先生倡导的经济优化理论于经济实践的初步尝试, 还有大量的工作有待完成.

## §2. 预备知识

本节的基本概念、所有结果和算法均取自文 [1]. 我们将所关心的产品所构成的产综 (固定单位: 吨, 吨, … 等) 记为  $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(d)})$ . 要了解当前的经济状况, 需要调查如下三种数据:

- 去年的投入产综:  $x_0 = (x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \dots, x_0^{(d)})$ ;
- 今年的产出产综:  $x_1 = (x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(d)})$ ;
- 结构方阵 (消耗系数方阵):  $A = (a_{ij} : i, j = 1, 2, \dots, d)$  (本文恒假定时齐: 即  $A$  与时间无关).

它们之间的关系为:  $x_0 = x_1 A$ . 一般地, 有  $x_0 = x_n A^n$  ( $n \geq 1$ ). 自此以后, 常假定  $A$  非负不可约. 这是无消费的理想模型. 贯穿全文, 分别以  $\rho(A)$ ,  $u$  (行向量) 和  $v$  (列向量) 表示  $A$  的最大特征值和相应的左、右特征向量. 但在实践中, 消费不可缺, 故需将反映经济本质属性的矩阵  $A$  换成随后的  $A_\alpha$ . 换言之, 本文只考虑更新的消费模型:

$$x_0 = x_n A_\alpha^n, \quad n \geq 1.$$

其中  $A_\alpha = (1 - \alpha)A + \alpha I$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $I$  为恒等矩阵. 显然, 当  $\alpha = 0$  时,  $A_\alpha = A$ .

对于上述模型, 我们有如下结果.

**定理 1** ([1; 定理 7(2)]) 第  $n$  步产出  $x_n$  是方程  $x_0 = x_n A_\alpha^n$ ,  $n \geq 1$  的唯一解, 其中  $A_\alpha$  如上, 而  $x_0$  为投入. 此时最佳发展速度为  $\rho(A_\alpha)^{-1}$ :

$$\rho(A_\alpha) = (1 - \alpha)\rho(A) + \alpha, \quad \alpha \in (0, 1).$$

此外,  $A_\alpha$  与  $A$  有相同的最大左、右特征向量  $u$  和  $v$ .

**推论 2** ([1; 推论 8]) 如设经济的增长速度为  $\delta \in (0, \min\{\rho(A)^{-1} - 1, 1\})$ , 则第  $n + 1$  年的可用消费量为

$$\xi_n = \frac{1 - (1 + \delta)\rho(A)}{\delta}(x_{n+1} - x_n),$$

其中  $x_n$  为递推方程

$$x_n = x_{n+1}[(1 - \alpha)A + \alpha I], \quad \alpha := \frac{(1 + \delta)^{-1} - \rho(A)}{1 - \rho(A)}$$

的解,  $x_0$  为预先给定的初值. 反之, 由第  $n + 1$  年的消费不超过  $\xi_n$  可确定最大增长速度  $\delta$ .

华罗庚经济最优化理论的核心是如下稳定性: 经济唯一稳定解是取投入  $x_0$  为  $A$  的最大左特征向量  $u$ , 如若不然, 经济必定会走向崩溃, 即在经济运行到某年之后, 必定出现负值产品. 为理解这个关键点, 自然会考虑  $A$  为转移概率矩阵  $P$  (元素非负, 行和为 1 的矩阵) 的特殊情形. 此时左正特征向量就是  $P$  的平稳分布  $\pi$ : 即  $\pi = \pi P$ . 在不可约条件下, 此平稳分布唯一, 由此可体会到离开平稳分布系统就会出问题. 进一步, 想到将  $A$  变换为  $P$ , 即定义

$$P = (p_{ij}), \quad p_{ij} = \frac{a_{ij}v_j}{v_i\rho(A)}, \quad i, j \in E \iff P = D_{v^{-1}} \frac{A}{\rho(A)} D_v. \quad (1)$$

其中,  $v$  (列向量) 是  $A$  相应于  $\rho(A)$  的最大右特征向量,  $D_w$  是以向量  $w$  为对角线元素的对角矩阵. 由定义立即得到:  $P \geq 0$ ,  $P\mathbf{1} = \mathbf{1}$ , 其中  $\mathbf{1}$  是元素恒为 1 的列向量. 容易看出,  $P$  与  $A$  有相同的不可约性.

**引理 3** ([1; 引理 9(4)])  $P$  的最大特征值  $\rho(P) = 1$ , 其所对应的右、左特征向量分别为  $\mathbf{1}$  和  $u \odot v$ . 特别地,  $P$  有平稳分布  $\pi = u \odot v / uv$ :  $\pi = \pi P$ , 其中  $u \odot v$  是向量  $u$  和  $v$  的分量乘积所构成的向量.

**引理 4** ([1; 引理 10]) 相应于  $A_\alpha = (1 - \alpha)A + \alpha I$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ , 我们有

$$P_\alpha = (1 - \beta)P + \beta I, \quad \beta := \alpha[(1 - \alpha)\rho(A) + \alpha]^{-1}.$$

此外,  $\{P_\alpha : \alpha \in [0, 1)\}$  (当然,  $P_0 = P$ ) 有共同的最大特征值 1 及其左、右特征向量  $\pi$  和  $\mathbf{1}$ .

如同文 [1; §4] 所述, 多年前引进的  $P$  可用于证明华氏模型的崩溃定理. 近些年来, 此工具发挥越来越重要的作用, 不仅可将华氏稳定性理论转化为马氏链的同样理论, 而且在本文即将研究的两个问题中也发挥着关键作用.

本文的基石之一是最大特征值及其左、右特征向量的计算. 从系统的稳定性研究中得知: 我们不仅需要这三个量, 而且还要求较高精度. 关于计算主特征对 (最大特征值及相应的特征向量), 典型算法有三种: 幂法 (PI)、固定推移的反幂法 (IPI<sub>f</sub>) 和变动推移的反幂法 (IPI<sub>v</sub>). 认识这三种算法的优、缺点, 是我们得到高效算法的关键所在. 文 [2; §1 末尾] 分别从三个方面给出了上述三种算法的比较. 我们用  $U$  表示算法,  $\mathcal{D}(U)$ 、 $s(U)$ 、 $t(U)$  分别表示算法  $U$  的合适的初始区域、收敛速度和计算复杂度, “ $\prec$ ” 表示从低到高. 那么

$$\mathcal{D}(\text{PI}) \supset \mathcal{D}(\text{IPI}_f) \supset \mathcal{D}(\text{IPI}_v),$$

$$s(\text{PI}) \leq s(\text{IPI}_f) \leq s(\text{IPI}_v),$$

$$t(\text{PI}) \prec t(\text{IPI}_f) \prec t(\text{IPI}_v).$$

对于合适的初值 (可由 (PI) 得到), 变动推移的反幂法的收敛速度很快 (称为难得的“三阶算法”). 但此法的可靠性稍微差一些, 一般只能走几步就容易溢出. 此时可改用收敛慢一些但更安全的固定推移的反幂法来继续提高结果的精度. 这是文中常用的技巧. 我们将在随后的例证中给出更详细的说明.

文 [1; §6] 介绍了新近引进的两种矩阵特征对计算的拟对称化方法:

**第一拟对称化技术.** 用于整平矩阵  $A$ , 即降低其元素的振幅. 给定非负不可约  $A = (a_{ij})$ , 记  $Q = A - D_{A11}$ . 则由  $A$  的不可约性可证方程组  $\mu Q = 0$  有满足初始条件  $\mu_1 = 1$  唯一的正解  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_d)$ . 定义  $A$  的 (第一) 拟对称化  $\hat{A}$ :

$$\hat{A} = D_{\mu^{1/2}} A D_{\mu^{-1/2}}. \quad (2)$$

那么,  $A$  关于  $\mu$  可配称:  $D_{\mu} A = A^* D_{\mu}$  (此处 “\*” 表示转置), 等价于  $\hat{A}$  对称. 这样, 我们就将可配称的  $A$  (通常非对称, 除非  $\mu$  为常数) 化成了对称阵  $\hat{A}$ . 在一般情况下, 我们不能指望  $A$  可配称, 但  $\hat{A}$  常会降低  $A$  的振幅  $\max A - \min\{A \text{ 的非零元}\}$ . 然后通过求  $\hat{A}$  的右特征向量  $\hat{v}$  来计算  $A$  的右特征向量  $v = D_{\mu^{-1/2}} \hat{v}$ , 进而计算  $\rho(A)$ . 由于本文未涉及大矩阵, 故略去此法的例证.

**第二拟对称化技术.** 回忆幂法与反幂法都是以计算特征向量为中心的. 如果该向量的振幅太大, 这根本就不可能实现. 例如随后例 9 的右特征向量  $v$  的图示 (见图 1). 容易想象, 要算出此  $v$  (矩阵 42 阶) 决非易事. 事实上, 使用 Mathematica 运行反幂法时失效. 无疑地, 若将振荡的  $v$  换成近乎常值的向量, 从计算角度看, 那简直是换了一个“新世界”. 下面是我们实现这一步的“绝招”.

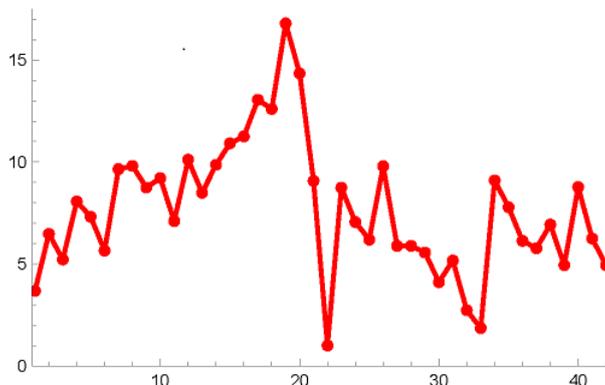


图 1 中国 2007 的最大 (右) 特征向量  $v$   
(横坐标表示产品序号, 纵坐标表示  $A$  的最大右特征向量)

**引理 5** ([1; 引理 16]) 给定  $A$  及其右特征向量  $v$ , 设  $w$  为任一正向量, 命

$$(\bar{A} :=) A_w = D_{w^{-1}} A D_w. \quad (3)$$

则  $A_{\mathbb{1}} = A$ . 再记  $A_w$  的最大 (右) 特征对为  $(\rho(A_w), g_w)$ . 那么, 只要  $\max_i |w^{(i)} - v^{(i)}|$  足够小,  $g_w = w^{-1} \odot v$  就是接近于常值 (即  $\max g_w / \min g_w$  近乎为 1) 的向量.

一般地讲, 对于  $\bar{A}$ , 常用软件所找到的右特征对可能还达不到我们的精度要求. 因此, 我们还需使用

**固定推移的反幂法 (IPI<sub>f</sub>):** 将软件算出  $A$  的最大特征值记为  $z'_0$ . 取推移为  $z_0 = z'_0 + 10^{-7}$ . 对于初向量  $w_0$ , 有两种取法: 一是  $w_0 = \mathbb{1}$ ; 二是使用软件算出的  $\bar{A}$  的最大 (右) 特征向量  $w'_0 =: w_0$ . 得出算法的初值  $(z_0, w_0)$ . 命  $w_n$  为方程

$$(z_0 I - \bar{A})w_n = v_{n-1}, \quad v_n := w_n / |w_n|, \quad n \geq 1$$

的解, 此处  $|\cdot|$  为  $\ell^2$  范数. 再命

$$x_n = \max_{1 \leq k \leq d} \frac{\bar{A}v_n(k)}{v_n}, \quad y_n = \min_{1 \leq k \leq d} \frac{\bar{A}v_n(k)}{v_n}, \quad \frac{\bar{A}v}{v}(k) := \frac{\bar{A}v(k)}{v(k)}.$$

然后计算分量比值  $\bar{A}v/v$  的上、下界和它们的相对误差

$$\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^3, \quad \{1 - y_n/x_n\}_{n=1}^3.$$

这里计算 3 步, 在实践中, 可能一、二步就够了, 算多了反而不好. 视相对误差情况而定. 例如说这里选用 3 步. 得出近似值  $\rho(A) = x_3$ ,  $v = v_3 \odot w$  (其中  $w$  源于上述引理中的变换). 再使用 (1) 式算出  $A$  所对应的  $P$ , 然后使用软件计算  $P$  的最大左特征向量, 记作  $u_0$ . 如必要, 套用刚才的**固定推移的反幂法**提高其精度, 但算的是左, 而非右特征向量. 方程为

$$w_n(z_0 I - P) = u_{n-1}, \quad u_n := w_n / |w_n|, \quad n \geq 1,$$

其中  $z_0 = 1 + 10^{-7}$ . 等价地, 可考虑上述方程的转置. 将所选定的结果, 例如说  $u_3$ , 选作为随后将反复使用的、矩阵  $P$  的左特征向量  $\mu$ .

我们将在例 9 展示此算法的细节.

### §3. 产品 (产业) 等级 (排序) 与稳定性分析

我们已经知道最大左特征向量是华氏经济模型的唯一平衡解, 其自由度为 1, 从而极为敏感. 换言之, 按比例投入的解唯一. 这里, 我们希望对结构矩阵、特别是其左特征向量作进一步分析. 就笔者所知, 还有三个领域常使用最大特征向量: 网络搜索 (WebSearch)、

主成分分析 (PCA) 和量子计算. 后两种情况分别使用实对称矩阵与复厄米矩阵, 它们的特征值都是实的. 当然有最大特征向量, 它常非正 (后者常为复的). 对于网络搜索, 当然是非负矩阵, 甚至常是元素为 0 或 1 的较为简单的矩阵. 此时使用的是最大特征向量的由大到小的序, 称为网页等级 (PageRank). 网络搜索输出的顺序用的就是这个序. 类似地, 我们可使用结构矩阵  $A$  来定义产品等级. 然而, 因为这里的  $A$  缺少对称性及前面所提及各种特殊性质、而且要求精密得多的结果, 我们建议使用  $A$  所导出的  $P$  来定义产品等级 (ProductRank): 即采用  $P$  的平稳分布  $\pi$  的排序. 理由是  $P$  已将  $A$  的三大要素集于一身, 故可更全面地反映出系统的本质特征. 从  $P$  看,  $\pi$  是  $P$  的唯一平稳分布, 拥有本质意义和价值. 这样,  $\pi$  的分量取值大的所对应的产品对这个经济系统所起的作用大一些, 而取值小的分量贡献相对小些, 危险性也高些. 前者为经济模型中的主导产业 (统计学中的主成分), 后者是经济中的弱势产业.

本节的余下部分是四个经济模型的分析. 先从最简单模型开始.

**例 6** (1997 年山东省 6 部门投入产出表) 为说明这一想法可行, 让我们回到文 [1; 例 14] 中的山东模型. 由该例的  $A$  出发, 使用 (1) 式算出  $P$  及其最大左正特征向量:

$$\mu = (4.2271, 45.7599, 1.0, 1.95712, 4.98704, 2.77413),$$

(其图像见下例的图 2). 归一化为  $\pi$ , 其排序如表 1:

表 1 山东模型的产品排序

$\pi$	(0.0696331,	0.753804,	0.016473,	0.0322397,	0.0821517,	0.0456983)
排序	③	①	⑥	⑤	②	④

其中圆内的号码表示该分量的排序号. 文 [1; 定理 11] 已证, 使用  $A_\alpha$  ( $\alpha \in (0, 1)$ ) 的稳定性等同于使用  $P_\alpha$  的稳定性. 对于后者, 投入产出法可表示成

$$\mu_0 = \mu_n P_\alpha^n, \quad n \geq 1. \quad (4)$$

等价地,  $\mu_n = \mu_0 P_\alpha^{-n}$ . 由此可定义失衡时  $T_{\mu_0}$  和崩溃时  $T_{\mu_0}^+$  (见 [1; 推论 12]). 简单地说, 它们分别是经济运行中首次出现非正和负分量 (产品) 的时间  $n$ . 表 2 给出关于  $\mu_0$  的三种不同取法  $\{\mu_0^{(j)}\}_{j=1}^3$ :

- (1)  $\mu$  取整数部分,      (2)  $\mu$  取到小数点后 3 位,      (3)  $\mu$  取全 6 位

时崩溃所在的分量的排序号. 头、尾两行都在取值最小的序号 ⑥ 处崩溃, 第二行在近乎最小的序号 ⑤ 和 ④ 处崩溃. 因为迭代算法严重依赖于初值, 这些摄动属正常. 所以产品 ④, ⑤, ⑥ 可视为“瓶颈”或“弱势”产品. 头号产品为 ①, 产品 ② 和 ③ 与之有相当的差距. 表中的第 1 个数 (不带圈者) 为迭代次数, 以下同. 留意本节的 4 个算例都满足  $T_{\mu_0} = T_{\mu_0}^+$ .

表 2 山东模型的稳定性

$T_{\mu_0} \backslash \alpha$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$
$\mu_0$				
$\mu_0^{(1)}$	3 (6)	4 (6)	5 (6)	21 (6)
$\mu_0^{(2)}$	10 (4)	14 (5) (4)	20 (4)	81 (4)
$\mu_0^{(3)}$	13 (6)	17 (6)	25 (6)	104 (6)

$$T_{\mu_0} = T_{\mu_0}^+$$

此例展示了本节研究主题的概貌. 随后的三个模型均取自中国投入产出学会所公布的投入产出表 [6], 可见本文所做的是真正的实证分析. 头一个是 2000 年的, 含 17 种产品; 另两个分别是 2012 年和 2007 年的, 含 42 种产品. 当然, 计算难度随产品数目的增长而增加.

**例 7** (2000 年中国直接消耗系数表) 所讨论的 2000 年的投入产出表可从下述网站上找到 [6; IOtable-China-2000.xls]. 我们所需的是表中的第 2 页: “直耗系数”. 只用到左上角的  $17 \times 17$  方阵. 应当特别注意, 我们所用的矩阵  $A$  乃是此表的转置.

此矩阵  $A$  的最大特征值及相应的右特征向量分别为

$$\begin{aligned} \rho(A) &= 0.6527550793242115, \\ v &= (0.13085011815297237, 0.16739543153120193, 0.1721134231835492, \\ &0.2961972491355031, 0.2560563399140681, 0.21263266425506308, \\ &0.21493433910028065, 0.3015730523400065, 0.26674528714858237, \\ &0.32897592394540803, 0.38951264298222216, 0.3022446138921652, \\ &0.20436003210035425, 0.19014099313158694, 0.2066187597250225, \\ &0.08521345507207828, 0.1981444495806346). \end{aligned}$$

这里, 在计算  $(\rho(A), v)$  时使用了 § 2 末的  $\text{IPI}_f$  (迭代 3 步). 然后, 由  $A$  及其最大右特征对便可算出  $P$ , 进而算出其左特征向量  $\mu$ .

$$\begin{aligned} \mu &= (4.551646027911837, 10.718207273725797, 2.4750480126568433, \\ &11.882516615094413, 7.394869041817426, 10.396899945738642, \\ &9.067767286865232, 31.794912111552502, 2.561333603687989, \\ &24.710454971746945, 47.354871097988195, 1.1727523635254098, \\ &6.155391142272074, 8.032321656772979, 4.255154367502509, \\ &1.4975916275600551, 1.0). \end{aligned}$$

表 3 中, 我们还需要用到  $A$  的最大左特征向量  $u$ , 但这个向量只需使用软件输出即可, 无需再精确化. 此模型的 17 种产品, 关于  $P$  和  $A$  的等级见表 3 后两列. 从表中可以看出: 使用  $P$  或  $A$  的最大左特征向量排序, 头 3 号不变, 尾部变动也不大, 但中间差别显著. 选取  $\mu$  的两位小数、但保证至少四位有效数字作为近似值:

$$\mu_0 = (4.552, 10.72, 2.475, 11.88, 7.395, 10.40, 9.068, 31.79, 2.561, \\ 24.71, 47.35, 1.173, 6.155, 8.032, 4.255, 1.498, 1.0).$$

以此为初值, 计算对于不同的  $\alpha$ , 此模型的崩溃时及崩溃位置 (即首次出现负值的分量). 结果如表 4.

表 3 2000 年模型的产品排序

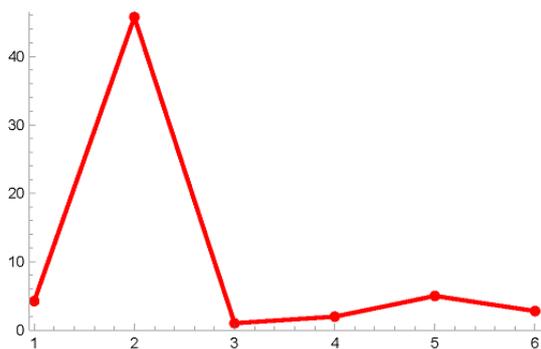
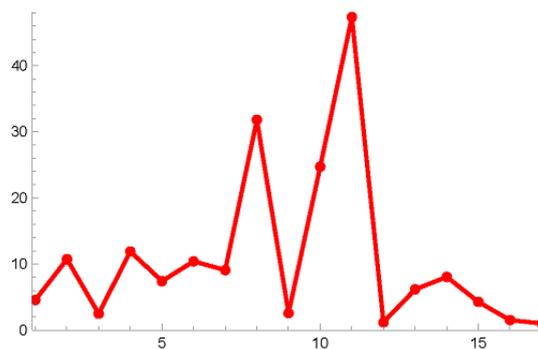
序号	产品	等级 (P)	等级 (A)
1	农业	11	9
2	采掘业	5	4
3	食品制造业	14	14
4	纺织、缝纫及皮革产品制造业	4	8
5	其他制造业	9	11
6	电力及蒸汽、热水生产和供应业	6	5
7	炼焦、煤气及石油加工业	7	7
8	化学工业	2	2
9	建筑材料及其他非金属矿物制品业	13	15
10	金属产品制造业	3	3
11	机械设备制造业	1	1
12	建筑业	16	17
13	运输邮电业	10	10
14	商业饮食业	8	6
15	公用事业及居民服务业	12	12
16	金融保险业	15	13
17	其他服务业	17	16

表 4 2000 年模型的稳定性

$T_{\mu_0} \backslash \alpha$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$
$\mu_0$				
上方的 $\mu_0$	8 (17)	11 (17)	16 (17)	66 (17)

$$T_{\mu_0} = T_{\mu_0}^+.$$

由图 3 可见, 产品 17 (17) 为最小值点, 而产品 12 (16) 和 16 (15) 与之相差很小. 从这里可以看出: 如果产品种类很多时, 除上述排序而外, 在应用中宜将它们作较粗的分类. 例如将产品 11 (1), 8 (2), 10 (3) 归入“拳头”产品; 而将产品 17, 12, 16 归入“弱势”产品. 应当指出: 初值  $\mu_0$  的选取有点艺术, 既不能太粗糙、也不能太精细,  $T_{\mu_0}$  太小或者太大, 都会造成失真. 例如对于很大的  $T_{\mu_0}$ , 累积误差太大, 极易失真.

图 2 山东模型的  $\mu$ 图 3 中国 2000 年的  $\mu$ 

(横坐标表示产品序号, 纵坐标表示  $P$  的最大左特征向量)

上面两例都是使用软件 Mathematica 算的, 熟知数值计算非其特长, 好在矩阵阶数不高. 其中关于  $\mu$ , 因为输出  $\mu P - \mu$  的最大主阶为  $10^{-15}$ , 所以未再使用 §2 末所述的进一步精细化程序. 下面两个模型都是 42 阶, 我们使用三种软件处理, 结果略有差异, 必要时我们会分别列出.

本文之所以要公布一些冗长的数据, 还是因为系统的高度敏感性, 可谓“差之毫厘, 失之千里”. 我们需要忠实地给出必要的原始数据, 以利于读者核证.

**例 8** (2012 年中国直接消耗系数表) 标题所示的投入产出表见 [6; IOtable-China-2012.xls] 的第二部分: “直接消耗系数表”. 我们所需的是其左上角 42 个产品所构成的“投入产出表”. 留心我们选取此表所显示的小数点后 6 位而不是其内涵的 15 位有效数字. 当然, 我们所用的矩阵  $A$  乃是此表的转置. 所关心的 42 种产品见后面的表 8. 首先, 我们需要由  $A$  导出转移概率矩阵  $P$ , 为此, 需要计算  $A$  的最大特征值  $r := \rho(A)$  及其右特征向量  $v$ . 如上例所述, 为保证后面计算的可靠性, 要求它们有较高的精度. 然而, 对于 Mathematica 而言, 此矩阵的阶数不低, 使用反幂法有困难, 所以我们使用软件的缺省算法, 但将计算精度预设 (SetPrecision) 为 18 位, 得出下述结果.

$$r = 0.673843108539483593,$$

$$v = (1.82676495551662166, 2.74776753553026376, 2.34725854354754215,$$

$$3.57806929557328424, 3.46554688254942578, 2.71774755066559681,$$

4.48366551130550661, 4.65155571030367554, 4.58648582248245784,  
 4.64757537072915827, 3.23454074097149347, 4.97202774363033573,  
 4.44755926249872147, 4.91501065230341716, 5.46374414210897186,  
 6.03781735588523638, 5.94620217135840168, 6.21028244323377088,  
 6.30615626775512172, 7.91348913680936406, 6.50755631049315220,  
 4.92612630363205639, 1.21650906178849527, 5.97080785367710209,  
 4.04840201041454240, 3.04318217630673571, 2.87990578184028490,  
 4.80822627422019977, 1.39224883900593732, 3.20212244913737720,  
 2.23315084300877187, 3.45186621339085820, 1.71867520071117452,  
 1.0, 3.99526895583415742, 4.12962246754196904,  
 3.04804388271425530, 2.87861241818218572, 1.24000054254709635,  
 3.69267196904746120, 2.40793897752255059, 1.98882034060220558).

$$P = \frac{1}{r} D_{v^{-1}} A D_v,$$

其中  $v^{-1}$  是以  $v$  各分量的倒数所构成的新向量. 然后计算  $P$  的最大左特征向量  $\mu$ . 依然采用预设 18 位精度的缺省算法, 得出

$\mu = (86.580700002294118, 126.420103472689247, 114.232490934845199,$   
 119.194389423992561, 39.5134518598536163, 96.364873302800382,  
 87.553799276839643, 22.7106641857502983, 33.2221039460928966,  
 95.947870905359831, 168.577447221426273, 656.65110539297994,  
 66.656947282342658, 508.95334289739643, 107.283070238506256,  
 147.334591872794682, 71.867388047919366, 110.361579118273720,  
 162.406944760452497, 406.728847027836107, 46.9610215444537009,  
 7.5159942021898874, 10.5537382068836699, 7.4237873835809267,  
 301.612267054838769, 5.1239923588113495, 2.63766562538306405,  
 20.4427836200320443, 49.447464912283192, 142.405036517463950,  
 23.1888917282271772, 23.2205892592987580, 82.378595453184308,  
 9.4212684872085028, 117.027023350399495, 53.357498377408739,  
 5.4877966458081118, 18.0161722355028708, 1.0,  
 1.05195211877342675, 6.1634087931944729, 1.99841439886250670).

我们指出: 可直接检查所算出的  $\mu$  的精度, 即计算  $\mu P - \mu$ . 在此例和下例中, 使用 Mathematica 时, 结果诸分量的主阶均不大于  $10^{-15}$ . 因此, 我们就省去 § 2 末所述的对  $\mu$  再精确化的手续.

此处, 我们说明, 使用不同软件, 计算结果可能不同, 但至少前些位重合. 首先是使用 R 并经 § 2 末的精确化手续后的输出.

$$r = 0.67384326313448295,$$

$$v = (1.8267596010832479, 2.7477606356766819, 2.3472516385951212,$$

$$3.5780595694363213, 3.4655372304270382, 2.7177404462834684,$$

$$4.4836514049643696, 4.6515417584081735, 4.5864718493257586,$$

$$0.6475620927598262, 3.2345310841063526, 4.9720134786405792,$$

$$4.4475463314151895, 4.9149955565628893, 5.4637273352759292,$$

$$6.0377986510546009, 5.9461838853587849, 6.2102632637509201,$$

$$6.3061367758155411, 7.9134633623152526, 6.5075355302226567,$$

$$4.9261114743914547, 1.2165056500958578, 5.9707897641481917,$$

$$4.0483900611707222, 3.0431734062181599, 2.8798977233604561,$$

$$4.8082116641964161, 1.3922499249902904, 3.2021139701154011,$$

$$2.2331453823974212, 3.4518583678656034, 1.7186756963357299,$$

$$1.0, 3.9952927722474523, 4.1296109793452249,$$

$$3.0480360245504095, 2.8786048331624468, 1.2399974963494151,$$

$$3.6926609856587631, 2.4079333254097279, 1.9888155759611077).$$

下面是使用 MatLab 并经 § 2 末的精确化手续后的输出.

$$r = 0.673843263134483,$$

$$v = (1.82675960108325, 2.74776063567668, 2.34725163859512,$$

$$3.57805956943632, 3.46553723042704, 2.71774044628347,$$

$$4.48365140496437, 4.65154175840818, 4.58647184932576,$$

$$4.64756209275983, 3.23453108410636, 4.97201347864058,$$

$$4.44754633141519, 4.91499555656289, 5.46372733527593,$$

$$6.03779865105460, 5.94618388535879, 6.21026326375093,$$

$$6.30613677581555, 7.91346336231526, 6.50753553022266,$$

$$4.92611147439146, 1.21650565009586, 5.97078976414819,$$

4.04839006117072, 3.04317340621816, 2.87989772336046,  
 4.80821166419642, 1.39224992499029, 3.20211397011540,  
 2.23314538239742, 3.45185836786560, 1.71867569633573,  
 1.0, 3.99529277224745, 4.12961097934523,  
 3.04803602455041, 2.87860483316245, 1.23999749634942  
 3.69266098565877, 2.40793332540973, 1.98881557596111).

我们看到, 三种软件的输出, 对于  $r$  的前 6 位、 $v$  的前 5 位有效数字重合. 对于后两种软件, 均可得到相应于  $P$  的  $\mu$ . 在理论上 (如同我们所做的那样), 作为近似, 可取  $\mu$  的整数部分, 三位小数等等. 但在目前矩阵并非很小的情况下, 宜采用有效位数 (如同计算软件的输出). 为此, 先取  $\mu$  的 8 位有效值  $\mu_0^{(1)}$ .

$$\mu_0^{(1)} = (86.5807, 126.4201, 114.23249, 119.19439, 39.513452, 96.364873, \\
 87.553799, 22.710664, 33.222104, 95.947871, 168.57745, 656.65111, \\
 66.656947, 508.95334, 107.28307, 147.33459, 71.867388, 110.36158, \\
 162.40694, 406.72885, 46.961022, 7.5159942, 10.553738, 7.4237874, \\
 301.61227, 5.1239924, 2.6376656, 20.442784, 49.447465, 142.40504, \\
 23.188892, 23.220589, 82.378595, 9.4212685, 117.02702, 53.357498, \\
 5.4877966, 18.016172, 1.0, 1.051952, 6.1634088, 1.9984144).$$

其图示见下例中的图 4. 对于后两种软件, 取相应  $\mu$  的 8 位有效值  $\tilde{\mu}_0^{(1)}$ , 至少前 4 位数,  $\tilde{\mu}_0^{(1)}$  与  $\mu_0^{(1)}$  重合. 对于不同的  $\alpha$ , 由 (4) 算出诸软件的崩溃时间和崩溃产品, 得到的结果如表 5 所示:

表 5 2012 年模型的 3 软件稳定性测试

$T_{\mu_0} \backslash \alpha$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	软件
$\mu_0$					
$\mu_0^{(1)}$	15 (25)	20 (25)	30 (25)	127 (41)	Mathematica
$\tilde{\mu}_0^{(1)}$	16 (42) (33) (28) (12)	21 (42) (33) (12)	30 (25)	116 (25)	MatLab & R

$$T_{\mu_0} = T_{\mu_0}^+.$$

以上讨论已说明经济的稳定性分析严重地依赖于初值和软件 (如 R 与 MatLab). 这源于经济系统的极端敏感性. 因为此模型有许多极小值点, 其一是 (25). 经济系统常在某极小值点处崩溃, 乃许多算法的共性. 通常, 若初值接近于最大左特征向量, 那么崩溃位置会靠后些;

当然, 因迭代次数的增多, 累积误差也会增加. 作为使用 MatLab 的补充, 若取  $\mu_0^{(2)}$  为保留  $\mu$  小数点后 15 位, 则所得结果变成表 6. 此初值稳定性很好, 但所需精度难于实践.

表 6 2012 年模型 MatLab 的另一测试

$T_{\mu_0} \backslash \alpha$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	软件	$T_{\mu_0} = T_{\mu_0}^+$
$\mu_0$						
$\mu_0^{(2)}$	29 (42)	39 (42) (41) (33)	57 (42)	235 (42)	MatLab	

此刻, 我们再提供一例, 说明选取初值的艺术. 代替前面所用的  $\mu_0^{(k)}$ ,  $k = 1, 2$ , 改取小数点后 2 位、有效位数不少于 4 的近似:

$$\mu_0^{(3)} = (86.58, 126.42, 114.23, 119.19, 39.51, 96.36, 87.55, 22.71, 33.22, 95.95, 168.58, 656.65, 66.66, 508.95, 107.28, 147.33, 71.87, 110.36, 162.41, 406.73, 46.96, 7.516, 10.55, 7.424, 301.61, 5.124, 2.638, 20.44, 49.45, 142.41, 23.19, 23.22, 82.38, 9.421, 117.03, 53.36, 5.488, 18.02, 1.0\dot{0}, 1.051^{\circ}, 6.163, 1.998).$$

那么, 对于不同的  $\alpha$ , (使用 Mathematica, R 和 MatLab 的) 崩溃时间如表 7.

表 7 2012 年模型 3 软件的另一测试

$T_{\mu_0} \backslash \alpha$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	$T_{\mu_0} = T_{\mu_0}^+$
$\mu_0$					
$\mu_0^{(3)}$	8 (41)	10 (41)	14 (41)	56 (41)	

与  $\mu_0^{(1)}$  或  $\tilde{\mu}_0^{(1)}$  相比: 此初值仅用一半有效位数, 从而稳定性差些, 但已足够且易于实践. 其优点还在于崩溃产品都集中于排序的尾部.

此处重述我们选用  $P$  (而非  $A$ ) 的最大左特征向量  $\mu$  (而非  $u$ ) 的要点: 由引理 3 知,  $\mu$  乃原矩阵  $A$  的最大左、右特征向量  $u$  和  $v$  的分量积  $u \odot v$ , 它使用了  $A$  的全部要素:  $\rho(A)$ ,  $u$  和  $v$ . 从表 8 中可看出这与单独使用  $u$  的显著差别.

表 8 由 4 列构成. 第 1 列为产品序号, 第 2 列为产品名称, 第 3 列是由  $P$  得出产品等级; 作为对比, 第 4 列给出由  $A$  得出产品等级. 我们看到, 两者的头两名 1 和 2 重合. 这容易理解, 因为不同加权平均未必会改变头一、两名的排序. 但后面的四处重合 9, 21, 22 和 31 应属偶然. 所以 42 个产品中, 在两种排序中有 36 个不同. 分量等级的排序差别  $\geq 7$  的共有 7 个, 最大相差 12.

<sup>o</sup> 此处的 1.051 是“歪打正着”, 它比原设计的小 0.001, 但输出却好得多. 显示出极端敏感性.

表 8 2012 年模型排序

序号	产品	等级 (P)	等级 (A)
1	农林牧渔产品和服务	18	8
2	煤炭采选产品	9	9
3	石油和天然气开采产品	12	6
4	金属矿采选产品	10	13
5	非金属矿和其他矿采选产品	25	24
6	食品和烟草	15	12
7	纺织品	17	19
8	纺织服装鞋帽皮革羽绒及其制品	29	32
9	木材加工品和家具	26	28
10	造纸印刷和文教体育用品	16	17
11	石油、炼焦产品和核燃料加工品	5	4
12	化学产品	1	1
13	非金属矿物制品	21	21
14	金属冶炼和压延加工品	2	2
15	金属制品	14	18
16	通用设备	7	16
17	专用设备	20	23
18	交通运输设备	13	20
19	电气机械和器材	6	15
20	通信设备、计算机和其他电子设备	3	5
21	仪器仪表	24	29
22	其他制造产品	34	37
23	废品废料	32	27
24	金属制品、机械和设备修理服务	35	38
25	电力、热力的生产和供应	4	3
26	燃气生产和供应	38	36
27	水的生产和供应	39	40
28	建筑	30	33
29	批发和零售	23	11
30	交通运输、仓储和邮政	8	10
31	住宿和餐饮	28	25
32	信息传输、软件和信息技术服务	27	30
33	金融	19	7
34	房地产	33	26
35	租赁和商务服务	11	14
36	科学研究和技术服务	22	22
37	水利、环境和公共设施管理	37	35
38	居民服务、修理和其他服务	31	31
39	教育	42	41
40	卫生和社会工作	41	42
41	文化、体育和娱乐	36	34
42	公共管理、社会保障和社会组织	40	39

**例 9** (2007 年 42 部门生产者价格投入产出表) 至今为止, 我们所考虑的都是以实物或劳务为主体的投入产出表而非以货币为主的价格表, 主要原因是觉得后者可靠性差一些. 然而, 在实际应用中, 很多都是价格表, 所以值得一试.

与前面一样, 这里的表也取自前面所述的投入产出网站 [6]. 我们采用的是该文件第 3 页: “2007 年 42 部门生产者价格投入产出表直耗系数表”. 当然, 真正使用的是该页中 42 种产品投入产出所构成的方阵的转置, 依然记作  $A$ . 因  $\max A / \min\{A \text{ 的非零元}\} \sim 10^5$  不太大, 略去第一拟对称技术. 与上例不同, 我们不采用软件的预设精度、而使用第二拟对称技术.

先使用 Mathematica 算出  $A$  的右特征对  $(r_0 := \rho(A), v_0)$  如下:

$$\begin{aligned} r_0 &= 0.6845824683912125, \\ v_0 &= (0.06836745956055637, 0.12032387614517867, 0.09703786895577539, \\ &0.14988431851778464, 0.13597979528849988, 0.10507583300577551, \\ &0.17945878677256719, 0.1823139109587624, 0.1626068381031713, \\ &0.1712106667434097, 0.1319043556292284, 0.18801447664826515, \\ &0.15784028579085366, 0.1833991546807533, 0.20284887156074785, \\ &0.20917680196071395, 0.24262289373753362, 0.23412354228771703, \\ &0.3122600455214205, 0.26665135529453243, 0.16872430292147617, \\ &0.018590571865727445, 0.16246303292353262, 0.13112965941943333, \\ &0.11508897166317174, 0.1820265116234219, 0.10937427883331304, \\ &0.10942346170440855, 0.10331763478636412, 0.07630868898591386, \\ &0.0960859219953213, 0.05070560805705598, 0.0344678146639139, \\ &0.16909555775083504, 0.14466895953954112, 0.11396181986088481, \\ &0.10727292241392576, 0.1288397714517978, 0.09185328056626982, \\ &0.1629935201484711, 0.11614554157896483, 0.09181875340217964). \end{aligned}$$

然后将引理 5 应用于  $w = v_0$ , 得出  $\bar{A}$ , 其特征向量  $v_1$  已近乎常数向量: 显示的是以 0.154303 为常数的向量,  $\max v_1 - \min v_1 = 1.27676 \cdot 10^{-15}$ . 可见缺省算法已有很高精度. 现在, 以  $(r_1 := r_0 + 10^{-7}, v_1)$  作为初值, 使用  $\text{IPI}_f$ , 最好的结果出现在第一步, 得出新的输出  $(r_2, v_2)$ , 其中  $v_2$  显示为分量与  $v_1$  相同的常值向量, 但  $\max v_2 - \min v_2 = 1.22125 \cdot 10^{-15}$ , 比  $v_1$  略有改进. 回到原来的  $\rho(A) = r = r_2, v = w \odot v_2$  (将  $v_2$  视为  $g_w$ , 由引理 5 得出此式), 得到所需的  $A$  的最大 (右) 特征对:

$$r = 0.6845824683912153,$$

$$v = (3.6775339701407854, 6.472306339699053, 5.2197355550244815, \\ 8.062383427489017, 7.31444929562307, 5.652103322302194, \\ 9.65321497739442, 9.80679412529886, 8.746736747939659, \\ 9.20954277146494, 7.095228515933907, 10.113431582751806, \\ 8.490340530182369, 9.86517015212735, 10.911384169666619, \\ 11.251768018300773, 13.05085693382138, 12.593670812210702, \\ 16.796688546041292, 14.343364863676795, 9.075799504184525, \\ 1.0, 8.739001365689065, 7.05355705927349, \\ 6.190717127714798, 9.791334711924373, 5.88331976139741, \\ 5.885965342794831, 5.557528597430344, 4.1046983135894, \\ 5.168529655209779, 2.7274904948208736, 1.8540481117451217, \\ 9.095769563849212, 7.781845581966462, 6.13008683562761, \\ 5.7702863144134025, 6.9303823670599245, 4.940852881218008, \\ 8.767536648453337, 6.247550770242015, 4.9389956406586775).$$

$v$  的图示见本文开头图 1. 然后, 由  $P = D_{v^{-1}} A D_v / r$  算出  $P$  及其最大左特征向量  $\mu$ :

$$\mu = (122.37273793435158, 182.54949264067153, 242.66282870870904, \\ 218.06468695696688, 37.99704419146102, 128.80574696519366, \\ 139.42939543463217, 61.21893578357334, 60.44372776106847, \\ 168.80481255938722, 324.48615001490316, 1107.4414433477323, \\ 109.89571297876974, 1027.8922212032253, 225.77291238984122, \\ 504.8796600586141, 315.08672086146476, 347.97531715935173, \\ 867.970015821091, 129.69912415237042, 33.58891784567589, \\ 12.733236090761626, 744.057738958279, 11.488929072103403, \\ 9.853293515157997, 11.35757384792886, 197.81376573224347, \\ 4.056651615639497, 39.498370469143865, 86.44479568277583, \\ 55.050918907978286, 66.7635634071628, 8.580199995056997, \\ 110.63717291180404, 17.515650254062926, 34.130037426922726, \\ 6.378244300640131, 44.86055988655026, 5.487204000318844, \\ 15.033551580701978, 14.139937645529594, 1.0).$$

由于  $\mu - \mu P$  的高阶项仅有一分量为  $10^{-15}$ , 其余均  $\leq 10^{-16}$ , 所以已得出满意结果. 再取 6 位有效输出作为初值:

$$\begin{aligned} \mu_0 = & (122.373, 182.549, 242.663, 218.065, 37.997, 128.806, 139.429, \\ & 61.2189, 60.4437, 168.805, 324.486, 1107.44, 109.896, 1027.89, \\ & 225.773, 504.88, 315.087, 347.975, 867.97, 129.699, 33.5889, \\ & 12.7332, 744.058, 11.4889, 9.85329, 11.3576, 197.814, 4.05665, \\ & 39.4984, 86.4448, 55.0509, 66.7636, 8.5802, 110.637, 17.5157, \\ & 34.13, 6.37824, 44.8606, 5.4872, 15.0336, 14.1399, 1.0). \end{aligned}$$

对于不同的  $\alpha$ , 算出崩溃时间如表 9.

表 9 2007 年模型稳定性测试

$T_{\mu_0} \backslash \alpha$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	$T_{\mu_0} = T_{\mu_0}^+$
$\mu_0$					
上方的 $\mu_0$	11 (42) (28)	15 (42) (28)	22 (42) (28)	92 (42) (28)	

$\alpha$  的 4 种取值都仅有 2 个崩溃产品. 42 种产品及其等级见表 11. 总的看来价格表自身的分析与之前基于实物或劳务表的分析并无显著差异, 崩溃分量大多出现于等级较低的地方.

因为此价格表与 2012 年的实物或劳务的投入产出表的产品分类大体相近, 这为我们提供了对比的机会. 我们注意, 虽然两表的内涵不同, 而且相差 5 年, 但它们依  $P$  的产品等级的前 6 名却几乎完全相同. 仅有的差别是: 这里排名第 5 的产品“通用、专用设备制造业”在 2012 年的表中被拆开为两个: “通用设备”和“专用设备”, 分别排名为 7 和 20. 相反地, 在 2012 年表中的两种排名方法“等级  $P$ ”和“等级  $A$ ”, 前 8 名中仅有头两名重合. 对于其它产品, 差距最大者可达 12 级. 特别地, 对于序号 1 产品, 两种排序法相差 10 级. 但使用“等级  $P$ ”排序, 此产品在两表中的等级重合, 都是 18. 除前 6 名依  $P$  排序在两表中重合, 其它产品的序号相差都不大. 这样, 如果在 2007 年将前 6 名产品选为主成分 (比例为 6/42) 的话, 经 2012 年验证, 准确率应高于 0.95. 通过以上对比, 此例实际上给出了跟以前不同的视角, 再一次验证了“等级 ( $P$ )”方法的有效、合理和可靠性.

应当指出, 以上四个例子中的  $\alpha$  的取值源于消费倍数  $\gamma(\alpha) = \alpha/(1 - \alpha)$ , 见表 10.

表 10  $\alpha$  和  $\gamma(\alpha)$

$\alpha$	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$
$\gamma := \gamma(\alpha)$	0	0.4	0.6	1	5

表 11 2007 年模型排序

序号	产品	等级 (P)
1	农林牧渔业	18
2	煤炭开采和洗选业	13
3	石油和天然气开采业	9
4	金属矿采选业	11
5	非金属矿及其他矿采选业	28
6	食品制造及烟草加工业	17
7	纺织业	15
8	纺织服装鞋帽皮革羽绒及其制品业	23
9	木材加工及家具制造业	24
10	造纸印刷及文教体育用品制造业	14
11	石油加工、炼焦及核燃料加工业	7
12	化学工业	1
13	非金属矿物制品业	20
14	金属冶炼及压延加工业	2
15	金属制品业	10
16	通用、专用设备制造业	5
17	交通运输设备制造业	8
18	电气机械及器材制造业	6
19	通信设备、计算机及其他电子设备制造业	3
20	仪器仪表及文化办公用机械制造业	16
21	工艺品及其他制造业	30
22	废品废料	34
23	电力、热力的生产和供应业	4
24	燃气生产和供应业	35
25	水的生产和供应业	37
26	建筑业	36
27	交通运输及仓储业	12
28	邮政业	41
29	信息传输、计算机服务和软件业	27
30	批发和零售业	21
31	住宿和餐饮业	25
32	金融业	22
33	房地产业	38
34	租赁和商务服务业	19
35	研究与试验发展业	31
36	综合技术服务业	29
37	水利、环境和公共设施管理业	39
38	居民服务和其他服务业	26
39	教育	40
40	卫生、社会保障和社会福利业	32
41	文化、体育和娱乐业	33
42	公共管理和社会组织	42

通常, 当  $\gamma < 0.4$  时称为低消费,  $\gamma > 0.6$  时称为高消费. 但这里, 我们的  $\gamma$  是“倍数”而非“比例”; 而且经济标准是不断更新的, 期待今后的积累, 再重新设置低、高消费的划分标准.

下面分别给出 2012 和 2007 年模型  $P$  的左特征向量的图示, 其中横坐标表示产品序号, 纵坐标表示  $P$  的最大左特征向量.

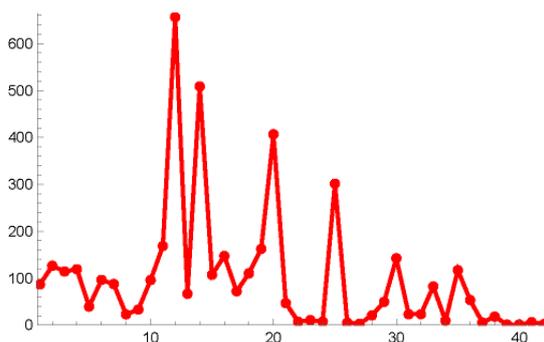


图 4 中国 2012 年模型的  $\mu$

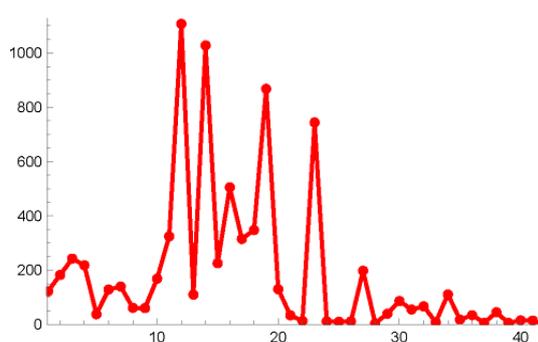


图 5 中国 2007 年模型的  $\mu$

表 12 2012 年模型排名后 18 位的产品和序

产品	5	8	9	22	23	24	26	27	28
排序	②5	②9	②6	③4	③2	③5	③8	③9	③0
产品	31	32	34	37	38	39	40	41	42
排序	②8	②7	③3	③7	③1	④2	④1	③6	④0

表 13 2007 年模型排名后 18 位的产品和序

产品	5	21	22	24	25	26	28	29	31
排序	②8	③0	③4	③5	③7	③6	④1	②7	②5
产品	33	35	36	37	38	39	40	41	42
排序	③8	③1	②9	③9	②6	④0	③2	③3	④2

令人吃惊的是两个特征向量的图像何其相似. 两者都有诸多局部极小值: 由此看出两模型都有多个崩溃点, 特别地 ④2、④1 几乎无区别. 稍作对比, 便可看出产业从 2007 年到 2012 年的变迁 (排序): 建筑业 36  $\rightarrow$  30, 房地产 38  $\rightarrow$  33; 教育 40  $\rightarrow$  42, 卫生、社会工作 32  $\rightarrow$  41.

## §4. 经济结构的优化

### 1) 投入产综的调整

我们继续看例 8 的结果, 自然会问, 如果有效位数多取几位, 崩溃产品会不会达到全局最小者 (42)? 我们试过取 10 位有效数字, 甚至于取全部的  $\mu$  (16/17 位), 结果大多在 (25) 处崩溃. 为什么有效位数增加并没有改进已有结果, 原因何在? 下面用两种方法说明: 从计算角度看, 该例中所使用的 8 位近似已是很好的选择.

(a) 距离方法 ( $\ell^2$  距离) 计算向量  $x$  与特征向量  $\alpha\mu$  之间的距离的平方

$$|x - \alpha\mu|^2 = |\mu|^2 \left( \alpha - \frac{\mu x^*}{|\mu|^2} \right)^2 + |x|^2 - \frac{(\mu x^*)^2}{|\mu|^2} \geq |x|^2 - \frac{(\mu x^*)^2}{|\mu|^2} =: \varepsilon(x)^2, \quad (5)$$

左方关于参数  $\alpha$  求极小, 知等式当且仅当  $\alpha = \mu x^*/|\mu|^2 =: \bar{\alpha}$  时达到 (参见华书: [3; 第 3 章 §3]). 我们的目标是寻求初值  $x$  使得 (5) 的右方  $\varepsilon(x)$  ( $\geq 0$ ) 达到最小. 随后几段关于误差的分析, 均以 2012 年的投入产出表为例. 为了比较不同初值之间的差别, 我们将那里所用过的 8 位近似  $\mu_0^{(1)}$  重新标记为  $\mu_0^{(3)}$ , 然后补充两个 4 位和 6 位有效近似  $\mu_0^{(1)}$  和  $\mu_0^{(2)}$ :

$$\begin{aligned} \mu_0^{(1)} = & (86.58, 126.4, 114.2, 119.2, 39.51, 96.36, 87.55, 22.71, 33.22, 95.95, 168.6, \\ & 656.7, 66.66, 509.0, 107.3, 147.3, 71.87, 110.3, 162.4, 406.7, 46.96, 7.516, \\ & 10.55, 7.423, 301.6, 5.124, 2.638, 20.44, 49.45, 142.4, 23.19, 23.22, 82.38, \\ & 9.421, 117.0, 53.36, 5.488, 18.02, 1.0, 1.052, 6.163, 1.998), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_0^{(2)} = & (86.5807, 126.42, 114.232, 119.194, 39.5135, 96.3649, 87.5538, 22.7107, \\ & 33.2221, 95.9479, 168.577, 656.651, 66.6569, 508.953, 107.283, 147.335, \\ & 71.8674, 110.362, 162.407, 406.729, 46.961, 7.51599, 10.5537, 7.42379, \\ & 301.612, 5.12399, 2.63767, 20.4428, 49.4475, 142.405, 23.1889, 23.2206, \\ & 82.3786, 9.42127, 117.027, 53.3575, 5.4878, 18.0162, 1.0, 1.05195, \\ & 6.16341, 1.99841), \end{aligned}$$

由 (3) 得出

$$\varepsilon(\mu_0^{(1)}) = 0.115326, \quad \varepsilon(\mu_0^{(2)}) = 0.00104431, \quad \varepsilon(\mu_0^{(3)}) = 0.$$

由此可见,  $\{\mu_0^{(k)}\}_{k=1}^3$  三者中, 这里的  $\mu_0^{(3)}$  (即例 8 所用过的  $\mu_0^{(1)}$ ) 是最优的.

(b) 距离方法 ( $\ell^\infty$  距离) 留意对于给定的  $\{x_k\}_{k=1}^n$ , 我们有

$$\|x\|_\infty \leq \|x\| = \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty. \quad (6)$$

由此及

$$\|\mu - \mu_0^{(1)}\|_\infty = 0.0615791, \quad \|\mu - \mu_0^{(2)}\|_\infty = 4.90935 \cdot 10^{-4}, \quad \|\mu - \mu_0^{(3)}\|_\infty = 4.76045 \cdot 10^{-6}$$

和  $\sqrt{42} \approx 6.48$ , 上面关于  $\varepsilon(\mu_0^{(1)})$  和  $\varepsilon(\mu_0^{(2)})$  的解答很自然, 但关于  $\varepsilon(\mu_0^{(3)})$  的答案却有些意外: 通常将输出结果复制下来, Mathematica 会输出 16 位, 但关于后者的输出还是 0. 这里的  $\|\mu - \mu_0^{(3)}\|_\infty > 0$  与  $\varepsilon(\mu_0^{(3)}) = 0$  不同属计算误差. 为说明之, 注意前面已证

$$\varepsilon(x)^2 = (x - \bar{\alpha}u)(x - \bar{\alpha}u)^* = \inf_{\alpha} (x - \alpha u)(x - \alpha u)^*.$$

如使用 Mathematica 直接计算右方第 2 项的平方根, 则结果是  $1.07226 \cdot 10^{-5}$  而非零. 当然, 后者的误差应大于前者.

基于 (6), 代替  $\varepsilon(x)$ , 我们也可以使用

$$\eta(x) = \inf_{\alpha \in (0,2)} \|x - \alpha\mu\|_\infty$$

作为  $x$  与  $\mu$  的误差估计. 我们有

$$\eta(\mu_0^{(1)}) = 0.059754, \quad \eta(\mu_0^{(2)}) = 0.000455305, \quad \eta(\mu_0^{(3)}) = 4.73003 \cdot 10^{-6},$$

这里的  $\eta(\mu_0^{(3)}) > 0$  与  $\varepsilon(\mu_0^{(3)}) = 0$  不同也应属计算误差. 我们看到, 除了第 3 个有计算误差而外,  $\eta(\mu_0^{(j)}) < \varepsilon(\mu_0^{(j)})$ ,  $j = 1, 2$ .

在 (5) 式  $\varepsilon(x)$  的定义中,  $\mu$  已归一化, 但  $x$  未归一化. 归一化后的定义成为

$$\varepsilon^*(x)^2 = 1 - \frac{(\mu x^*)^2}{|\mu|^2 |x|^2}. \quad (7)$$

此时, 我们有

$$\varepsilon^*(\mu_0^{(1)}) = 0.000105851, \quad \varepsilon^*(\mu_0^{(2)}) = 9.58493 \cdot 10^{-7}, \quad \varepsilon^*(\mu_0^{(3)}) = 0.$$

由 (7) 可见,  $\varepsilon^*$  的另一种描述是使用两向量  $\mu$  和  $x$  夹角  $\theta$  的余弦

$$\cos \theta = \frac{\mu x^*}{|\mu| |x|}.$$

显然,  $\varepsilon^* = 0$  当且仅当  $\theta = 0$ . 由此导出

(c) 夹角方法<sup>[5]</sup> 计算初值向量  $x$  与特征向量  $\mu$  的夹角

$$\theta(x) := \arccos \frac{\mu x^*}{|\mu| |x|}. \quad (8)$$

容易看出:  $\varepsilon^*$  和  $\theta$  的最优值都是 0. 经计算,

$$\theta(\mu_0^{(1)}) = 0.000105984, \quad \theta(\mu_0^{(2)}) = 9.58551 \cdot 10^{-7}, \quad \theta(\mu_0^{(3)}) = 0.$$

上述方法都得出  $\mu_0^{(3)}$  已是三者中最接近于  $\mu$ , 从而就稳定性而言的最优初值, 并无改进的空间. 所以多算了未必有益. 应当指出, 增加有效位数在这里还有个先天不足, 我们上面计算  $\mu$  较粗, 并未要求那么高的精度, 离精确解很远.

从计算角度看, 前一方法的复杂性比后者低一些. 从应用角度看, 方法 (a) 和 (b) 比 (c) 更切合实际, 因在实践中, (7) 式关于向量  $x$  的归一化未必合理.

## 2) 增长速度的预测与调整

**例 10** (消费量的计算) 以文 [1; 例 14] 中的 1997 年山东省 6 部门投入产出表为例, 介绍推论 2 的应用. 此时  $\rho(A) = 0.651093$ . 我们令  $\delta_i$  表示经济增长速度的第  $i$  种取值;  $\gamma_i$  表示相应于  $\delta_i$  的消费倍数;  $x_{1,i}$  表示相应于  $\delta_i$  的第一年的产综;  $\xi_{1,i}$  表示相应于  $\delta_i$  的第一年的可用消费量. 对应结果如下:

表 14 相应于增速  $\delta$  的消费倍数  $\gamma$

$i$	1	2	3	4	5	6
$\delta_i$	5.5%	7%	8%	9%	10%	12%
$\gamma_i$	5.69	4.33	3.71	3.23	2.84	2.26

6 种经济增长速度对应的消费倍数都大于 1, 这表明仅用增产部分于消费是不够的. 事实上, 经济运行总是边生产边消费的, 而不是将新增产的部分存储起来, 用于下一年度的消费. 而且, 消费量也相对稳定, 并不由当年的生产状况完全支配. 即便生产遇到麻烦, 人们的基本生活总还是要保障的.

表 15 第一年产综  $x_{1,i}$  与可用消费量  $\xi_{1,i}$

$x_{1,1}$	$\xi_{1,1}$	$x_{1,2}$	$\xi_{1,2}$	$x_{1,3}$	$\xi_{1,3}$
0.200285	0.059439	0.203132	0.057585	0.205031	0.056349
1.013555	0.300797	1.027966	0.291415	1.037573	0.285159
0.021319	0.006327	0.021622	0.006130	0.021824	0.005998
0.070240	0.020845	0.071238	0.020195	0.071904	0.019762
0.166066	0.049284	0.168427	0.047747	0.170001	0.046722
0.112476	0.033380	0.114075	0.032339	0.115141	0.031645

表 16 续上表

$x_{1,4}$	$\xi_{1,4}$	$x_{1,5}$	$\xi_{1,5}$	$x_{1,6}$	$\xi_{1,6}$
0.206929	0.055113	0.208827	0.053877	0.212624	0.051405
1.047180	0.278904	1.056788	0.272649	1.076002	0.260139
0.022026	0.005866	0.022228	0.005735	0.022632	0.005472
0.072570	0.019328	0.073236	0.018895	0.074567	0.018028
0.171575	0.045697	0.173149	0.044672	0.176297	0.042622
0.116207	0.030950	0.117273	0.030256	0.119406	0.028868

从上面两个表格中可以看出: 随着经济增长速度的增加, 消费量呈降低趋势, 这也符合经济发展规律. 那么当想增加消费量时, 自然需要将经济发展速度的目标降低即可.

### 3) 优化经济结构的设计与调试

至今为止, 我们主要讨论一个给定的经济系统的最优解与稳定性, 在华先生书 [3; 第三章, §2, §3] 中还建议了使用线性规划或上节所述的距离方法进行调整, 以求得在实践中切实可行的最好投入. 本节的目标是介绍华氏理论反向应用: 经济系统的优化. 就笔者所知, 这个题目源于 [4]. 具体地说, 我们希望从目标产综  $\tilde{u}$  和当前投入产出的结构矩阵  $A$  出发, 构造出新的结构矩阵  $\tilde{A}$ , 它以  $\tilde{u}$  为最大左特征向量. 显然, 此问题等价于其对偶形式 (只需将  $A$  换成其转置  $A^*$ ), 对于给定的正向量  $\tilde{v}$  和结构矩阵  $A$ , 寻求新矩阵  $\tilde{A}$ , 它以  $\tilde{v}$  为最大右特征向量. 往下我们主要处理后一情形. 为此, 我们需要如下两个结果(其证明见 §5).

**引理 11** 给定非负不可约矩阵  $A$  和正向量  $w$ , 命

$$P_w = D_{w^{-1}} \frac{A}{\rho(A)} D_w,$$

则  $P_w$  为转移概率矩阵当且仅当  $w$  为  $A$  相应于最大特征值  $\rho(A)$  的右特征向量.

**定理 12** 具有最大左特征对  $(\rho(A), u)$  的投入产出结构矩阵  $A$  关于目标产综  $\tilde{u}$  的优化矩阵  $\tilde{A}$  可选为

$$\frac{\tilde{A}}{\rho(\tilde{A})} = D_{w^{-1}} \frac{A}{\rho(A)} D_w, \quad w := \tilde{u} \odot u^{-1}. \quad (9)$$

详言之,

$$\frac{\tilde{a}_{ij}}{\rho(\tilde{A})} = \frac{a_{ij} w_j}{w_i \rho(A)}, \quad \forall i, j.$$

为理解优化矩阵  $\tilde{A}$  的稳定性, 我们需要下述结果, 它是 [1; 定理 11 和推论 12] 的推广.

**定理 13 (转换定理)** 任意给定正向量  $w$ , 由 (9) 第一式定义  $\tilde{A}$ . 那么, 关于  $\tilde{A}$  的迭代解  $\{\tilde{x}_n\}_{n \geq 0}$ :  $\tilde{x}_0 = \tilde{x}_n \tilde{A}^n$  与关于  $A$  的迭代解  $\{x_n\}_{n \geq 0}$ :  $x_0 = x_n A^n$  可通过恒等式:

$$\rho(\tilde{A})^n \tilde{x}_n = \rho(A)^n x_n \odot w, \quad n \geq 0$$

相互转换. 特别地, 对于每一个  $n$  和  $k$ ,  $\tilde{x}_n$  的第  $k$  个分量为非正 (相应地, 负) 当且仅当  $x_n$  如此.

将定理 13 应用于定理 12,  $w = \tilde{u} \odot u^{-1}$ . 取  $\rho(\tilde{A}) = \rho(A)$ , 得出  $\tilde{x}_0 = x_0 \odot w$ . 再取  $x_0 = u$ , 得到  $\tilde{x}_0 = u \odot w = \tilde{u}$ . 这正是我们的优化设计. 对于这两个初值, 我们有  $x_n = \rho(A)^{-n}u$ ,  $\tilde{x}_n = \rho(\tilde{A})^{-n}\tilde{u}$ ,  $n \geq 0$ . 从而

$$\rho(A)^n x_n \equiv u, \quad \rho(\tilde{A})^n \tilde{x}_n \equiv \tilde{u} = u \odot w = \rho(A)^n x_n \odot w, \quad n \geq 0.$$

我们验证了定理 13 的结论.

作为定理 13 的特例, 取  $w$  为  $A$  的右特征向量  $v$ , 则 (9) 所定义的  $\tilde{A}$  即是由 (1) 所定义的  $P$ . 此时, 定理 13 就是 [1; 定理 11]. 由定理 13 及 [1; 推论 12] 知  $A$  与  $\tilde{A}$  和  $\kappa\tilde{A}$  ( $\kappa > 0$ ), 进而与  $P$  都有相同的稳定性. 与此平行, 对于每一个固定的  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $A_\alpha$  与  $\tilde{A}_\alpha$  和  $\kappa\tilde{A}_\alpha$  ( $\kappa > 0$ ), 以及与  $P_\alpha$  和  $\tilde{P}_\alpha$  也具有相同的性质. 只是需要留心, 当  $\alpha = 0$  时, 常需附加条件:  $A$  含有至少一个正的对角线元素.

在定理 12 中, 可特别地取  $\rho(\tilde{A}) = \rho(A)$ . 此时,  $\tilde{A} = H \odot A$ , 此处  $\odot$  也表示分量积, 其中

$$H = \left( \frac{w_j}{w_i} = \frac{u_i \tilde{u}_j}{\tilde{u}_i u_j} : i, j = 1, 2, \dots, n \right) \text{ (与 } u \text{ 或 } \tilde{u} \text{ 是否归一化无关)}.$$

为了刻画  $\tilde{A} = H \odot A$  与给定的  $A$  的差异, 我们考虑使用  $\tilde{A}$  与  $A$  的最大左特征向量  $\tilde{u}$  与  $u$  的差异, 若两者差异大, 则  $\max H$  和  $\min H$  的差异也会大. 这可以使用前面 1) 所介绍的距离方法  $\varepsilon(\tilde{u})$ ,  $\eta(\tilde{u})$  和  $\theta(\tilde{u})$  算出.

然而, 注意 (9) 的左方关于常数因子不变, 于是可进一步对  $\kappa\tilde{A}$  中的参数  $\kappa$  优化. 如同上节一样, 可考虑关于 Frobenius 距离 (也称为 Hilbert-Schmit 距离, 还可视为通常的欧氏距离)

$$\|\kappa\tilde{A} - A\|_F^2 = \sum_{i,j} |\kappa\tilde{a}_{ij} - a_{ij}|^2.$$

使用欧氏内积  $\langle A, B \rangle = \sum_{i,j} a_{ij}b_{ij}$ , 我们得出

$$\|\kappa\tilde{A} - A\|_F^2 = \|\tilde{A}\|_F^2 \left( \kappa - \frac{\langle \tilde{A}, A \rangle}{\|\tilde{A}\|_F^2} \right)^2 + \|A\|_F^2 - \frac{\langle \tilde{A}, A \rangle^2}{\|\tilde{A}\|_F^2} \geq \|A\|_F^2 - \frac{\langle \tilde{A}, A \rangle^2}{\|\tilde{A}\|_F^2},$$

末尾的等号在

$$\bar{\kappa} = \frac{\langle \tilde{A}, A \rangle}{\|\tilde{A}\|_F^2} = \frac{\langle H, A \odot A \rangle}{\|H \odot A\|_F^2}, \quad A^{\odot 2} := A \odot A \quad (10)$$

处达到.

与上节末类似, 还是将矩阵视为  $\mathbb{R}^{n^2}$  上的向量, 使用下述距离:

$$\|A - B\|_\infty = \sup_{i,j} |a_{ij} - b_{ij}|.$$

留心这不同于矩阵作为算子的无穷范数. 如矩阵的阶为  $n$ , 则

$$\|A - B\|_{\infty} \leq \|A - B\|_F \leq n\|A - B\|_{\infty}.$$

留心在目前情况下,

$$\|\kappa\tilde{A} - A\|_{\infty} = \max_{i,j} \left[ \left| \frac{\kappa w_j}{w_i} - 1 \right| a_{ij} \right], \quad w := \tilde{u} \odot u^{-1}. \quad (11)$$

于是  $\kappa$  的可用区间为

$$\kappa \in ((\max H)^{-1}, (\min H)^{-1}) = \left( \min_{i,j} \frac{w_i}{w_j}, \max_{i,j} \frac{w_i}{w_j} \right).$$

即矩阵  $\kappa H$  的元素分布在常数 1 两边. 原因在于:  $\kappa \tilde{a}_{ij}$  与  $a_{ij}$  的比值小于 1 或大于 1, 分别预示着产品是否产能过剩、是否需要增加投入或技术革新. 我们可根据实际需求对  $\kappa$  进行优化. 记  $\kappa^*$  为在设定区间上所找到的最小值点.

对于每一个  $\kappa$ , 如上节所示,  $\|\kappa\tilde{A} - A\|_{\infty} \leq \|\kappa\tilde{A} - A\|_F$ . 两边 (先左边、后右边) 关于  $\kappa$  取 inf, 得出

$$\|\kappa^*\tilde{A} - A\|_{\infty} = \inf_{\kappa} \|\kappa\tilde{A} - A\|_{\infty} \leq \inf_{\kappa} \|\kappa\tilde{A} - A\|_F = \|\bar{\kappa}\tilde{A} - A\|_F.$$

当然, 未必有  $\kappa^* \leq \bar{\kappa}$ . 详见表 18 和 19.

**例 14 (优化实验)** 根据定理 13, 对一个给定的结构矩阵  $A$  和任意给定的正向量  $w$ , 如下构造的新结构矩阵  $\tilde{A}$ , 保持与  $A$  同样的稳定性.

$$\tilde{A} = D_{w^{-1}} A D_w.$$

向量  $w$  的一种较为简便的选法是精心选好目标产综, 一旦确定之后, 定理 13 给出了不计常数因子  $\kappa$  下的唯一最优稳定解. 然后还可以对  $\kappa$  进一步优化以加速经济的发展速度 (但不影响稳定性).

此专题的深入还有待于更多实践. 这里我们仅以例 8 为特例, 做一个优化实验. 取  $w = (w_1, w_2, \dots, w_{42})$ , 其中

$$w_i = \begin{cases} \tau, & \text{按等级 } (P) \text{ 排序, 第 } i \text{ 号产品排在后 } r \text{ 位;} \\ 1, & \text{其他.} \end{cases}$$

例如说某产品按等级  $(P)$  排序后排在末尾, 我们对其进行调整为  $\tau$  ( $\tau > 0$ ), 如可取  $\tau = 1.1$ , 表示对该产品的投入调整为原来的 1.1 倍. 如 2012 年数据中按等级  $(P)$  排序后, 我们考察排在最后 5 ( $r = 5$ ) 名的产品, 分别是燃气生产和供应, 水的生产和供应, 公共管理、社会

保障和社会组织, 卫生和社会工作, 教育. 那么  $w$  的第 26、27、39、40、42 个分量的取值均为  $\tau$ , 其余分量取值都是 1.

表 17 列出当  $\tau$  分别取 1.1, 1.2,  $r$  分别取 5, 10, 15 时对应的  $H$  振幅  $\max H, \min H$ , 以及修改后的目标产综  $\tilde{u}$  与原产综  $u$  之间的夹角  $\theta$ . 从此表可以看出,  $H$  的振幅变化并不大.

表 17  $H$  的振幅及  $\tilde{u}$  与  $u$  的夹角

$\tau$	$r$	$\max H$	$\min H$	$\theta$
1.1	5	1.1	0.90909	0.00096
	10			0.00429
	15			0.00794
1.2	5	1.2	0.83333	0.00192
	10			0.00857
	15			0.01587

进一步, 计算对  $\kappa\tilde{A}$  中的参数  $\kappa$  优化后对应的  $\|\kappa\tilde{A} - A\|_\infty$  (在下表中用  $\|\cdot\|_\infty$  表示) 结果, 其中  $\kappa^*$  表示  $\kappa$  在其允许区间内的最优解 (最小值). 表中最右侧表示当  $\tau$  取 1.1,  $r$  取 5, 10, 15 时,  $\kappa$  取 1.042 对应的无穷范数最小, 为 0.02393. 当  $\tau$  取 1.2,  $r$  取 5, 10, 15 时,  $\kappa$  取 1.08 对应的无穷范数最小, 为 0.04538. 留意调整后的经济的发展速度高于调整前当且仅当  $\kappa < 1$ . 这正是我们补充计算  $\kappa = 0.9, 0.95$  的原因: 最后一列表明  $\kappa^* > 1$ . 留心随着  $\kappa$  的增加, 从 0.9, 0.95 到  $\kappa^*$ ,  $\|\kappa\tilde{A} - A\|_\infty$  递减, 这为实际操作提供了调控空间.

表 18 对应于不同  $\kappa$  的  $\|\kappa\tilde{A} - A\|_\infty$

$\ \cdot\ _\infty$		$\kappa$			
		$\kappa = 0.9$	$\kappa = 0.95$	$\kappa = \kappa^*$	$\kappa^*$
$\tau$	$r$				
1.1	5	0.08251	0.06188	0.02393	$\kappa^* = 1.042$
	10				
	15				
1.2	5	0.11345	0.09454	0.04538	$\kappa^* = 1.080$
	10				
	15				

对比给出当  $\kappa = 0.9, 0.95, \bar{\kappa}$  时对应的  $\|\kappa\tilde{A} - A\|_F$  (在下表中用  $\|\cdot\|_F$  表示) 结果, 其中  $\bar{\kappa} = \|\tilde{A}\|_F^{-2} \cdot \langle \tilde{A}, A \rangle$  为最优解 (Frobenius 距离最小).

表 19 对应于不同  $\kappa$  的  $\|\kappa\tilde{A} - A\|_F$

$\ \cdot\ _F$		$\kappa$		$\bar{\kappa}$	
		$\kappa = 0.9$	$\kappa = 0.95$		
$\tau$	$r$	$\kappa = 0.9$	$\kappa = 0.95$	$\kappa = \bar{\kappa}$	$\bar{\kappa}$
	1.1	5	0.21460	0.12502	0.05476
10		0.22313	0.13528	0.06474	$\bar{\kappa} = 1.01268$
15		0.23929	0.15347	0.07787	$\bar{\kappa} = 1.02034$
1.2	5	0.24039	0.15976	0.10113	$\bar{\kappa} = 1.01550$
	10	0.25783	0.18024	0.12022	$\bar{\kappa} = 1.02160$
	15	0.28914	0.21435	0.14557	$\bar{\kappa} = 1.03506$

难能可贵的是这种优化方式并不会改变原模型的崩溃时间与崩溃产品。

为了更直观的比较, 我们给出  $\tau = 1.1, r = 10$  对应的两种范数  $\|\cdot\|_F$  (黑色实线) 和  $\|\cdot\|_\infty$  (红色虚线) 的图像。

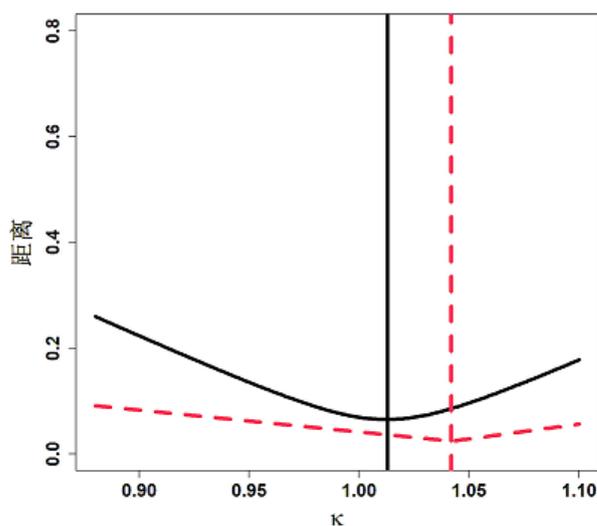


图 6  $\|\kappa\tilde{A} - A\|_F$  与  $\|\kappa\tilde{A} - A\|_\infty$  的图像对比

此时, 由表 17 得, 对于  $\kappa^*$ , 当  $\tau = 1.1, r = 5, 10, 15$  时, 所设置的  $\kappa$  的优化区间为

$$((\max H)^{-1}, (\min H)^{-1}) = (1/1.1, 1/0.90909) \approx (0.909, 1.1).$$

而当  $\tau = 1.2$ , 对于所选的三个  $r$ , 所设置的区间为  $(0.83, 1.2)$ . 从图 6 可以看出:

- (a) 两者均为凸函数, 有全局最小值  $\kappa^*$  和  $\bar{\kappa}$ , 两者均位于上述优化区间内.
- (b) 在最小值两边,  $\|\kappa\tilde{A} - A\|_F$  增长快于  $\|\kappa\tilde{A} - A\|_\infty$ .

(c) 曲线  $\|\kappa\tilde{A} - A\|_F$  总位于曲线  $\|\kappa\tilde{A} - A\|_\infty$  的上方.

## §5. 补充证明

本文所用到的大部分结果已汇集到 §2, 那里已指明了出处, 无需再证. 留下的三个结果需略加补证: 引理 11、定理 12 和定理 13.

**引理 11 的证明:** 充分性已在 §2 证明 (见含 (1) 式的那段). 反之, 如  $P_w$  为转移概率矩阵, 则

$$\mathbb{1} = P_w \mathbb{1} = D_{w^{-1}} \frac{A}{\rho(A)} D_w \mathbb{1} = D_{w^{-1}} \frac{A}{\rho(A)} w \iff \rho(A)w = Aw.$$

得出  $w$  为  $A$  相应于最大特征值  $\rho(A)$  的右特征向量.  $\square$

**定理 12 的证明:** 先考虑目标向量  $\tilde{v}$  为待求的  $A = \tilde{A}$  的相应于最大特征值  $\rho(\tilde{A})$  的右 (而非左) 特征向量情形. 此时, 将引理 11 应用于  $w = \tilde{v}$ , 得知  $\tilde{A}$  可由转移概率矩阵

$$\tilde{P}_{\tilde{v}} := D_{\tilde{v}^{-1}} \frac{\tilde{A}}{\rho(\tilde{A})} D_{\tilde{v}},$$

完全确定. 基于已知的  $A$ , 最直接的取法应是  $\tilde{P}_{\tilde{v}} = P_v$ . 于是由引理 11 及上式得出

$$\frac{\tilde{A}}{\rho(\tilde{A})} = D_{\tilde{v}} P_v D_{\tilde{v}^{-1}} = D_{\tilde{v}} D_{v^{-1}} \frac{A}{\rho(A)} D_v D_{\tilde{v}^{-1}} = D_{\tilde{v} \circ v^{-1}} \frac{A}{\rho(A)} D_{v \circ \tilde{v}^{-1}}.$$

注意到  $D_{w^{-1}} = D_w^{-1}$ , 我们得到相似变换

$$\frac{\tilde{A}}{\rho(\tilde{A})} = D_{\tilde{v} \circ v^{-1}} \frac{A}{\rho(A)} D_{\tilde{v} \circ v^{-1}}^{-1}.$$

其次, 留意我们的目标是  $A$  的“左特征向量”而非上面所处理的“右特征向量”. 基于此, 我们将上述论证应用于  $A^*$ . 此时,  $A$  的左特征对  $(\rho(A), u)$  变为  $A^*$  的右特征对  $(\rho(A), u^*)$ , 这一变换将前面的  $\tilde{v}$  换成我们的目标  $\tilde{u}$ . 由上式得到

$$\frac{\tilde{A}^*}{\rho(\tilde{A}^*)} = D_{\tilde{u} \circ u^{-1}} \frac{A^*}{\rho(A)} D_{\tilde{u} \circ u^{-1}}^{-1}.$$

两边取共轭, 得出

$$\frac{\tilde{A}}{\rho(\tilde{A})} = D_{\tilde{u} \circ u^{-1}}^{-1} \frac{A}{\rho(A)} D_{\tilde{u} \circ u^{-1}} = D_{\tilde{u}^{-1} \circ u} \frac{A}{\rho(A)} D_{\tilde{u} \circ u^{-1}}.$$

证得所需断言.  $\square$

**定理 13 的证明:** 这里的证明与 [1; 定理 11] 的证明类似. 设  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  满足  $x_0 = x_n A^n$ ,  $n \geq 0$ . 则

$$\begin{aligned} x_0 D_w &= x_n A^n D_w \\ &= (\rho(A)^n x_n D_w) D_{w^{-1}} \left( \frac{A}{\rho(A)} \right)^n D_w \\ &= (\rho(A)^n x_n D_w) \left( \frac{\tilde{A}}{\rho(\tilde{A})} \right)^n \quad (\text{由 (9)}) \\ &= \left[ \left( \frac{\rho(A)}{\rho(\tilde{A})} \right)^n x_n D_w \right] \tilde{A}^n \\ &= \left[ \left( \frac{\rho(A)}{\rho(\tilde{A})} \right)^n x_n \odot w \right] \tilde{A}^n, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

由于

$$x_0 D_w = \left( \frac{\rho(A)}{\rho(\tilde{A})} \right)^0 x_0 \odot w,$$

这表明

$$\tilde{x}_n := \left( \frac{\rho(A)}{\rho(\tilde{A})} \right)^n x_n \odot w, \quad n \geq 0$$

是迭代方程  $\tilde{x}_0 = \tilde{x}_n \tilde{A}^n$  的解. 由此得出等价表示:

$$\rho(\tilde{A})^n \tilde{x}_n = \rho(A)^n x_n \odot w, \quad n \geq 0.$$

最后, 因为  $\rho(A)$ ,  $\rho(\tilde{A})$  和  $w$  均为正, 定理末项断言显然.  $\square$

**致谢** 作者感谢李育强教授、韩东教授和廖仲威副教授对本文初稿的指正和宝贵建议. 同时感谢杨晓燕编辑和祝红老师的大力支持和帮助. 感谢刘晓冀教授、王凯顺教授和许孝精教授的邀请, 使得本文结果得以在下述活动中展示: “庆祝广西民族大学 70 周年华诞”、“北师大数学院第十四届数学夏令营”及“庆祝北师大 120 周年华诞”.

## 参 考 文 献

- [1] 陈木法. 华罗庚经济最优化理论的新进展 [J]. 应用概率统计, 2022, **38(2)**: 159–178.
- [2] CHEN M F, CHEN R R. Top eigenpairs of large scale matrices [J]. *SIAM Trans. Appl. Math.*, 2022, **3(1)**: 1–25.
- [3] 华罗庚. 计划经济大范围最优化数学理论 [M]. 北京: 中国财政经济出版社, 1987.
- [4] 胡发胜, 王明栋, 贾传亮. 直接消耗系数最优调整的研究 [J]. 山东大学学报 (理学版), 2004, **39(2)**: 47–49+55.

- [5] 戎卫东, 杨大力, 戴力群. 华氏经济数学理论及其应用初探 [J]. 内蒙古大学学报 (哲学社会科学版), 1992, (2): 79–90.
- [6] 中国投入产出学会. 投入产出表 1990–2012 [OL]. 2017 [2017-1-13]. <http://cioa.ruc.edu.cn/zlxz/trc-cb/index.htm>.

## Ordering of Products and Optimization of Structure Matrix in Economy

CHEN Bin<sup>1</sup> CHEN Mu-Fa<sup>1,2</sup> XIE Yingchao<sup>1</sup> YANG Ting<sup>1</sup> ZHOU Qin<sup>1</sup>

(<sup>1</sup>*Institute of mathematics, School of mathematics and statistics, Jiangsu Normal University, Xuzhou, 221116, China*)

(<sup>2</sup>*Key Laboratory of mathematics and complex systems, Ministry of education, School of mathematics, Beijing Normal University, Beijing, 100875, China*)

**Abstract:** As the continuation and deepening of [1], this paper focuses on the center of economic equilibrium and uses mathematics as a tool to explore two themes in the economy: firstly, the “pillar” industry and “bottle strength” industry, “top” products and “weak” products in the economic system, that is, the ranking and stability analysis of products; secondly, forecast and adjust, optimize the design and debugging of economic structure.

**Keywords:** input output method; update of Hua Luogeng’s model; product ranking; structural optimization; quasi-symmetrizing algorithm

**2020 Mathematics Subject Classification:** 91Bxx