中国科学: 数学　2015 年　第 45 卷　第 5 期: 429～438
www.scichina.com　math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

一维算子两个谱问题的判别准则

陈木法

北京师范大学数学科学学院, 北京 100875
E-mail: mfchen@bnu.edu.cn

收稿日期: 2014-12-31;　接受日期: 2015-01-16
国家自然科学基金 (批准号: 11131003) 资助项目

摘要　本文概述新近对于生灭过程和一维扩散过程在如下三个问题研究中所取得的若干代表性成果: 四种情形的主特征值、等谱算子和离散谱; 得到了在各种情形下主特征值统一的基本估计, 其上、下界之比不超过 4; 给出了一维情形谱离散的简明判别准则.

关键词　生灭过程　扩散过程　谱问题

MSC (2010) 主题分类　34L05, 60J27, 60J60

1　引言

本文所关心的两个谱问题是: (1) 第一非平凡特征值 (主特征值) 的正性和; (2) 谱的离散性. 在解决了问题 (1) 之后, 解决问题 (2) 的关键是构造等谱算子. 所处理的两个一维算子是: (1) 生灭过程所对应的三对角型矩阵和; (2) 扩散过程所对应的二阶椭圆算子. 目标是概述新近所得到的关于这两个问题的较为满意的解答.

上述两类随机过程既简单又典型, 常作为随机过程理论各种研究的首选对象, 也作为进一步深入研究的根据地. 自 Feller、Karlin 和 McGregor、王梓坤和 Yushkevich 在 20 世纪 50 年代的开创性工作以来, 经侯振挺、Mandl、杨向群和 van Doorn 等诸多学者的努力, 已积累了为数众多的文献, 请参见文献 [1–5] 及其中所引的文献. 我们之所以回到这个近乎原始的论题, 是希望以此为工具, 探讨随机系统的稳定速度并进一步刻画相变现象 (参见文献 [6]). 事实上, 一维情形常作为比较工具用于高维或无穷维随机系统 (参见文献 [7–9]).

在以下两节中, 我们依次研究生灭过程和一维扩散过程的三个问题: 四种情形的主特征值、等谱算子和离散谱. 随后将介绍进一步论题, 特别是 Hardy 型不等式. 最后陈述我们研究的基本目标. 虽然除一小点扩充而外, 本文的结果已经或即将以英文版发表, 但所有结果 (有一个例外), 尚未用中文发表过.

2　生灭过程

2.1　四种情形的主特征值

在 $E := \{0, 1, 2, \ldots\}$ 上, 考虑三对角矩阵 Q:

英文引用格式: Chen M F. Criteria for two spectral problems of 1D operators (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 429–438, doi: 10.1360/N012014-00282

$$Q=\begin{pmatrix} -b_0 & b_0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_1 & -(a_1+b_1) & b_1 & 0 & \cdots \\ 0 & a_2 & -(a_2+b_2) & b_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

其中 $a_i>0, b_i>0$. 由于 $Q\mathbb{1}=0\cdot\mathbb{1}$ (这里 $\mathbb{1}$ 是恒等于 1 的常值函数), 可见 $-Q$ 有平凡特征值 $\lambda_0=0$. 自然要问, $-Q$ 的下一个特征值 λ_1 为何? 理解这个问题的简单方式是考虑有限的 $E=\{0,1,\dots,N\}$, $N<\infty$. 例如, 当 $E=\{0,1\}$ 时,

$$Q=\begin{pmatrix} -b & b \\ a & -a \end{pmatrix},$$

我们有 $\lambda_1=a+b$. 当 $E=\{0,1,2\}$ 时, 答案也不难. 但当 $E=\{0,1,2,3\}$ 时,

$$Q=\begin{pmatrix} -b_0 & b_0 & 0 & 0 \\ a_1 & -(a_1+b_1) & b_1 & 0 \\ 0 & a_2 & -(a_2+b_2) & b_2 \\ 0 & 0 & a_3 & -a_3 \end{pmatrix},$$

答案就远非平凡, 需要半页纸才能写得下来, 参见文献 [7, 第 2 页].

事实上, 这里有更多的问题. 依然设 $E=\{0,1,\dots,N\}$, $N<\infty$. 我们可考虑初值为 0 的特征值问题:

$$\text{在 } E \text{ 上,}\quad Qg=-\lambda g \quad \text{且}\quad g_0=0,\quad g\neq 0.$$

在左端点 0 的这个边界是 Dirichlet (吸收) 边界. 因为 $b_N=0$, 在右端点是 Neumann (反射) 边界条件 $g_{N+1}=g_N$ (它常省略不写). 这样, 我们无妨把这种情形的最小特征值记为 λ^{DN}. 类似地, 我们有 λ^{ND}, λ^{DD} 和 λ^{NN}. 只是在最后一种情形 (NN) 下, 我们需另加约束条件: g 的平均值为 0, 使之成为前面所讨论的 λ_1, 而不是那里的 $\lambda_0=0$. 我们指出, 这里的分类对于无限区间也是有意义的. 例如, 当 $N=\infty$ 时, 右方的 Dirichlet 边界成为 $g_N:=\lim_{n\to\infty}g_n=0$.

为陈述我们的第一个主要结果, 需要引进一些记号. 设 $E=\{i: -M-1<i<N+1\}$, $M, N\leqslant\infty$. 此时, 生灭 Q 矩阵为: 对于 $i,j\in E$, $q_{i,i+1}=b_i>0$, $q_{i,i-1}=a_i>0$, $q_{ii}=-(a_i+b_i)$, $q_{ij}=0$, 倘若 $|i-j|>1$. 选定参考点 $\theta\in E$ 并定义

$$\begin{aligned} \mu_{\theta+n}&=\frac{a_{\theta-1}a_{\theta-2}\cdots a_{\theta+n+1}}{b_\theta b_{\theta-1}\cdots b_{\theta+n}},\quad -M-1-\theta<n\leqslant -2,\\ \mu_{\theta-1}&=\frac{1}{b_\theta b_{\theta-1}},\quad \mu_\theta=\frac{1}{a_\theta b_\theta},\quad \mu_{\theta+1}=\frac{1}{a_\theta a_{\theta+1}},\\ \mu_{\theta+n}&=\frac{b_{\theta+1}b_{\theta+2}\cdots b_{\theta+n-1}}{a_\theta a_{\theta+1}\cdots a_{\theta+n}},\quad 2\leqslant n<N+1-\theta. \end{aligned}$$

我们注意, 当 θ 变动时, 测度 (μ_i^θ) 只相差一个仅依赖于 θ 的常数. 相应的 $L^2(\mu)$ 上的二次型 (更准确地, 其对角线元素) 为

$$D(f)=\sum_{-M-1<i\leqslant\theta}\mu_i a_i(f_i-f_{i-1})^2+\sum_{\theta\leqslant i<N+1}\mu_i b_i(f_{i+1}-f_i)^2,$$

因为 $\mu_i a_i = \mu_{i-1} b_{i-1}$, 上式与参考点 θ 的选法无关. 边界条件: 如 $M < \infty$, 则

$$\begin{cases} f_{-M-1} = 0, & \text{Dirichlet 边界}, \\ f_{-M-1} = f_{-M}, & \text{Neumann 边界}; \end{cases}$$

如 $N < \infty$, 则

$$\begin{cases} f_{N+1} = 0, & \text{Dirichlet 边界}, \\ f_{N+1} = f_N, & \text{Neumann 边界}. \end{cases}$$

留意这里当 $N < \infty$ 时, 假设了 $b_N > 0$. 同样地, 当 $M < \infty$ 时, 假设了 $a_{-M} > 0$. 这对于两个边界条件的描述比较方便. 然而, 对于 Neumann 边界, 例如, 在 N 处, 通常假设 $b_N = 0$, 而省略 "$f_{N+1} = f_N$" 不写. 因为我们允许无限区间, 前述的特征值 $\lambda^{\#}$ 的定义需要扩充. 为此, 记 $\mu(f) = \sum_{k \in E} \mu_k f_k$. 然后有 $\mu[\alpha, \beta] = \mu(\mathbb{1}_{[\alpha,\beta]})$. 当然, $\mu[\alpha, N] = \mu[\alpha, N)$, 如果 $N = \infty$. 首先, 定义

$$\lambda^{\rm DD} = \inf\{D(f) : f \text{ 有紧支撑且 } \mu(f^2) = 1\}.$$

其次, 当 $\mu[\theta, N] < \infty$ 时, 定义

$$\lambda^{\rm DN} = \inf\{D(f) : \text{存在 } m, n \in E,\ m < n \text{ 使得 } f = \mathbb{1}_{[m,N]} f_{\cdot \wedge n} \text{ 且 } \mu(f^2) = 1\},$$

此处 $\alpha \wedge \beta = \min\{\alpha, \beta\}$. 类似地, 命 $\alpha \vee \beta = \max\{\alpha, \beta\}$. 简单地说, 这里的 f 在 $[-M, m-1]$ 上为 0 而在 $[n, N]$ 上为常数. 对偶地, 当 $\mu[-M, \theta] < \infty$ 时, 定义

$$\lambda^{\rm ND} = \inf\{D(f) : \text{存在 } m, n \in E, m < n \text{ 使得 } f = \mathbb{1}_{[-M,n]} f_{\cdot \vee m} \text{ 且 } \mu(f^2) = 1\}.$$

最后, 当 $\mu[-M, N] < \infty$ 时, 定义

$$\begin{aligned} \lambda^{\rm NN} &= \inf\{D(f) : \mu(f) = 0, \mu(f^2) = 1\} \\ &= \inf\{D(f) : \text{存在 } m, n \in E,\ m < n \text{ 使得 } f = f_{m \vee \cdot \wedge n} \text{ 且 } \mu(f) = 0, \mu(f^2) = 1\}. \end{aligned}$$

笔者于 1988 年开始研究 $\lambda^{\rm NN}$, 经历了漫长的岁月, 于 2010 年才在文献 [10] 中给出下述结果.

定理 1 对于如上的 $\lambda^{\#}$, 我们有如下统一的基本估计:

$$(4\kappa^{\#})^{-1} \leqslant \lambda^{\#} \leqslant (\kappa^{\#})^{-1},$$

其中

$$\begin{aligned} (\kappa^{\rm NN})^{-1} &= \inf_{n,m \in E, n < m} \left[\left(\sum_{i=-M}^{n} \mu_i \right)^{-1} + \left(\sum_{i=m}^{N} \mu_i \right)^{-1} \right] \left(\sum_{j=n}^{m-1} \frac{1}{\mu_j b_j} \right)^{-1}, \\ (\kappa^{\rm DD})^{-1} &= \inf_{n,m \in E, n \leqslant m} \left[\left(\sum_{i=-M}^{n} \frac{1}{\mu_i a_i} \right)^{-1} + \left(\sum_{i=m}^{N} \frac{1}{\mu_i b_i} \right)^{-1} \right] \left(\sum_{j=n}^{m} \mu_j \right)^{-1}, \\ \kappa^{\rm DN} &= \sup_{n \in E} \left(\sum_{i=-M}^{n} \frac{1}{\mu_i a_i} \right)^{-1} \left(\sum_{j=n}^{N} \mu_j \right)^{-1}, \\ \kappa^{\rm ND} &= \sup_{n \in E} \left(\sum_{i=-M}^{n} \mu_i \right)^{-1} \left(\sum_{j=n}^{N} \frac{1}{\mu_j b_j} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

特别地, $\lambda^{\#}>0$ 当且仅当 $\kappa^{\#}<\infty$.

我们注意, 若定义 $\hat{\nu}_k=(\mu_k b_k)^{-1}$ 及对于 DD 和 DN 情形在求和 $\sum_{k=-M}^{n}$ 下作修正 $\hat{\nu}_k=(\mu_k a_k)^{-1}$ (留意当 $k\in E$ 时, $\mu_k b_k=\mu_{k+1}a_{k+1}$), 则定理中的基本估计由两个测度 μ 和 $\hat{\nu}$ 显式刻画, 上、下界仅相差一个普适常数 4. 这归功于双边情形的两个新等周常数 $\kappa^{\rm NN}$ 和 $\kappa^{\rm DD}$ (来自文献 [10, 推论 7.8 和 7.9]). 容易看出, 在这两个常数中, 两个边界点 $-M$ 和 N 处于对称位置. 对于后两个常数, 在文献 [10] 中, 我们只写出 $M=0$ 情形. 若 $M=\infty$, 只需使用有限的 M 代替 0, 然后再过度极限 $M\to\infty$ 即得所求. 当 $M<\infty$ 且左方为 Dirichlet 边界时, 这里的常数的左端点与文献 [10] 不同: 这里用的是 $-M$, 而文献 [10] 取的是 $-M+1$. 后者的取法是为了保证 NN 情形的非平凡特征值等同于 DD 情形的特征值. 这样, DD 情形的状态空间应比 NN 情形少一个点 (当 N 也有限时).

2.2 等谱算子

我们知道, 生灭 Q 矩阵由两列正数 (a_i) 和 (b_i) 完全决定, 其对角线元素 $q_{ii}=-(a_i+b_i)$. 如在对角线上再添加一个非负数列 (killing) (c_i): $q_{ii}=-(a_i+b_i+c_i)$, 那么所得到的 Q 矩阵就成为非保守生灭 Q 矩阵, 记作 Q^c. 需要特别指出的是, 当 $N<\infty$ 时, 可将 b_N 合并到 c_N 中去. 类似地, 可将 a_{-M} 合并到 c_{-M} 中去. 因此, 从现在开始至本节末, 我们总假定当 $N<\infty$ 时 $b_N=0$, 而当 $M<\infty$ 时 $a_{-M}=0$. 这与前面不同. 此时, 相应的 $L^2(\mu)$ 上的二次型成为

$$D^c(f)=\sum_{-M-1<i\leqslant\theta}\mu_i a_i(f_i-f_{i-1})^2+\sum_{\theta\leqslant i<N+1}\mu_i b_i(f_{i+1}-f_i)^2+\sum_{i\in E}\mu_i c_i f_i^2.$$

为研究随后的课题, 我们先构造关于 Q^c 的处处非零调和函数 h: $Q^c h=0$. 更确切地说, 我们需要的是局部 $(-M,N)$ 上的调和函数, 而不是整体 $[-M,N]$ 上的调和函数. 两者在端点上有区别, 倘若该端点有限. 为此, 固定参考点 $\theta\in E$. 命

$$u_{\theta+i}=\frac{a_{\theta+i}}{b_{\theta+i}},\quad v_{\theta+i}=\frac{c_{\theta+i}}{b_{\theta+i}},\quad \xi_{\theta+i}=1+u_{\theta+i}+v_{\theta+i},\quad r_{\theta+i}=\frac{h_{\theta+i}}{h_{\theta+i+1}},\quad 0\leqslant i<N+1-\theta.$$

当 $1\leqslant n<N+1-\theta$ 时, 由调和方程得

$$1=\xi_{\theta+n}r_{\theta+n}-u_{\theta+n}r_{\theta+n-1}r_{\theta+n}=r_{\theta+n}(\xi_{\theta+n}-u_{\theta+n}r_{\theta+n-1}).$$

由此得出右边 (即 $n\geqslant 1$ 情形) 的递推方程

$$r_{\theta+n}=\frac{1}{\xi_{\theta+n}-u_{\theta+n}r_{\theta+n-1}}=\cfrac{1}{\xi_{\theta+n}-\cfrac{u_{\theta+n}}{\xi_{\theta+n-1}-\cfrac{u_{\theta+n-1}}{\ddots\ \xi_{\theta+1}-u_{\theta+1}r_\theta}}},\quad 1\leqslant n<N+1-\theta.$$

平行地, 命

$$u_{\theta+i}=\frac{b_{\theta+i}}{a_{\theta+i}},\quad v_{\theta+i}=\frac{c_{\theta+i}}{a_{\theta+i}},\quad \xi_{\theta+i}=1+u_{\theta+i}+v_{\theta+i},\quad r_{\theta+i}=\frac{h_{\theta+i+1}}{h_{\theta+i}},\quad -M-1-\theta<i\leqslant -1.$$

当 $-M-\theta<n\leqslant -1$ 时, 再用一次调和方程, 得出

$$1=\xi_{\theta+n}r_{\theta+n-1}-u_{\theta+n}r_{\theta+n-1}r_{\theta+n}=r_{\theta+n-1}(\xi_{\theta+n}-u_{\theta+n}r_{\theta+n}).$$

于是得出左边 (即 $n \leqslant -1$ 情形) 的递推方程

$$r_{\theta+n} = \frac{1}{\xi_{\theta+n+1} - u_{\theta+n+1} r_{\theta+n+1}} = \cfrac{1}{\xi_{\theta+n+1} - \cfrac{u_{\theta+n+1}}{\xi_{\theta+n+2} - \cfrac{u_{\theta+n+2}}{\ddots\, \xi_{\theta-1} - u_{\theta-1} r_{\theta-1}}}}, \quad -M-1-\theta < n \leqslant -1.$$

现在, 我们定义初值

$$r_{\theta-1} = r_\theta = 1 - \frac{c_\theta}{a_\theta + b_\theta + c_\theta}.$$

这来自在 θ 处的调和方程 (约定 $h_\theta = 1$). 事实上, 满足此方程的 $r_{\theta-1}$ 和 r_θ 未必相等, 这里还有一个自由度. 由此也可看出, 即使不计常数因子, 解 (r_n) 也可能不唯一, 从而, 下述的 h 也未必唯一. 最后, 所求的一个正的调和函数 $(h_n : n \in E)$ 为

$$h_{\theta+n} = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} r_{\theta+k}^{-1}, & 1 \leqslant n < N+1-\theta, \\ \displaystyle\prod_{k=1}^{-n} r_{\theta-k}, & -M-1-\theta < n \leqslant -1. \end{cases}$$

这里, 我们选定一个特殊的 h, 因为随后的讨论与 h 的选法无关. 虽然这个构造有些冗长, 但使用归纳法还是容易证明

$$c_i \equiv 0 \Rightarrow h_i \equiv 1.$$

这样, 关于含有 h 的每一个结果, 只要命 $h_i \equiv 1$ 便可回归 $c_i \equiv 0$ 情形的结论. 我们注意, 如果 $M < \infty$, 可取 $\theta = -M$, 即只需考虑右半边. 类似地可能有左半边情形.

现在, 我们可以通过 h, 定义一个对偶生灭矩阵 $\widetilde{Q}$ 如次:

$$\tilde{a}_i = a_i \frac{h_{i-1}}{h_i}, \quad \tilde{b}_i = b_i \frac{h_{i+1}}{h_i}, \quad i \in E,$$

在 $\{-M+1, \ldots, N-1\}$ 上 $\tilde{c}_i = 0$; 但

$$\tilde{c}_N = c_N + a_N \left(1 - \frac{h_{N-1}}{h_N}\right), \quad \text{如 } N < \infty,$$
$$\tilde{c}_{-M} = c_{-M} + b_{-M} \left(1 - \frac{h_{-M+1}}{h_{-M}}\right), \quad \text{如 } M < \infty.$$

简单地说, 对偶生灭矩阵除在有限边界点非保守之外, 在其余各处都是保守的. 再命

$$\tilde{\mu} = h^2 \mu : \tilde{\mu}_i = h_i^2 \mu_i, \quad i \in E.$$

那么, 在映射 $f \to \tilde{f} := f/h$ 之下, 由二次型 D^c 的一个定义域 $\mathscr{D}(D^c)$ 所诱导的对偶二次型 $\widetilde{D}$ 在 $L^2(\tilde{\mu})$ 上的定义域 $\mathscr{D}(\widetilde{D})$ 为

$$\mathscr{D}(\widetilde{D}) = \{\tilde{f} \in L^2(\tilde{\mu}) : \tilde{f} h \in \mathscr{D}(D^c)\}.$$

下述结果取自文献 [11, 第 2 节].

定理 2　在 $L^2(\mu)$ 上的二次型 $(D^c, \mathscr{D}(D^c))$ 与在 $L^2(\tilde{\mu})$ 上的二次型 $(\widetilde{D}, \mathscr{D}(\widetilde{D}))$ 等谱. 详言之, 空间 $L^2(\mu)$ 与 $L^2(\tilde{\mu})$ 上的映射 $f \to \tilde{f} := f/h$ 具有如下性质:

(1) 一一等距;

(2) $f \in \mathscr{D}(D^c)$ 当且仅当 $\tilde{f} \in \mathscr{D}(\widetilde{D})$ 且 $\widetilde{D}(\tilde{f}) = D^c(f)$.

由定理 2 立知, $(D^c, \mathscr{D}(D^c))$ 与 $(\widetilde{D}, \mathscr{D}(\widetilde{D}))$ 有相同的非平凡的第一特征值 $\lambda^\#$. 将定理 1 应用于 $(\widetilde{D}, \mathscr{D}(\widetilde{D}))$, 不难写出关于 $(D^c, \mathscr{D}(D^c))$ 的 $\lambda^\#$ 的基本估计, 只需留意此刻定理 1 中的 μ 和 $\hat{\nu}$ 分别变成

$$\tilde{\mu}_i = h_i^2 \mu_i, \quad \hat{\tilde{\nu}}_i = \frac{\hat{\nu}_i}{h_i h_{i+1}}, \quad i \in E.$$

2.3　离散谱

本节的最后一个结果将充分显示定理 2 的威力. 我们称 $L^2(\mu)$ 上的二次型 $(D^c, \mathscr{D}(D^c))$ 有离散谱, 如果它的谱由具有至多有限重的特征值构成. 因为有限区间上的算子是紧算子, 它的谱必然离散, 我们只需考虑无限区间. 为简单计, 此处只写出 "半直线" 情形 $E = \{0, 1, \ldots\}$ 的解答 (参见文献 [12, 定理 2.1]). 为此, 需要为 D^c 指定两个定义域: 其一是

$$\mathscr{D}_{\max}(D^c) = \{f \in L^2(\mu) : D^c(f) < \infty\};$$

其二是 $\mathscr{D}_{\min}(D^c)$, 它是集合 $\{f \in L^2(\mu) : f$ 具有有限支撑$\}$ 关于范数 $\|\cdot\|_D$: $\|f\|_D^2 = \|f\|_{L^2(\mu)}^2 + D^c(f)$ 的最小完备化.

定理 3　令 $E = \{0, 1, \ldots\}$.

(1) 设 $\sum_{k=0}^\infty (h_k h_{k+1} \mu_k b_k)^{-1} < \infty$, 则 $(D^c, \mathscr{D}_{\min}(D^c))$ 的谱离散当且仅当

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^n \mu_j h_j^2 \sum_{k=n}^\infty \frac{1}{h_k h_{k+1} \mu_k b_k} = 0;$$

(2) 设 $\sum_{j=0}^\infty \mu_j h_j^2 < \infty$, 则 $(D^c, \mathscr{D}_{\max}(D^c))$ 的谱离散当且仅当

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=n+1}^\infty \mu_j h_j^2 \sum_{k=0}^n \frac{1}{h_k h_{k+1} \mu_k b_k} = 0;$$

(3) 设 $\sum_{k=0}^\infty (h_k h_{k+1} \mu_k b_k)^{-1} = \infty = \sum_{j=0}^\infty \mu_j h_j^2$, 则 $(D^c, \mathscr{D}_{\min}(D^c))$ 和 $(D^c, \mathscr{D}_{\max}(D^c))$ 的谱都非离散.

当 $c_i \equiv 0$ 时, 定理 3(2) 来自文献 [13, 定理 1.2]. 由它出发, 使用定理 2, 可证明定理 3.

3　一维扩散过程

现在转入一维扩散过程, 状态空间为 $E := (-M, N)$ $(M, N \leqslant \infty)$. 考虑椭圆算子

$$L = a(x)\frac{d^2}{dx^2} + b(x)\frac{d}{dx},$$

此处假定在 E 上 $a > 0$. 然后定义函数 $C(x)$:

$$C(x) = \int_\theta^x \frac{b}{a}, \quad x \in E,$$

其中 $\theta \in E$ 为任意选定的参考点, 我们常省略 Lebesgue 测度 dx 不写. 现在定义两测度 μ 和 $\hat{\nu}$ 如下:

$$\mu(dx) = \frac{\mathrm{e}^{C(x)}}{a(x)}dx, \quad \hat{\nu}(dx) = \mathrm{e}^{-C(x)}dx.$$

类似于离散情形, 定义二次型

$$\begin{aligned}
&D(f) = \int_{-M}^{N} f'^2 \mathrm{e}^{C}, \quad M, N \leqslant \infty, \quad f \in \mathscr{A}(-M, N),\\
&\mathscr{A}(-M, N) = \{(-M, N) \text{ 上绝对连续函数的全体}\},\\
&\mathscr{A}_0(-M, N) = \{f \in \mathscr{A}(-M, N) : f \text{ 具有紧支撑}\}.
\end{aligned}$$

3.1 四种情形的主特征值

定义非平凡第一特征值如下:

$$\begin{aligned}
&\lambda^{\mathrm{DD}} = \inf\{D(f) : f \in \mathscr{A}_0(-M, N) \text{ 且 } \mu(f^2) = 1\},\\
&\lambda^{\mathrm{DN}} = \inf\{D(f) : f \in \mathscr{A}(-M, N), \text{ 存在 } m, n \in E, m < n \text{ 使得 } f = \mathbb{1}_{[m,N]} f_{\cdot \wedge n} \text{ 且 } \mu(f^2) = 1\},\\
&\lambda^{\mathrm{ND}} = \inf\{D(f) : f \in \mathscr{A}(-M, N), \text{ 存在 } m, n \in E, m < n \text{ 使得 } f = \mathbb{1}_{[-M,n]} f_{\cdot \vee m} \text{ 且 } \mu(f^2) = 1\},\\
&\lambda^{\mathrm{NN}} = \inf\{D(f) : f \in \mathscr{A}(-M, N), \mu(f) = 0, \mu(f^2) = 1\},
\end{aligned}$$

这里, 对于 λ^{DN}, λ^{ND} 和 λ^{NN}, 分别需要如下条件:

$$\mu(\theta, N) < \infty, \quad \mu(-M, \theta) < \infty, \quad \mu(-M, N) < \infty.$$

下述结果平行于定理 1.

定理 4 关于 $\lambda^{\#}$, 我们有下述统一的基本估计:

$$(4\kappa^{\#})^{-1} \leqslant \lambda^{\#} \leqslant (\kappa^{\#})^{-1},$$

其中

$$\begin{aligned}
&(\kappa^{\mathrm{NN}})^{-1} = \inf_{-M<x<y<N} [\mu(-M, x)^{-1} + \mu(y, N)^{-1}] \hat{\nu}(x, y)^{-1},\\
&(\kappa^{\mathrm{DD}})^{-1} = \inf_{-M<x<y<N} [\hat{\nu}(-M, x)^{-1} + \hat{\nu}(y, N)^{-1}] \mu(x, y)^{-1},\\
&\kappa^{\mathrm{DN}} = \sup_{x \in (-M, N)} \hat{\nu}(-M, x)\, \mu(x, N),\\
&\kappa^{\mathrm{ND}} = \sup_{x \in (-M, N)} \mu(-M, x)\, \hat{\nu}(x, N).
\end{aligned}$$

特别地, $\lambda^{\#} > 0$ 当且仅当 $\kappa^{\#} < \infty$.

3.2 等谱算子

下面考虑带杀 (killing) 情形. 设函数 $c \geqslant 0$. 命

$$L = a(x)\frac{d^2}{dx^2} + b(x)\frac{d}{dx} - c(x),$$

则

$$D^c(f)=\int_{-M}^{N} f'^2\mathrm{e}^C+\int_{-M}^{N} cf^2d\mu,\quad M,N\leqslant\infty,\quad f\in\mathscr{A}(-M,N).$$

现在构造 L^c 调和函数 h. 记

$$G(x)=\begin{pmatrix}0 & \mathrm{e}^{-C(x)}\\ c(x)\mathrm{e}^{C(x)}/a(x) & 0\end{pmatrix}.$$

使用 G, 定义积分算子 I_G, 它作用于二维向量 F 定义为 $I_GF(x)=\int_\theta^x GF$, $x\in E$. 命 $I_G^n=I_G\circ I_G^{n-1}$, $I_G^0=$ 恒等算子, $F^*=\sum_{n=0}^\infty I_G^nF^{(1)}$, 此处 $F^{(1)}=\binom{1}{0}$. 这是第二迭代法 (参见文献 [12, 定理 7.4(2)]) 的另一种表示. 再以 h 表示 F^* 的第一分量. 显而易见, 如 $c(x)\equiv 0$, 则 $F^*=F^{(1)}$, 从而, $h(x)\equiv 1$. 最后, 定义对偶算子

$$\widetilde{L}=a(x)\frac{d^2}{dx^2}+(b(x)+2a(x)(\log h(x))')\frac{d}{dx}.$$

当然, 对于给定的 D^c 的定义域 $\mathscr{D}(D^c)$, 由映射 $f\to\tilde{f}:=f/h$ 自然诱导出关于 $\widetilde{L}$ 的二次型 $\widetilde{D}$ 的定义域 $\mathscr{D}(\widetilde{D})$. 那么, 对应于定理 2, 我们有下面的定理 (参见文献 [11, 定理 3.1]).

定理 5 L^c 与 $\widetilde{L}$ 所对应的二次型在 L^2 意义下等谱.

3.3 离散谱

为研究 L^c 的离散谱, 我们需要指定 D^c 的定义域, 其一是

$$\mathscr{D}_{\max}(D^c)=\{f\in L^2(\mu): f\in\mathscr{A}(0,\infty)\text{且 } D^c(f)<\infty\};$$

其二是 $\mathscr{D}_{\min}(D^c)$, 它是 $\mathscr{A}_0(0,\infty)$ 关于范数 $\|\cdot\|_D$ 的最小完备化.

为简单计, 我们把 "$(D^c,\mathscr{D}_{\min}(D^c))$ 具有离散谱" 写成 "$\sigma_{\mathrm{ess}}(L^c_{\min})=\emptyset$". 同样地, 有记号 $\sigma_{\mathrm{ess}}(L^c_{\max})=\emptyset$. 与定理 3 平行, 我们有下述结果 (参见文献 [12, 定理 7.1]).

定理 6 设 $E=(0,\infty)$.

(1) 如 $\hat{\nu}(h^{-2})<\infty$, 则 $\sigma_{\mathrm{ess}}(L^c_{\min})=\emptyset$ 当且仅当

$$\lim_{x\to\infty}\mu(h^2\mathbb{1}_{(0,x)})\hat{\nu}(h^{-2}\mathbb{1}_{(x,\infty)})=\lim_{x\to\infty}\int_0^x h^2d\mu\int_x^\infty\frac{1}{h^2}d\hat{\nu}=0;$$

(2) 如 $\mu(h^2)<\infty$, 则 $\sigma_{\mathrm{ess}}(L^c_{\max})=\emptyset$ 当且仅当

$$\lim_{x\to\infty}\mu(h^2\mathbb{1}_{(x,\infty)})\hat{\nu}(h^{-2}\mathbb{1}_{(0,x)})=\lim_{x\to\infty}\int_x^\infty h^2d\mu\int_0^x\frac{1}{h^2}d\hat{\nu}=0;$$

(3) 如 $\hat{\nu}(h^{-2})=\infty=\mu(h^2)$, 则 $\sigma_{\mathrm{ess}}(L^c_{\min})$ 和 $\sigma_{\mathrm{ess}}(L^c_{\max})$ 都非空.

4 进一步论题

4.1 Hardy 型不等式

作为例子, 考虑上节中定义的 λ^{DD}. 它可改写成

$$\|f\|^2_{L^2(\mu)}\leqslant\frac{1}{\lambda^{\mathrm{DD}}}\int_{-M}^{N}f'^2\mathrm{e}^C=:\frac{1}{\lambda^{\mathrm{DD}}}\|f'\|^2_{L^2(\nu)},\quad f\in\mathscr{A}_0(-M,N).$$

一般地, 对于给定的两个 Borel 测度 μ 和 ν, 有如下 Hardy 型不等式:

$$\|f\|_{L^q(\mu)} \leqslant A\|f'\|_{L^p(\nu)}, \quad f \in \mathscr{A}_0(-M,N).$$

这种不等式的研究是调和分析的重要主题. 现在的 $\hat{\nu}$ 成为

$$\hat{\nu}(dx) = \left(\frac{d\nu^*}{dx}\right)^{-1/(p-1)} dx,$$

其中 ν^* 是 ν 关于 Lebesgue 测度的绝对连续部分. 下面要用到测度的 Lebesgue 分解:

$$\nu = \nu^* + \nu_{sc} + \nu_{pp},$$

其中 ν_{sc} 和 ν_{pp} 分别是 ν 的奇异连续部分和纯点部分. 命

$$k_{q,p} = \left[\frac{q-p}{p\mathrm{B}(\frac{p}{q-p}, \frac{p(q-1)}{q-p})}\right]^{1/p-1/q}, \quad q > p > 1; \quad k_{p,p} = p^{1/p}p^{*1/p^*}, \quad p > 1,$$

此处 $\mathrm{B}(\alpha,\beta)$ 是 Beta 函数, 而 p^* 是 p 的共轭指数. 再命

$$B^* = \sup_{-M<x<y<N} \frac{\mu[x,y]^{1/q}}{\{\hat{\nu}[-M,x)^{\frac{q(1-p)}{p}} + \hat{\nu}[y,N]^{\frac{q(1-p)}{p}}\}^{1/q}},$$

$$B_* = \sup_{-M<x<y<N} \frac{\mu[x,y]^{1/q}}{\{\hat{\nu}[-M,x)^{1-p} + \hat{\nu}[y,N]^{1-p}\}^{1/p}}.$$

定理 7 上述 Hardy 型不等式中的最佳常数 A 满足下述估计:

(1) 对于 $1 < p \leqslant q < \infty$, 当 $\mu_{pp} = 0$ 时, 我们有 $A \leqslant k_{q,p}B^*$;

(2) 对于 $1 < p, q < \infty$, 我们有 $A \geqslant B_*$.

此外, $B_* \leqslant B^* \leqslant 2^{1/p-1/q}B_*$.

容易看出, 定理 7 比定理 4 中相应的结论远为广泛. 事实上, 早先定理 4 的证明是艰难的, 用到三种重要数学工具. 正是在找到了定理 4 的初等证明之后, 才得到定理 7. 更多的结果参见文献 [14].

4.2 稳定性速度估计

前面所讨论的非平凡第一特征值有重要的概率意义. 对于一般的可逆 Markov 过程, 记其转移半群为 $(P_t)_{t\geqslant 0}$, 可逆平稳分布为 π. 那么 L^2 指数式收敛

$$\|P_tf - \pi(f)\|_{L^2(\pi)} \leqslant \|f\|_{L^2(\pi)}\mathrm{e}^{-\varepsilon t}, \quad f \in L^2(\pi), \quad t \geqslant 0$$

的最快速度 $\varepsilon_{\max}$ 就是第一非平凡特征值, $\varepsilon_{\max} = \lambda_1$. 对于这里所讲的一维过程, 平稳分布是 μ 的归一化: $\pi = \mu/\mu[-M,N]$. 这里当然要求 $\mu[-M,N] < \infty$. 反之, 若 $\mu[-M,N] = \infty$, 则指数式衰减

$$\|P_tf\|_{L^2(\mu)} \leqslant \|f\|_{L^2(\mu)}\mathrm{e}^{-\varepsilon t}, \quad f \in L^2(\mu), \quad t \geqslant 0$$

的最快速度 $\varepsilon_{\max}$ 就由 $\lambda^{\#}$ ($\#$ 非 NN 情形) 刻画.

如同文献 [6] 中开头及文献 [15] 第二版的序言中所述, 我们的目标是研究统计物理中的相变现象, 这是无穷维的数学, 需要寻找、发展新的数学工具. 这里仅就相对简单的情形, 介绍我们所得到的代表性新结果. 即使是这种情形, 书 [6] 中所介绍的 10 个显式判别准则, 这里也仅涉及其中之一. 速度估计的研究之所以重要, 是因为一种收敛性的研究是否完善, 标志之一是是否找到了好的收敛速度. 一个课题是如此, 相信一个学科也是如此. 由此可见, 这一领域的研究还有很大的发展空间.

5 后记

很高兴为侯振挺老师的 80 华诞写这篇纪念文章. 侯老师和我校的严士健老师是当年我的两位研究生指导导师. 他是我研究概率论的领路人, 书 [15] 中收入了我们早年的 6 篇论文, 还有我们与其他老师合写的研究专著 [16]. 从书 [15] 中可以看出侯老师的研究成果和他的数学哲学的深刻影响. 例如, 这里所用到的最大过程 (定义域 $\mathscr{D}_{\max}(D^c)$), 本质上来源于我们关于单流出情形不中断可逆 Q 过程的唯一性. 又如文献 [15, 第 7 章], 导源于我们的文献 [17], 也见文献 [16]. 对于侯老师的培养和教诲, 笔者感激不尽、终生不忘. 最后, 衷心祝愿侯老师健康长寿.

致谢 作者感谢张汉君和廖仲威找出初稿中的不少笔误.

参考文献

1 王梓坤, 杨向群. 生灭过程与马尔可夫链. 第 2 版. 北京: 科学出版社, 2005
2 杨向群. 可列马尔科夫过程构造论. 第 2 版. 长沙: 湖南科技出版社, 1986
3 侯振挺, 刘再明, 张汉君, 等. 生灭过程. 长沙: 湖南科学技术出版社, 2000
4 Mandl P. Analytical Treatment of One-Dimensional Markov Processes. New York: Springer-Verlag, 1968
5 van Doorn E A. Stochastic Monotonicity and Queueing Applications of Birth-Death Processes. New York: Springer-Verlag, 1981
6 Chen M F. Eigenvalues, Inequalities, and Ergodic Theory. London: Springer, 2005
7 Chen M F. On the ergodic region of Schlögl's model. In: Proceedings of International Conference on Dirichlet Forms and Stochastic Processes. Berlin: Walter de Gruyter & Co., 1995, 87–102
8 Chen M F. Spectral gap and logarithmic Sobolev constant for continuous spin systems. Acta Math Sin Engl Ser, 2008, 24: 705–736
9 Chen M F. General estimate of the first eigenvalue on manifolds. Front Math China, 2011, 6: 1025–1043
10 Chen M F. Speed of stability for birth-death processes. Front Math China, 2010, 5: 379–515
11 Chen M F, Zhang X. Isospectral operators. Commun Math Stat, 2014, 2: 17–32
12 Chen M F. Criteria for discrete spectrum of 1D operators. Commun Math Stat, 2014, 2: 279–309
13 Mao Y H. On empty essential spectrum for Markov processes in dimension one. Acta Math Sin Engl Ser, 2006, 22: 807–812
14 Chen M F. Bilateral Hardy-type inequalities. Acta Math Sin Engl Ser, 2013, 29: 1–32
15 Chen M F. From Markov Chains to Non-Equilibrium Particle Systems. 2nd ed. Singapore: World Scientific, 2004
16 钱敏, 侯振挺, 陈木法, 等. 可逆马尔可夫过程. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1979
17 Hou Z T, Chen M F. Markov Processes and field theory (Abstract). Chinese Sci Bull, 1980, 15: 807–811

Criteria for two spectral problems of 1D operators

CHEN MuFa

Abstract This paper introduces shortly recent progress on the following three problems: The principal eigenvalue in four cases, isospectral operators, and discrete spectrum, for birth-death processes and one-dimensional diffusion processes. Unified basic estimates of principal eigenvalues in various situations are obtained, the ratio of their upper and lower bounds is no more than 4. Short criteria for discrete spectrum are presented in dimension one.

Keywords **birth-death process, diffusion process, spectral problem**

MSC(2010) **34L05, 60J27, 60J60**

doi: 10.1360/N012014-00282